

УДК 539.3

*О. П. Червинко, канд. физ.-мат. наук, Е. В. Доля, канд. физ.-мат. наук,
Н. С. Якименко, канд. физ.-мат. наук*

УСТАЛОСТНОЕ ТЕРМИЧЕСКОЕ РАЗРУШЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ СЛОИСТОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПРИЗМЫ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

В рамках связанной задачи термовязкоупругости изучено термическое усталостное разрушение слоистой металлополимерной призмы при гармоническом сжатии вибрирующим штампом. Задача решается методом конечных элементов. Для полимерной призмы установлена возможность поверхностного разрушения. При наличии армирующих слоев разрушение происходит в полимерной матрице.

Ключевые слова: вязкоупругая слоистая призма, термическое усталостное разрушение, гармоническое сжатие.

Введение. Термическое усталостное разрушение определяется как потеря несущей способности термопластического материала вследствие размягчения при виброразогреве [3]. Предельное состояние обычно связывают с достижением температуры некоторого критического значения $\theta = \theta_f$, например температуры вязкотекучего перехода $\theta_f = \theta_{em}$. Обобщение результатов исследования виброразогрева однородных вязкоупругих тел дается в монографиях [1, 4].

Связанные задачи термовязкоупругости для полимеров, упрочненных волокнами, рассмотрены в работе [5].

Настоящая работа посвящена тепловому разрушению призмы прямоугольного сечения, которая состоит из слоев меди и полиэтилена. Призма нагружается прямоугольным вибрирующим штампом в кинематическом или силовом режиме сжатия с частотой 20 кГц .

Постановка задачи. В прямоугольной декартовой системе координат Охуз упрощенная постановка связанной задачи термовязкоупругости для случая гармонической нагружения [1] включает в себя кинематические уравнения Коши, уравнения колебаний и теплопроводности:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{ij,j} + \tilde{b}_i + \rho\omega^2\tilde{u}_i &= 0, \quad i, j = x, y, z; \\ c_V\dot{\theta} &= (k, \theta, i), \quad i + \beta\bar{D}',\end{aligned}\tag{1}$$

где β – доля рассеянной за период колебаний механической мощности, переходящей в тепло; k, c_V – коэффициенты теплопроводности и объемной теплоемкости; ρ – плотность; ω – частота колебаний.

Определяющие уравнения для девиаторных и шаровых составляющих напряжений, а также скорости внутренней диссипации $\bar{D}'$ имеют вид

$$\tilde{s}_{ij} = 2\tilde{G}(\omega, \theta)\tilde{e}_{ij}, \quad \tilde{\sigma}_{kk} = 3\tilde{K}\tilde{e}_{kk}, \quad \bar{D}' = \frac{\omega}{2}(\sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij})$$

где $\tilde{s}_{kl} = s'_{kl} + is''_{kl}$, $\tilde{e}_{kl} = e'_{kl} + ie''_{kl}$ – комплексные амплитуды девиаторов тензоров напряжения и деформации; $\tilde{\sigma}_{kk} = \sigma'_{kk} + i\sigma''_{kk}$, $\tilde{e}_{kk} = e'_{kk} + ie''_{kk}$ – комплексные амплитуды шаровых составляющих; $\tilde{G}(\omega, \theta) = G'(\omega, \theta) + iG''(\omega, \theta)$ – комплексный модуль сдвига; $\tilde{K}(\omega, \theta) = K'(\omega, \theta) + iK''(\omega, \theta)$ – комплексный модуль объемного сжатия.

Тепловые граничные и начальные условия:

$$\theta_{,i} n_i = \gamma(\theta - \theta_c) \text{ на } S,$$

$$\theta = \theta_0(x_j) \text{ при } t = 0,$$

где γ – коэффициент теплоотдачи; θ_0 , θ_c – начальная температура и температура окружающей среды; $\theta_{,i} = \partial\theta/\partial x_i$, $\dot{\theta} = \partial\theta/\partial t$; S – поверхность тела.

Механические граничные условия формулируются ниже.

Рассматривается плоское деформированное состояние и виброрагрев призмы прямоугольного сечения $|x| \leq \tilde{n}$, $0 \leq y \leq b$, состоящей из вязкоупругих (полимерных) и упругих (металлических) слоев (рис. 1).

