

УДК 539.3

А. Є. Шевельова, канд. фіз.-мат. наук, К. О. Тулін, В. В. Лобода, д-р фіз.-мат. наук

ПРО КОНТАКТНУ МОДЕЛЬ ДУГОВОЇ ТРІЩИНИ

Розглядається плоска задача про дугову тріщину між круговим включенням та нескінченною матрицею, які мають різні механічні характеристики. Вважається, що на нескінченності діє рівномірне розтягуюче напруження, яке направлене під деяким кутом до центральної осі дугової тріщини. Проблема зводиться до системи сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих функцій, які характеризують розкриття тріщини. Окремо розглядається випадок тріщини в однорідному матеріалі. Графічно проілюстровано розкриття та поведінка нормального і дотичного напружень в околі кожної з вершин дугової тріщини.

Ключові слова: міжфазна тріщина, дугова тріщина, сингулярне інтегральне рівняння.

Вступ. Проблема тріщини між двома матеріалами (міжфазної тріщини) є досить важливою для практики, оскільки такі тріщини є основною причиною руйнування композитних матеріалів. У випадку прямолінійної тріщини ця проблема досліджувалась у піонерських роботах [4, 10–12], де було встановлено фізично нереальне взаємопроникнення берегів міжфазної тріщини. Тому в роботі [8] було запропоновано контактну модель тріщини і встановлено можливість виникнення значних зон контакту берегів при суттєвому зсувному полі. Пізніше ця модель аналітичним способом досліджувалась в роботах [2, 5] та ін.

У випадку дугової тріщини дослідження проблеми виникнення зон контакту берегів тріщини є навіть більш актуальним, оскільки дуже часто великі зони контакту мають місце навіть для однорідного матеріалу. Модель «відкритої» дугової тріщини в однорідному матеріалі досліджувалась в монографії [3], а міжфазної – в роботі [11]. Тут, зокрема, було вказано на некоректність такої моделі для ряду кутів розхилу тріщини та випадків зовнішнього навантаження. Контактна модель дугової тріщини досліджувалась в роботах [6, 7] для однорідного та композитного матеріалів відповідно. Застосовувалась методика зведення проблеми до системи сингулярних інтегральних рівнянь та її чисельного розв'язання.

У даній роботі з використанням методики робіт [3, 7, 11] розглядається проблема дугової тріщини на межі поділу різнорідних матриці та кругового включення. З врахуванням зон можливого контакту берегів тріщини формулюється система сингулярних інтегральних рівнянь, для якої пропонується оригінальний метод її чисельного розв'язання. Побудовані графіки розкриття тріщини для контактної та відкритої моделей і графіки напружень в околі її вершин.

Постановка задачі та основні співвідношення. Розглянемо плоску задачу для тріщини AB з кутом розхилу $2\theta_0$, яка виникла між круговим включенням радіусу a і нескінченною матрицею. Вважаємо, що на нескінченності діє рівномірне розтягуюче напруження інтенсивності T , направлене під кутом ω до центральної осі тріщини. Вважаємо, що механічні характеристики матриці μ_1, κ_1 , а включення – μ_2, κ_2 (рис. 1).

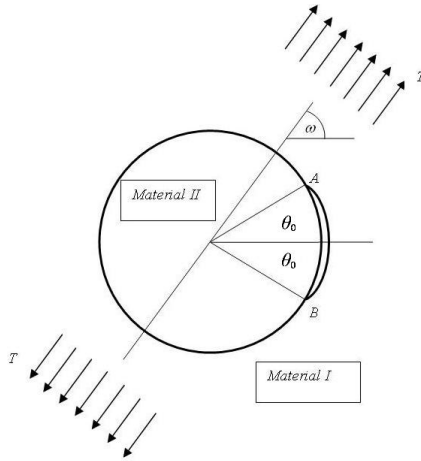


Рис. 1 – Дугова тріщина між пружними матрицею та круговим включенням

Використаємо наступні представлення напружень і переміщень через комплексні потенціали [3]:

$$\sigma_{rr}^{(k)} + i\sigma_{r\theta}^{(k)} = \phi_k'(z) + \bar{\phi}_k'(\bar{z}) - \bar{z}\bar{\phi}_k''(\bar{z}) - \frac{\bar{z}}{z}\bar{\psi}_k'(\bar{z});$$

$$2\mu_k \left(u_1^{(k)} + iu_2^{(k)} \right) = \kappa_k \phi_k(z) - z\bar{\phi}_k'(\bar{z}) - \bar{\psi}_k(\bar{z}),$$

де індекс $k=1$ відноситься до матриці $|z| > a$, яку позначаємо S_+ , а $k=2$ – до включення $|z| < a$ (S_-).