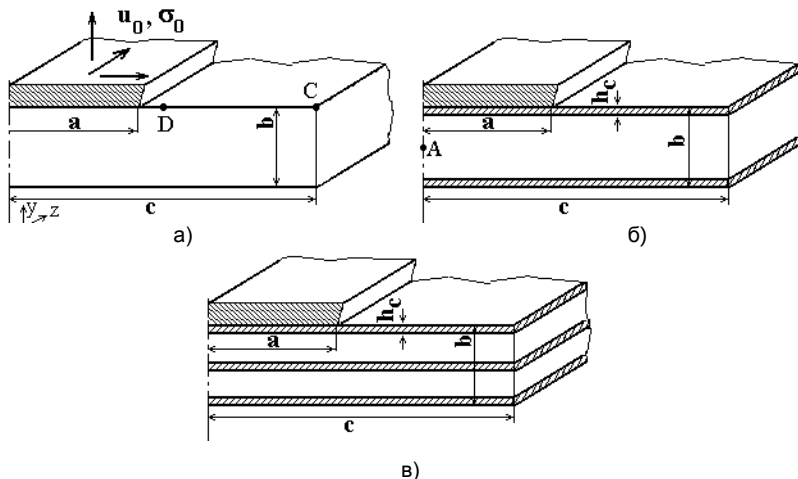


Рис. 1 – Прямоугольная призма, а, б, в – задачи 1, 2, 3

Изучение влияния армирующих слоев на температурное поле виброрагрева производится путем сравнения решений трех задач. В задаче 1

рассматривается однородная призма, состоящая из полимера (рис. 1, а). В задаче 2 призма содержит два слоя меди толщиной h_c , расположенные на верхней и нижней поверхностях $y=0$ и $y=b$ (рис. 1, б). В задаче 3, кроме наружных слоев (задача 2), имеется третий слой меди, расположенный в срединной поверхности призмы $y=b/2$ (рис. 1, в).

Призма располагается на гладком основании. На части верхней грани $y=b$, $|x|\leq a$ действует штамп с прямолинейным торцом, осциллирующий с частотой ω . Во всех трех задачах суммарная толщина слоя одинаковая и равна b . Геометрия призмы, условия нагружения и теплообмена характеризуются параметрами:

$$c = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad b = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad h_c = 10^{-4} \text{ м}, \quad a = 9,55 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad \theta_0 = \theta_c = 20^\circ \text{C},$$

$$f = \omega / 2\pi = 20 \text{ кГц}, \quad \gamma = 30 \text{ Вт/м}^2 \cdot ^\circ\text{C}, \quad \beta = 0,80.$$

Зависимости физико-механических характеристик материала от температуры приведены в [6].

На поверхностях призмы, исключая поверхность нагружения $|x|\leq a, y=b$, принимаются следующие механические и тепловые условия:

$$\tilde{u}_y = 0, \quad \tilde{\sigma}_{xy} = 0, \quad \theta = \theta_c \quad |x|\leq \tilde{n}, \quad y=0;$$

$$\tilde{\sigma}_{yy} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{xy} = 0, \quad -k\theta_{,y} = \gamma(\theta - \theta_{\tilde{n}}) \quad |x|>a, \quad y=b;$$

$$\tilde{\sigma}_{x\delta} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{xy} = 0, \quad -k\theta_{,x} = \gamma(\theta - \theta_{\tilde{n}}) \quad |x|=\tilde{n}, \quad 0 < y < b.$$

Условие кинематического сжатия призмы гладким штампом имеет вид

$$\tilde{u}_y = u_0, \quad \tilde{\sigma}_{xy} = 0.$$

Задача решалась численно на основе неявной шаговой схемы по времени для интегрирования уравнения (1). Задача линеаризовалась путем вычисления физико-механических характеристик материалов для температуры на предыдущем шаге и решалась методом конечных элементов [2].

Результаты расчета. При кинематическом нагружении принималось $u_0 = 22 \text{ мкм}$.

На рис. 2 сплошной и пунктирной линиями показаны временные зависимости максимальной по объему θ_m и максимальной в среднем сечении $x=0$ θ_1 температуры для задачи 2. Конфигурация тела соответствовала рис. 1, б. Штриховая линия отвечает случаю плоского напряженного состояния. Кружками показана температурная зависимость, полученная в результате эксперимента [6]. Отметим хорошее согласование расчетных и экспериментальных температурных кривых для задачи 2, которое свидетельствует об адекватности используемого подхода.

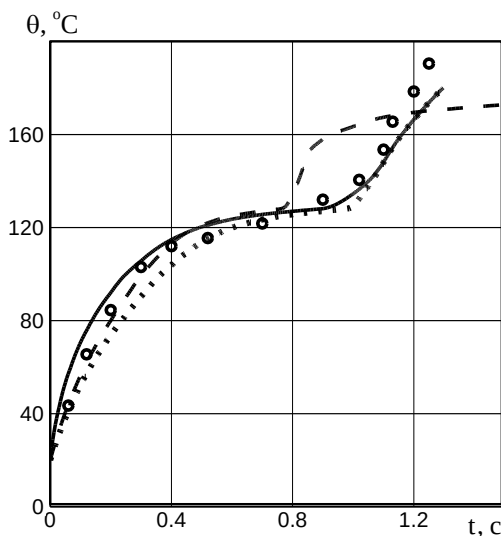


Рис. 2 – Зависимости $\theta(t)$ для задачи 2 при кинематическом нагружении

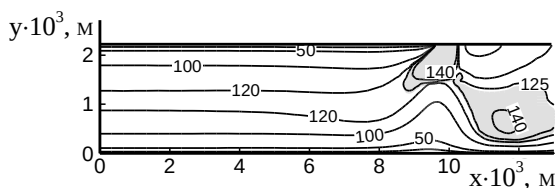
В качестве предельного состояния термического разрушения принимает-ся достижение температурой значения $\theta_{em}=125^{\circ}\text{C}$. Распределение темпе-ратуры для задач 1, 2 и 3 в момент времени $t \approx 0,8 \text{ c}$ показано на рис. 3, а, б, в. Область с температурой, большей $\theta_{em}=125^{\circ}\text{C}$, затенена. Сравнительный анализ показывает, что в задаче 1 тепловое разрушение обусловлено концентрацией контактных напряжений вблизи кромок штампа. В армированной призме разрушение происходит в центральной части по-лимерных слоев.

Для силового сжатия призмы гладким штампом принималось условие

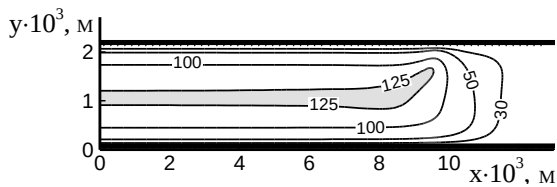
$$\bar{\sigma}_{yy} = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \tilde{\sigma}_{yy}(x,b) dx = \frac{1}{2a} N_0 = \sigma_0, \quad \tilde{\sigma}_{xy} = 0; \quad \tilde{u}_y = \tilde{u}_{0y},$$

где N_0 или $\bar{\sigma}_0$ – заданные параметры силового нагружения; $\tilde{u}_{0y}$ – пере-мещение, отвечающее заданной нагрузке N_0 . Принималось $\sigma_0 = 15 \text{ МПа}$.

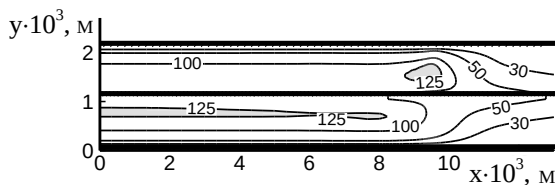
На рис. 4 показаны временные зависимости максимальной температуры для трех задач. В динамической постановке (силовая задача) расчет дает более быстрый разогрев в сравнении с квазистатической постановкой (штриховые линии). Влияние динамичности особенно заметно в однородной призме в результате близости ω к резонансной частоте.