Аналогічно [3] введемо наступну функцію

$$\Omega_k(z) = z\bar{\phi}_k\left(\frac{a^2}{z}\right) + \bar{\psi}_k\left(\frac{a^2}{z}\right) \quad (k=1,2). \quad (1)$$

Тоді вирази для напружень і похідних від переміщень можна записати у вигляді

$$\sigma_{rr}^{(k)} + i\sigma_{r\theta}^{(k)} = \Phi_k(z) + l(z)\bar{\Phi}_k(\bar{z}) - \bar{z}l(z)\bar{\Phi}_k'(\bar{z}) + \frac{a^2}{z\bar{z}}\Theta_k\left(\frac{a^2}{z\bar{z}}\right); \quad (2)$$

$$2\mu_k \frac{\partial}{\partial \theta} \left(u_1^{(k)} + iu_2^{(k)} \right) = i z \left\{ \kappa_k \Phi_k(z) - l(z) \bar{\Phi}_k(\bar{z}) + \bar{z} l(z) \bar{\Phi}'_k(\bar{z}) - \frac{a^2}{z\bar{z}} \Theta_k \left(\frac{a^2}{z\bar{z}} \right) \right\}, \quad (3)$$

$$\text{де } l(z) = 1 - \frac{a^2}{z\bar{z}}; \quad \phi'_k(z) = \Phi_k(z); \quad \Omega'_k(z) = \Theta_k(z). \quad (4)$$

Використовуючи результати [3], на основі формул (1), (4) одержуємо наступні формули для описання поведінки комплексних потенціалів на нескінченності та в околі початку координат:

$$\Phi_1(z) = \Gamma + O\left(\frac{1}{z^2}\right); \quad |z| \rightarrow \infty; \quad \Theta_1(z) = -\frac{\Gamma' a^2}{z^2} + D_0 + O(z); \quad |z| \rightarrow 0; \quad (5)$$

$$\Phi_2(z) = A_0 + O(z); \quad |z| \rightarrow 0; \quad \Theta_2(z) = B_0 + O\left(\frac{1}{z^2}\right); \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (6)$$

$$\text{де } B_0 = \bar{A}_0; \quad \Gamma = \frac{1}{4}T; \quad \Gamma' = -\frac{1}{2}T e^{-2i\omega}. \quad (7)$$

Припускаючи, що напруження на верхньому і нижньому берегах тріщини однакові або ж вони вільні від напружень, бачимо, що $\forall \theta$ напруження $\sigma_{rr}^{(1)} + i\sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)} + i\sigma_{r\theta}^{(2)}$ при $z = t = ae^{i\theta}$. На основі цього з урахуванням (2) одержуємо

$$\Phi_1^+(t) + \Theta_1^-(t) = \Phi_2^-(t) + \Theta_2^+(t), \quad (8)$$

де «+» і «-» означають, що ми наближаємось до дуги $t = ae^{i\theta}$ з зовнішньої (S_+) і внутрішньої (S_-) частин відповідно.

Введемо нову функцію $F(z)$ наступним чином:

$$F(z) = \Phi_1(z) - \Theta_2(z) \text{ для } z \in S_+; \quad (9)$$

$$F(z) = \Phi_2(z) - \Theta_1(z) \text{ для } z \in S_-. \quad (10)$$

Тоді на основі (8) очевидно, що функція $F(z)$ є неперервною при переході через дугу $t = ae^{i\theta}$, тобто вона є аналітичною у всій площині за виключенням, можливо, нескінченності та початку координат.

Вдвох зчепленої частини інтерфейсу $t = ae^{i\theta}$, $\theta \in (\theta_0, -\theta_0)$ похідні від переміщень по дуговій координаті є неперервними, тобто

$$\frac{d}{d\theta} \left(u_1^{(1)} + iu_2^{(1)} \right)^+ = \frac{d}{d\theta} \left(u_2^{(2)} + iu_1^{(2)} \right)^-. \quad (11)$$

З використанням (3) з рівняння (11) витікає

$$\frac{\kappa_1}{\mu_1} \Phi_1^+(t) - \frac{1}{\mu_1} \Theta_1^-(t) = \frac{\kappa_2}{\mu_2} \Phi_2^-(t) - \frac{1}{\mu_2} \Theta_2^+(t) \text{ для } \theta \in (\theta_0, -\theta_0) \quad (12)$$

Введемо нову функцію $G(z)$ по формулам

$$G(z) = \frac{\kappa_1}{\mu_1} \Phi_1(z) + \frac{1}{\mu_2} \Theta_2(z) \text{ для } z \in S_+; \quad (13)$$

$$G(z) = \frac{\kappa_2}{\mu_2} \Phi_2(z) + \frac{1}{\mu_1} \Theta_1(z) \text{ для } z \in S_-. \quad (14)$$

Тоді з (12) витікає, що ця функція є аналітичною у всій площині за виключенням області тріщини та, можливо, нескінченності та початку координат.