а)



б)



в)

Рис. 3 – Критические распределения температур для задач 1, 2, 3 при кинематическом нагружении

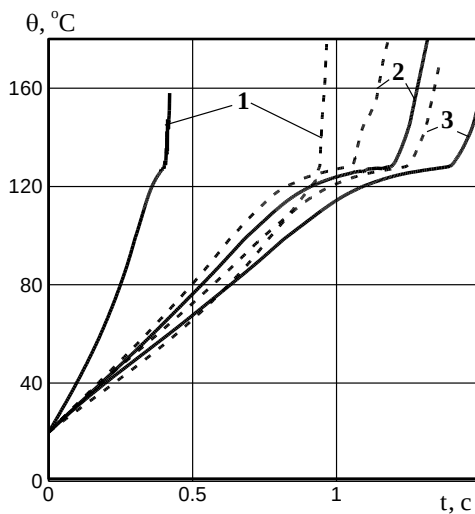


Рис. 4 – Зависимости $\theta(t)$ для задач 1, 2, 3 при силовом нагружении

При силовом нагружении наиболее интересным является эффект тепловой неустойчивости [1, 4]. Этот эффект обусловлен наличием интервалов температур, в которых сдвиговая и объемная податливости потерь полимера возрастают с температурой, а параметр нагружения σ_0 превосходит некоторое критическое значение.

Результаты решения стационарной задачи теплопроводности показаны на рис. 5. Здесь сплошные линии отвечают θ_m – максимальной по объему стационарной температуре, цифрами указаны номера задач. Штриховые линии соответствуют квазистатической постановке задачи ($\rho = 0$). Вертикальные штрих-пунктирные линии отвечают критическим значениям σ_0^* таким, что при $\sigma_0 > \sigma_0^*$ не существует стационарных тепловых состояний, т. е. имеет место лавинообразный (в пределах рассматриваемого температурного интервала) рост температуры.

Анализ данных, представленных на рис. 5, показывает, что чем тоньше полимерные слои, тем выше критические значения амплитуды нагружения. При этом эффекты динамичности весьма заметны. Их роль возрастает, когда частота нагружения ω несколько меньше частоты резонанса.

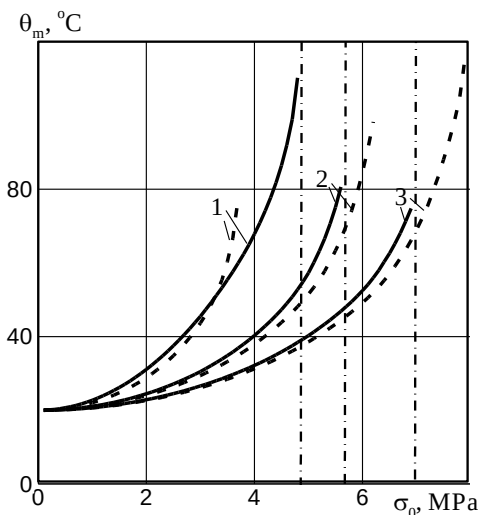


Рис. 5 – Диаграммы $\sigma_0 \sim \theta$, стационарная задача

Изолинии стационарных температурных полей, близких к критическим, для задач 1, 2 и 3 приведены на рис. 6. Для задачи 1 характерно наличие локализации разогрева вне области нагружения. Сопоставление с решением соответствующей квазистатической задачи показывает, что этот эффект является следствием динамичности. В задаче 2 при отсутствии внутреннего слоя максимальный разогрев происходит в области $x/a \approx 0,5-0,7$; $y/b \approx 0,5$. При наличии внутреннего армирующего слоя эта область «рас-

сасывается» за счет высокой теплопроводности меди и максимальный разогрев имеет место в центральных частях полимерных слоев $x \approx 0$ (рис. 5, в). Кривые на рис. 5, в для пятислойной призмы иллюстрируют механизм теплоотвода из области нагружения $|x| > a$ путем теплопроводности по внутреннему металлическому слою.

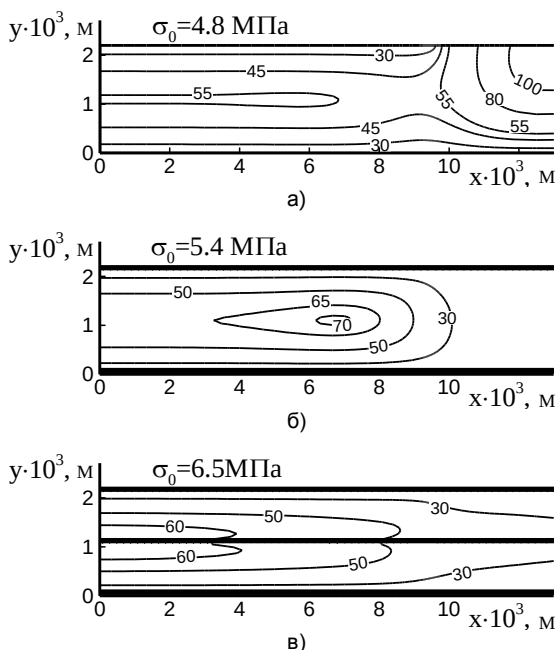


Рис. 6 – Стационарные распределения температуры, близкие к критическим

В случае $\rho = 0$ для задачи 1 характерна локализация виброразогрева в области $x/a \approx 0,5 - 0,7$; $y/b \approx 0,5$. Учет сил инерции существенно усложняет картину виброразогрева вообще, и тепловой неустойчивости в частности. Колебаниям в окрестности резонанса присущи более высокие уровни амплитуд напряжений, деформаций и, следовательно, температуры виброразогрева. Распределения механических полевых величин определяются формой колебаний, отличающейся от квазистатического распределения. В частности, возможны локализованные очаги разогрева вдали от области нагружения, в области пучности напряжений.

Выводы. Для полимерной призмы установлена возможность поверхностного разрушения. В металлополимерной призме разрушение происходит во внутренних полимерных слоях.

Армирование стабилизирует процесс термической неустойчивости и повышает критическое значение параметра нагружения.

При высокочастотном нагружении необходимо учитывать эффекты динамичности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Карнаухов В. Г.** Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении / В. Г. Карнаухов, И. К. Сенченков, Б. П. Гуменюк. – К. : Наук. думка, 1985. – 288 с.
2. **Мотовиловец И. А.** Термоупругость / И. А. Мотовиловец, В. И. Козлов // Механика связанных полей в элементах конструкций. – К. : Наук. думка, 1987. – Т. 1. – 264 с.
3. **Нарисава И.** Прочность полимерных материалов / И. Нарисава. – М. : Химия, 1987. – 400 с.
4. **Потураев В. Н.** Термомеханика эластомерных элементов конструкций при циклическом нагружении / В. Н. Потураев, В. И. Дырда, В. Г. Карнаухов [и др.]; под ред. В. Н. Потураева. – К. : Наук. думка, 1987. – 288 с.
5. **Сенченков И. К.** Вибрационный разогрев полимерного однонаправленного волокнистого композита при гармоническом сжатии поперек волокон / [И. К. Сенченков, В. Н. Кропивный, С. Н. Якименко, Н. Н. Якименко] // Матер. XII конф. ученых Украины, России и Белоруссии «Прикладные задачи математики и механики». – Севастополь, 2003. – С. 24–28.
6. Теплофизические и реологические характеристики полимеров: справочник / Под ред. Ю. С. Липатова. – К. : Наук. думка, 1977. – 244 с.

*О. П. Червінко, канд. фіз.-мат. наук, О. В. Доля, канд. фіз.-мат. наук,
М. С. Якименко, канд. фіз.-мат. наук*

ВТОМНЕ ТЕРМІЧНЕ РУЙНУВАННЯ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ ШАРУВАТОЇ ПРЯМОКУТНОЇ ПРИЗМИ ПРИ ГАРМОНІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

В рамках зв'язаної задачі термов'язкопружності вивчено термічне втомне руйнування шаруватої метало-полімерної призми при гармонічному стиску вібруючим штампом. Задача розв'язується методом скінчених елементів. Для полімерної призми встановлена можливість поверхневого руйнування. За наявності армуючих шарів руйнування відбувається в полімерній матриці.

Ключові слова: в'язкопружна шарувата призма, термічне втомне руйнування, гармонічний стиск.

*O. P. Chervinko, Associate Professor, E. V. Dolya, Associate Professor,
N. S. Yakimenko, Associate Professor*

THERMAL FATIGUE FAILURE OF LAYERED VISCOELASTIC RECTANGULAR PRISM UNDER HARMONIC LOADING

The thermal fatigue failure of rectangular prism under harmonic compression within a coupled problem of thermoviscoelasticity is investigated. The problem is solved by finite element method. For polymeric prism the possibility of surface failure is established, whereas in laminated structure the inner lays of polymer will fail.

Keywords: viscoelastic rectangular prism, thermal fatigue failure, harmonic compression.