З систем рівнянь (9), (13) та (10), (14) одержуємо:

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &= \frac{\mu_1}{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2} \{F(z) + \mu_2 G(z)\}; \\ \Theta_1(z) &= \frac{\mu_1}{\mu_2 + \kappa_2 \mu_1} \{-\kappa_2 F(z) + \mu_2 G(z)\}; \\ \Phi_2(z) &= \frac{\mu_2}{\mu_2 + \kappa_2 \mu_1} \{F(z) + \mu_2 G(z)\}; \\ \Theta_2(z) &= \frac{\mu_2}{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2} \{-\kappa_1 F(z) + \mu_1 G(z)\}. \end{aligned} \quad (15)$$

З останніх рівнянь та асимптотичних формул (5), (6) витікають такі представлення для асимптотичної поведінки функцій $F(z)$ і $G(z)$ на нескінченності та в околі початку координат:

$$F(z) = \Gamma - B_0 + O\left(\frac{1}{z^2}\right); \quad G(z) = \frac{\kappa_1}{\mu_1} \Gamma + \frac{1}{\mu_2} B_0 + O\left(\frac{1}{z^2}\right); \quad |z| \rightarrow \infty; \quad (16)$$

$$F(z) = A_0 - D_0 + \frac{\bar{\Gamma}' a^2}{z^2} + O(z);$$

$$G(z) = -\frac{1}{\mu_1} \frac{\bar{\Gamma}' a^2}{z^2} + \frac{\kappa_2}{\mu_2} A_0 + \frac{1}{\mu_1} D_0 + O(z); \quad |z| \rightarrow 0. \quad (17)$$

З перших формул (16) та (17) витікає, що $F(z)$ для будь-якого z може бути представлена у вигляді

$$F(z) = f_0 + \frac{f_2}{z^2}, \quad (18a)$$

$$\text{де } f_0 = \Gamma - B_0 = A_0 - D_0, \quad f_2 = \bar{\Gamma}' a^2. \quad (18b)$$

Враховуючи, що на основі (2)

$$\sigma_{rr}^{(1)}(t) + i\sigma_{r\theta}^{(1)}(t) = \Phi_1^+(t) + \Theta_1^-(t)$$

і підставляючи в останнє рівняння перші два вирази (15), одержуємо

$$\sigma_{rr}^{(1)}(t) + i\sigma_{r\theta}^{(1)}(t) = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2} \left\{ G^+(t) + \rho G^-(t) + \delta F(t) \right\}, \quad (19)$$

$$\text{де } \rho = \frac{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2}{\mu_2 + \kappa_2 \mu_1}; \quad \delta = \frac{1 - \kappa_1 \kappa_2}{\mu_2 + \kappa_2 \mu_1}.$$

На основі останнього виразу можна легко сформулювати задачу лінійного спряження Гільберта–Рімана відносно функції $G(z)$, яка була вперше сформульована і розв'язана в роботі Інґленда [11]. Розв'язок цієї задачі буде фізично коректним, якщо тріщина залишається відкритою. Але для міжфазної тріщини завжди мають місце принаймні мікрозони контакту. У випадку ж дугової тріщини як правило виникають і макрозони контакту. Тому в подальшому головну увагу зосередимо на врахуванні зон контакту для тріщини, що розглядається. До речі, зазначимо, що функції $F(z)$ і $G(z)$ зв'язані з функціями $\theta'(z)$ і $\psi'(z)$ роботи [11] формулами:

$$F(z) = 2\left(1 + \frac{K}{\mu_1}\right)\theta'(z); \quad G(z) = \frac{2}{\mu_1 \mu_2}\psi'(z); \quad K = -\mu_1 \frac{1 - \rho \kappa_2}{1 + \rho}.$$

Побудова сингулярного інтегрального рівняння (СІР). Введемо функції, що характеризують розкриття тріщини

$$D(t) = d(\theta) = \left(u_1^{(1)} + iu_2^{(1)}\right)^+ - \left(u_1^{(2)} + iu_2^{(2)}\right)^-; \quad t = ae^{i\theta}; \quad |\theta| < \theta_0.$$

При цьому очевидно, що $d'(\theta) = it D'(t)$, де штрих означає диференціювання по аргументу. Запишемо $d'(\theta)$ також у вигляді:

$$d'(\theta) = b_x(\theta) + ib_y(\theta) = e^{i\theta} \{b_r(\theta) + ib_\theta(\theta)\}; \quad |\theta| < \theta_0, \quad (20)$$

$$\text{де } b_x = \frac{d}{d\theta}(u_1^+ - u_1^-); \quad b_y = \frac{d}{d\theta}(u_2^+ - u_2^-). \quad (21)$$

Умова однозначності переміщень при обході контуру тріщини має вигляд

$$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} d'(\theta) d\theta = 0 \quad \text{або} \quad \int_{t_1}^{t_2} D'(t) dt = 0, \quad (22)$$

де $t_1 = ae^{-i\theta_0}$, $t_2 = ae^{i\theta_0}$.