The paper is devoted to the study of thermal destruction of rectangular prism, which consists of layers of copper and polyethylene. Prism is loaded by rectangular vibrating stamp in the kinematic or force compression mode with a frequency of 20 kHz.

Thermal fatigue failure is defined as the loss of load-carrying capacity of a thermoplastic material due to softening at vibroheating or reaching the transition viscous-flow temperature θ_{vf} [3]. Coupled problems of thermoviscoelasticity for polymers reviewed in [5].

The simplified statement of coupled problem of thermoviscoelasticity in Cartesian coordinate system for the case of a harmonic loading [1] in the framework of plane strain is given.

Research object is rectangular prism $|x| \leq c, 0 \leq y \leq b$, consisting of a viscoelastic (polymeric) and elastic (metal) layers. The effect of reinforcing layers on the temperature field of vibroheating is studied by comparing solutions of three problems. In problem 1 homogeneous polymeric prism is considered. In problem 2 the prism contains two copper layers by thickness h_c disposed on top and bottom surfaces (fig. 1). In problem 3, except the outer layers, there is a third layer of copper disposed in the medium prism surface.

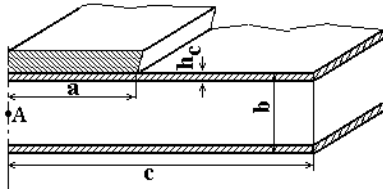


Fig. 1

Prism is located on a smooth base. The oscillating with frequency ω smooth stamp $y = b$, $|x| \leq a$ acts on the upper face of the prism. The initial temperature is $\theta = \theta_0 = 20^\circ\text{C}$.

Temperature dependence of physical and mechanical characteristics of the material is given in [6].

On the loading surface and the contact area with a base a constant temperature $\theta_0 = \theta_c = 20^\circ\text{C}$ is prescribed. The rest of the surface is in convective heat transfer with the heat transfer coefficient γ . The values of the parameters:

$$c = 2.5 \cdot 10^{-2} \text{ m}, \quad b = 2.2 \cdot 10^{-3} \text{ m}, \quad h_c = 10^{-4} \text{ m}, \quad a = 9.55 \cdot 10^{-3} \text{ m}, \quad \gamma = 30 \text{ Wt/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}.$$

Two variants of mechanical boundary conditions are considered.

A. Kinematic compression

$$\tilde{u}_y = u_0, \quad \tilde{\sigma}_{xy} = 0; \quad u_0 = 22 \text{ mkm}.$$

B. Force compression

$$\bar{\sigma}_{yy} = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \tilde{\sigma}_{yy}(x, b) dx = \sigma_0, \quad \tilde{\sigma}_{xy} = 0, \quad \sigma_0 = 15 \text{ MPa}.$$

The problem was solved numerically by finite element method [2].

A. Kinematic loading. Fig. 2 solid line and dotted line show the time dependence of the maximum volume temperature and the maximum temperature in the middle section for problem 2 (fig 1).

The circles show the temperature dependence obtained as the result of the experiment [6]. The experimental and theoretical curves are in good agreement. In problem 1 the thermal destruction occurs due to the concentration of stresses near the contact edges of the stamp. In reinforced prism (problems 2, 3) destruction occurs in the central part of polymeric layers.

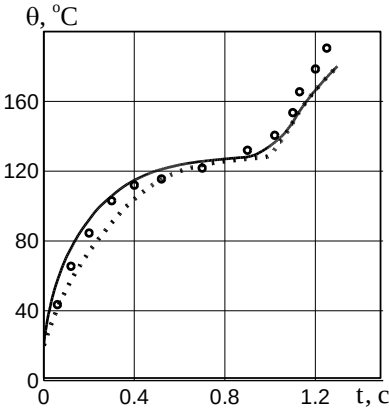


Fig. 2

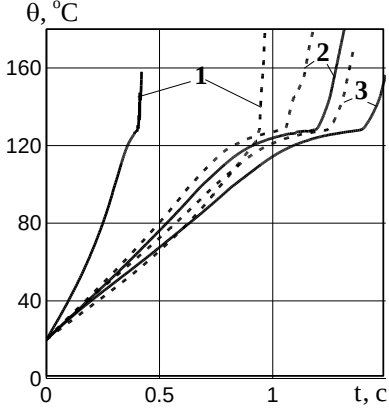


Fig. 3

B. The force loading. Fig. 3 solid lines show the time dependence of the maximum temperature for all three problems. The dynamic formulation gives a rapid heating in comparison with the quasi-static formulation (dashed lines). The influence of dynamics is especially evident in homogeneous prism as a result of the proximity to resonance frequency.