Визначимо тепер $D'(t)$ через функцію $G(z)$. З рівнянь (3) одержуємо:

$$\begin{aligned} 2\mu_1 \frac{d}{d\theta} \left(u_1^{(1)} + iu_2^{(1)} \right)^+ &= it \left\{ \kappa_1 \Phi_1^+(t) - \Theta_1^-(t) \right\}; \\ 2\mu_2 \frac{d}{d\theta} \left(u_1^{(2)} + iu_2^{(2)} \right)^- &= it \left\{ \kappa_2 \Phi_2^-(t) - \Theta_2^+(t) \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Враховуючи далі, що

$$D'(t) = \frac{1}{it} d'(\theta) = \frac{1}{it} \left\{ \frac{d}{d\theta} \left(u_1^{(1)} + iu_2^{(1)} \right)^+ - \frac{d}{d\theta} \left(u_1^{(2)} + iu_2^{(2)} \right)^- \right\},$$

і використовуючи останні вирази, одержуємо

$$2D'(t) = G^+(t) - G^-(t); \quad |\theta| < \theta_0. \quad (24)$$

Приймаючи до уваги, що $G(z)$ є аналітичною у всій комплексній площині за виключенням області тріщини та, можливо, нескінченності і початку координат, і враховуючи формули (23), з рівняння (24) на основі [3] одержуємо

$$G(z) = -\frac{1}{\pi i} \int_{t_1}^{t_2} \frac{D'(t)}{t-z} dt + E_0 + \frac{E_2}{z^2}, \quad (25)$$

де E_0 і E_2 згідно другій формулі (17) визначаються наступними рівняннями:

$$E_0 - \frac{1}{\pi i} \int_{t_1}^{t_2} \frac{D'(t)}{t} dt = \frac{\kappa_2}{\mu_2} A_0 + \frac{1}{\mu_1} D_0; \quad E_2 = -\frac{1}{\mu_1} \bar{\Gamma}' a^2. \quad (26)$$

В той же час з другої формули (16) маємо

$$E_0 = \frac{\kappa_1}{\mu_1} \Gamma + \frac{1}{\mu_2} B_0. \quad (27)$$

Розглядаючи перші рівняння (7) і (18б) разом з (26) і (27) і враховуючи,

$$\text{що } \int_{t_1}^{t_2} \frac{D'(t)}{t} dt = \frac{1}{a} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \{b_r(\theta) + ib_\theta(\theta)\} d\theta, \text{ одержуємо:}$$

$$A_0 = \bar{B}_0 = \frac{(\kappa_1 + 1)\mu_2}{2\mu_2 + (\kappa_2 - 1)\mu_1} \Gamma - \frac{\mu_1\mu_2}{\pi a \{2\mu_2 + (\kappa_2 - 1)\mu_1\}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} b_\theta(\theta) d\theta + \\ + \frac{i\mu_2}{\pi a (\kappa_2 + 1)} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} b_r(\theta) d\theta;$$

$$D_0 = \frac{2\kappa_1\mu_2 - (\kappa_2 - 1)\mu_1}{2\mu_2 + (\kappa_2 - 1)\mu_1} - \frac{2\mu_1\mu_2}{\pi a \{2\mu_2 + (\kappa_2 - 1)\mu_1\}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} b_\theta(\theta) d\theta;$$

$$E_0 = \frac{2\kappa_1\mu_2 + \kappa_1\kappa_2\mu_1 + \mu_1}{\mu_1 \{2\mu_2 + (\kappa_2 - 1)\mu_1\}} \Gamma - \frac{\mu_1}{\pi a \{2\mu_2 + (\kappa_2 - 1)\mu_1\}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} b_\theta(\theta) d\theta - \\ - \frac{i}{\pi a (\kappa_2 + 1)} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} b_r(\theta) d\theta;$$

$$f_0 = \frac{(\mu_2 + \kappa_2\mu_1)(1 - \rho)}{2\mu_2 + (\kappa_2 - 1)\mu_1} \Gamma + \frac{\mu_1\mu_2}{\pi a \{2\mu_2 + (\kappa_2 - 1)\mu_1\}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} b_\theta(\theta) d\theta - \\ - \frac{i\mu_2}{\pi a (\kappa_2 + 1)} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} b_r(\theta) d\theta.$$

Застосовуючи тепер формулу Племеля [3] до рівняння (25), одержуємо

$$G^+(t) + \rho G^-(t) = (1 - \rho) D'(t) - \frac{1 + \rho}{\pi i} \int_{t_1}^{t_2} \frac{D'(\gamma)}{\gamma - t} d\gamma + \\ (1 + \rho) \left\{ E_0 + \frac{E_2}{t^2} \right\}; |\theta| < \theta_0, \quad (28)$$

де $\gamma = ae^{i\varphi}$, $|\varphi| < \theta_0$.

Припустимо тепер, що на протилежних берегах тріщини мають місце однакові напруження $\sigma_{rr}^\pm(a, \theta) = N(\theta)$ і $\sigma_{r\theta}^\pm(a, \theta) = S(\theta)$. Вони можуть або бути задані як зовнішні навантаження, або ж виникнути в результаті

контакту берегів тріщини. Тоді, задовольняючи за допомогою (19) граничним умовам на берегах тріщини, маємо

$$G^+(t) + \rho G^-(t) + \delta F(t) = \frac{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2}{\mu_1 \mu_2} (N(\theta) + iS(\theta)); \quad |\theta| < \theta_0. \quad (29)$$

Порівнюючи тепер вирази для $G^+(t) + \rho G^-(t)$ в співвідношеннях (28) і (29), одержуємо

$$\begin{aligned} (1-\rho)D'(t) - \frac{1+\rho}{\pi i} \int_{t_1}^{t_2} \frac{D'(\gamma)}{\gamma-t} d\gamma + (1+\rho) \left\{ E_0 + \frac{E_2}{t^2} \right\} = \\ = -\delta F(t) + \frac{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2}{\mu_1 \mu_2} (N(\theta) + iS(\theta)) \end{aligned} \quad (30)$$

Враховуючи, що

$$\begin{aligned} D'(t) = -\frac{1}{a} \{ ib_r(\theta) - b_\theta(\theta) \}; \\ -\frac{1}{\pi i} \int_{t_1}^{t_2} \frac{D'(\gamma)}{\gamma-t} d\gamma = \frac{1}{2\pi a} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \left\{ \operatorname{ctg} \left(\frac{\varphi-\theta}{2} \right) + i \right\} \{ b_r(\varphi) + ib_\theta(\varphi) \} d\varphi, \end{aligned} \quad (31)$$

з рівняння (30) отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{c}{2\pi a} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \left\{ \operatorname{ctg} \left(\frac{\varphi-\theta}{2} \right) + i \right\} \{ b_r(\varphi) + ib_\theta(\varphi) \} d\varphi - \frac{c\beta}{a} \{ b_\theta(\theta) - ib_r(\theta) \} = \\ = N(\theta) + iS(\theta) - \frac{2(1+\alpha)}{1+\alpha-2\beta} \Gamma + \frac{1+\alpha}{1+\beta} \bar{\Gamma}' e^{-2i\theta} + n_1 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} b_\theta(\varphi) d\varphi + \\ + in_2 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} b_r(\varphi) d\varphi, \end{aligned} \quad (32)$$

де $|\theta| < \theta_0$; $n_1 = \frac{c(1-\alpha)(1+\beta)}{2\pi a(1+\alpha-2\beta)}$; $n_2 = \frac{ic(1+\beta)}{2\pi a}$; $c = \frac{\mu_1 \mu_2 (1+\rho)}{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2}$; $\beta = \frac{\rho-1}{\rho+1}$,

причому α і β є параметри Дундурса [9].

Комплексне рівняння (32) являє собою систему двох сингулярних інтегральних рівнянь відносно $b_r(\varphi)$ і $b_\theta(\varphi)$. Крім того, невідомими для

$\theta \in \Omega_k$ є також $N(\theta)$ і $S(\theta)$, де Ω_k – множина точок контакту берегів тріщини.

Враховуючи, що на основі (20), (21)

$$b_r = \frac{d}{d\theta}(u_r^+ - u_r^-) - (u_\theta^+ - u_\theta^-); b_\theta = \frac{d}{d\theta}(u_\theta^+ - u_\theta^-) + (u_r^+ - u_r^-),$$

а значить [1]

$$\left(\frac{d^2 u_r}{d\theta^2} + u_r \right)^+ - \left(\frac{d^2 u_r}{d\theta^2} + u_r \right)^- = b_\theta + \frac{db_r}{d\theta},$$

то очевидно, що фізично коректний розв'язок рівняння (32) буде мати місце при додаткових умовах

$$\sigma_{rr} \leq 0, \quad b_\theta(\theta) + \frac{db_r(\theta)}{d\theta} = 0 \quad \text{для } \theta \in \Omega_k. \quad (33)$$

На основі (22) та (20) умови однозначності переміщень при обході контуру тріщини можна записати у вигляді

$$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \{b_r(\theta) \cos \theta - b_\theta(\theta) \sin \theta\} d\theta = 0; \quad (34)$$

$$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \{b_r(\theta) \sin \theta + b_\theta(\theta) \cos \theta\} d\theta = 0. \quad (35)$$