At force loading the most interesting is the effect of thermal instability [1, 4]. This effect is due to the presence of temperature ranges in which shear modulus and bulk loss modulus of the polymer increase with temperature, and load parameter exceeds some critical value.

Results of steady-state heat conduction problem solutions are shown in fig. 4. The solid lines correspond to the maximum stationary temperature, the digits show the numbers of problems. The dashed lines correspond to the quasi-static solution ($\rho = 0$). The vertical dash-dot lines indicate the critical values of loading amplitude above which there are no stationary thermal states, that is, there is an avalanche growth temperature. The thinner polymer layers are, the higher the critical value of the loading amplitude is. The role of dynamic effects increases when loading frequency is slightly less than the resonance frequency (problem 1). The problem 1, due to dynamics, is distinctive of a heating outside the area of loading (fig. 5). In problems 2 and 3 the maximum heating occurs within the area of loading.

Accounting the inertia forces significantly complicates the pictures of vibro-heating and of thermal instability. Distributions of mechanical field quantities differ from quasi-static distributions. In particular, there may be localized heating away from the area of loading.

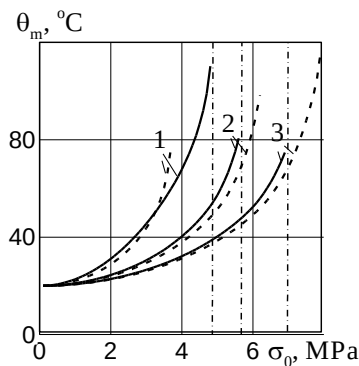


Fig. 4

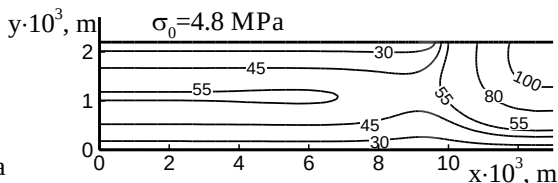


Fig. 5

Conclusions.

1. The surface destruction occurs in polymer prism. Fracture occurs in the inner polymer layers in metal-polymer prism.
2. Reinforcement increases the critical value of the loading, exceeding which thermal instability causes.
3. It is necessary to consider the dynamic effects when high-frequency loading.

REFERENCES

1. **Karnaukhov V. G.** Thermo-mechanical behavior of viscoelastic bodies under harmonic loading / V. G. Karnaukhov, I. K. Senchenkov, B. P. Gumenjuk. – K. : Naukova Dumka, 1985. – 288 p. (in Russian).
2. **Motovilovets I. A.** Thermoelasticity / I. A. Motovilovets, V. I. Kozlov // Mechanics of the related fields in structural elements. – K. : Naukova dumka, 1987. – Vol. 1. – 264 p. (in Russian).
3. **Narisava I.** The strength of polymeric materials / I. Narisava. – M. : Chemistry, 1987. – 400 p. (in Russian).
4. **Poturaev V. N.** Thermomechanics of elastomeric elements of structures under cyclic loading / V. N. Poturaev, V. I. Dyrda, V. G. Karnaukhov, [etc.]; ed. V. N. Poturaev. – K. : Naukova dumka, 1987. – 288 p. (in Russian).
5. **Senchenkov I. K.** Vibrating heating of the polymer unidirectional fiber composite at harmonic compression perpendicular to fiber / [I. K. Senchenkov, V. N. Kropivny, S. N. Yakymenko, N. N. Yakymenko] // Mater. of XII conference of scientists of Ukraine, Russia and Belarus, "Problems of Applied Mathematics and Mechanics", Sevastopol, 2003. – P. 24–28 (in Russian).
6. Thermo-physical and rheological properties of polymers / Ed. Y. S. Lipatov. – K. : Naukova dumka, 1977. – 244 p. (in Russian).

Институт механики
им. С. П. Тимошенко НАН Украины,
Киев, Украина

Поступила в редколлегию 10.02.2013