Визначимо тепер напруження на лінії поділу матеріалів поза тріщиною. В цьому випадку формула (19) приймає вигляд

$$\sigma_{rr}^{(1)}(t) + i\sigma_{r\theta}^{(1)}(t) = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2} \{(1 + \rho)G(t) + \delta F(t)\} \quad \text{для } \theta \notin (-\theta_0, \theta_0).$$

Враховуючи тепер представлення (25) для $G(t)$ та формулу (31), одержуємо

$$\sigma_{rr}^{(1)}(t) + i\sigma_{r\theta}^{(1)}(t) = \frac{c}{2\pi a} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \left\{ \operatorname{ctg} \left(\frac{\varphi - \theta}{2} \right) + i \right\} \{b_r(\varphi) + ib_\theta(\varphi)\} d\varphi + \frac{2(1 + \alpha)}{1 + \alpha - 2\beta} \Gamma -$$

$$- \frac{1 + \alpha}{1 + \beta} \bar{\Gamma}' e^{-2i\theta} - n_1 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} b_\theta(\varphi) d\varphi - in_2 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} b_r(\varphi) d\varphi \quad \text{для } \theta \notin (-\theta_0, \theta_0). \quad (36)$$

Розкриття тріщини характеризується наступними стрибками переміщень:

$$\Delta_x = u_1^+ - u_1^-, \Delta_y = u_2^+ - u_2^-, \Delta_r = u_r^+ - u_r^-, \Delta_\theta = u_\theta^+ - u_\theta^-.$$

При цьому справедливі співвідношення

$$\Delta_r(\theta) + i\Delta_\theta(\theta) = e^{-i\theta} [\Delta_x(\theta) + i\Delta_y(\theta)]; \quad (37)$$

$$b_r(\theta) + ib_\theta(\theta) = e^{-i\theta} [b_x(\theta) + ib_y(\theta)];$$

$$\text{де } \frac{d\Delta_x(\theta)}{d\theta} = b_x(\theta), \frac{d\Delta_y(\theta)}{d\theta} = b_y(\theta). \quad (38)$$

Тоді, інтегруючи рівняння (38) і підставляючи в перше рівняння (37), одержуємо наступний вираз для розкриття тріщини в полярних координатах через невідомі функції системи (32):

$$\Delta_r(\theta) + i\Delta_\theta(\theta) = \int_{-\theta_0}^{\theta} e^{i(\varphi-\theta)} \{b_r(\varphi) + ib_\theta(\varphi)\} d\varphi; \quad \theta \in (-\theta_0, \theta_0). \quad (39)$$

Тріщина в однорідному матеріалі. Розглянемо частковий випадок поставленої задачі, коли матеріали матриці S_+ та включення S_- однакові. У цьому

випадку $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$, $\alpha = \beta = 0$, $c = \frac{2\mu}{1+\kappa}$. Припустимо також,

що тертя між берегами тріщини в зоні контакту відсутнє. Тоді рівняння (32) після відокремлення дійсної та уявної частини приймає вигляд наступної системи рівнянь:

$$\frac{c}{2\pi a} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi-\theta}{2}\right) b_r(\varphi) d\varphi = N(\theta) + \frac{c}{\pi a} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} b_\theta(\varphi) d\varphi - \frac{1}{2} T \{1 + \cos 2(\omega - \theta)\}; \quad |\theta| < \theta_0; \quad (40)$$

$$\frac{c}{2\pi a} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi-\theta}{2}\right) b_\theta(\varphi) d\varphi = -\frac{1}{2} T \sin 2(\omega - \theta).$$

Цю систему як і у випадку неоднорідного матеріалу треба розв'язувати при умовах однозначності переміщень (34), (35) та додаткових умовах в області контакту (33). Напруження поза тріщиною на основі формули (36) можна записати у вигляді

$$\sigma_{rr}(t) = \frac{c}{2\pi a} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi-\theta}{2}\right) b_r(\varphi) d\varphi - \frac{c}{\pi a} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} b_\theta(\varphi) d\varphi + \frac{1}{2} T \{1 + \cos 2(\omega - \theta)\};$$

$$\sigma_{r\varphi}(t) = \frac{c}{2\pi a} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} ctg \left(\frac{\varphi - \theta}{2} \right) b_{\theta}(\varphi) d\varphi + \frac{1}{2} T \sin 2(\omega - \theta); \theta \notin (-\theta_0, \theta_0). \quad (41)$$

Для чисельного розв'язання системи (40) введемо наступну заміну координат:

$$\zeta = tg \frac{\theta}{2} / tg \frac{\theta_0}{2}; \quad \xi = tg \frac{\varphi}{2} / tg \frac{\theta_0}{2}. \quad (42)$$

Тоді рівняння (40) приймають вигляд:

$$\int_{-1}^1 \frac{B_1(\xi)}{\xi - \zeta} d\xi = \eta^2 \int_{-1}^1 \frac{\xi B_1(\xi)}{g(\xi)} d\xi + 2\eta \int_{-1}^1 \frac{B_2(\xi)}{g(\xi)} d\xi + R_1(\zeta) + \hat{N}(\zeta);$$

$$\int_{-1}^1 \frac{B_2(\xi)}{\xi - \zeta} d\xi = \eta^2 \int_{-1}^1 \frac{\xi B_2(\xi)}{g(\xi)} d\xi + R_2(\zeta);$$

$$\zeta = \in (-1, 1), \quad (43)$$

де

$$R_1(\zeta) = -\frac{T}{2} [1 + \cos 2(\omega - 2 \arctg(\eta \zeta))]; \quad R_2(\zeta) = -\frac{T}{2} \sin [2(\omega - 2 \arctg(\eta \zeta))];$$

$$g(\xi) = 1 + \eta^2 \xi^2; \quad \eta = tg \frac{\theta_0}{2}; \quad b_r(\theta) = \frac{a}{\tilde{c}} B_1(\xi); \quad b_{\theta}(\theta) = \frac{a}{\tilde{c}} B_2(\xi); \quad \hat{N}(\xi) = N(\theta); \quad \tilde{c} = \frac{c}{\pi}.$$

Умови ж однозначності переміщень при обході контуру тріщини (34), (35) записуються так:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{g^2(\xi)} \left\{ (1 - \eta^2 \xi^2) B_1(\xi) - 2\eta \xi B_2(\xi) \right\} d\xi = 0;$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{g^2(\xi)} \left\{ 2\eta \xi B_1(\xi) + (1 - \eta^2 \xi^2) B_2(\xi) \right\} d\xi = 0. \quad (44)$$

Друга додаткова умова (33) в нових змінних приймає вигляд

$$B_2(\zeta) + \frac{g(\xi)}{2\eta} \frac{dB_1(\zeta)}{d\zeta} = 0, \quad \zeta \in \Omega_k^*,$$

де Ω_k^* – область, в яку відображається множина точок контакту Ω_k в результаті перетворення (42).

Остання умова не є досить зручною. Замість неї зручніше використати умову рівності нулю відкриття тріщини в зоні контакту

$$\Delta_r(\theta) = \int_{-\theta_0}^{\theta} \{b_r(\varphi) \cos(\varphi - \theta) - b_\theta(\varphi) \sin(\varphi - \theta)\} d\varphi = 0 \text{ для } \theta \in \Omega_k, \quad (45)$$

яка витікає з представлення (39). Переходячи у цьому представленні до нових координат за допомогою замін (42), умову (45) представимо у вигляді

$$\int_{-1}^{\zeta} \frac{2\eta}{g(\xi)} \{B_1(\xi) \cos[\psi(\xi, \zeta)] - B_2(\xi) \sin[\psi(\xi, \zeta)]\} d\xi = 0; \quad \zeta \in \Omega_k^*, \quad (46)$$

де $\psi(\xi, \zeta) = 2\arctg(\eta\xi) - 2\arctg(\eta\zeta)$.

Для розв'язання системи (43), (44), (46) представимо невідомі функції у вигляді

$$B_1(t) = \frac{B_1^*(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad B_2(t) = \frac{B_2^*(t)}{\sqrt{1-t^2}}. \quad (47)$$

Підставляючи ці представлення в рівняння (43), розглядаючи їх в точках $\zeta_i = \cos\left(\frac{i\pi}{n}\right)$ і застосовуючи квадратурні формули Гауса–Чебишева по вузлам

$\xi_j = \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2n}\right)$, отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^n \frac{B_1^*(\xi_j)}{\xi_j - \zeta_i} - \frac{\pi\eta^2}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\xi_j B_1^*(\xi_j)}{g(\xi_j)} - \frac{2\pi\eta}{n} \sum_{j=1}^n \frac{B_2^*(\xi_j)}{g(\xi_j)} - \hat{N}(\zeta_i) &= R_1(\zeta_i); \\ \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^n \frac{B_2^*(\xi_j)}{\xi_j - \zeta_i} - \frac{\pi\eta^2}{n} \sum_{j=1}^n \frac{t_j B_2^*(\xi_j)}{g(\xi_j)} &= R_2(\zeta_i); \quad i=1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (48)$$

Підставляючи (47) в (44) і застосовуючи квадратурні формули Гауса–Чебишева, одержуємо:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{1}{g^2(\xi_j)} \left\{ (1 - \eta^2 \xi_j^2) B_1^*(\xi_j) - 2\eta \xi_j B_2^*(\xi_j) \right\} &= 0; \\ \sum_{j=1}^n \frac{1}{g^2(\xi_j)} \left\{ 2\eta \xi_j B_1^*(\xi_j) + (1 - \eta^2 \xi_j^2) B_2^*(\xi_j) \right\} &= 0. \end{aligned} \quad (49)$$

В рівняннях (48) $\hat{N}(\zeta_i)$ – це невідомі напруження. У відкритій частині тріщини вони рівні 0, а в області контакту Ω_k^* їх треба визначати. Для цього використаємо рівняння (46). Припустимо, що область контакту Ω_k^* являє собою проміжок $(-1, d)$, причому величина $-1 < d < 1$ є невідомою. Розіб'ємо проміжок $(-1, d)$, на m рівних частинок точками $\vartheta_l = -1 + l(1+d)/m$ ($l=1, 2, \dots, m$). Підставляючи далі (47) в (46) і розглядаючи одержане рівняння в точках колокації ϑ_l , маємо

$$\int_{-1}^{\vartheta_l} \left\{ \frac{H_{1l}(\xi) B_1^*(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{H_{2l}(\xi) B_2^*(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \right\} d\xi = 0; \quad l=1, \dots, m, \quad (50)$$

$$\text{де } H_{1l}(\xi) = \frac{2\eta}{1+\eta^2\xi^2} \cos[\psi(\xi, \vartheta_l)]; \quad H_{2l}(\xi) = \frac{2\eta}{1+\eta^2\xi^2} \sin[\psi(\xi, \vartheta_l)].$$

Для обчислення інтегралів (50) розглянемо методику обчислення

$$I = \int_{-1}^{\vartheta} \frac{f(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi, \quad (51)$$

де $\vartheta \in (-1, d)$, а значення $f(\xi)$ відомі в точках ξ_j ($j=1, 2, \dots, n$).

Представимо $f(\xi)$ у вигляді інтерполяційного полінома Лагранжа

$$L_J(\xi) = \sum_{j=1}^J f(\xi_j) Q_j(\xi); \quad Q_j(\xi) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^J \frac{\xi - \xi_k}{\xi_j - \xi_k},$$

де $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_J$ – вузли, що належать проміжку $(-1, d)$.

Підставимо далі $L_J(\xi) = \sum_{j=1}^J f(\xi_j) Q_j(\xi)$ в (51) замість $f(\xi)$, перейдемо

до проміжку $(-1, 1)$ за допомогою заміни $\xi = \frac{\vartheta-1}{2} + \frac{\vartheta+1}{2} s$ і помножимо чисельник і знаменник підінтегральної функції на $\sqrt{1-s^2}$. В результаті отримуємо

$$I = \int_{-1}^1 \frac{F(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds; \quad F(s) = \sqrt{\frac{\vartheta+1}{2}} L_J(\xi) \sqrt{\frac{2(1-s)}{3-\vartheta-(\vartheta+1)s}}.$$

Застосовуючи далі квадратурну формулу Гауса–Чебишева і змінюючи порядок підсумовування, отримуємо

$$I \approx \sum_{j=1}^J f(\xi_j) Y_j, \quad (52)$$

$$\text{де } Y_j = \frac{\pi}{N} \sqrt{\frac{g+1}{2}} \sum_{i=1}^N Q_J \left(\frac{g-1}{2} + \frac{g+1}{2} s_i \right) \sqrt{\frac{2(1-s_i)}{3-g-(g+1)s_i}}; \quad s_i = \cos \left(\frac{2i-1}{2N} \pi \right).$$

Застосовуючи тепер для обчислення інтегралів в (50) формулу (52), одержуємо:

$$\sum_{j=1}^J \left\{ H_{1l}(\xi_j) B_1^*(\xi_j) - H_{2l}(\xi_j) B_2^*(\xi_j) \right\} Y_{jl} = 0,$$

$$\text{де } Y_{jl} = \frac{\pi}{N} \sqrt{\frac{g_l+1}{2}} \sum_{i=1}^N Q_J \left(\frac{g_l-1}{2} + \frac{g_l+1}{2} s_i \right) \sqrt{\frac{2(1-s_i)}{3-g_l-(g_l+1)s_i}} \quad (l=1, 2, \dots, m).$$

В результаті розв'язання системи $2n+m$ рівнянь (48)–(50) знаходяться невідомі $B_1^*(\xi_j)$, $B_2^*(\xi_j)$, $\hat{N}(x_i)$ ($j=1, 2, \dots, n$; $i=1, 2, \dots, m$). Після цього напруження поза тріщиною знаходяться по формулам (41), а відкриття тріщини – по формулі (39). Після дискретизації ці формули приймають вигляд:

$$\sigma_{rr}(t) = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^n \frac{B_1^*(\xi_j)}{\xi_j - \zeta} - \frac{\pi \eta^2}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\xi_j B_1^*(\xi_j)}{g(\xi_j)} - \frac{2\pi \eta}{n} \sum_{j=1}^n \frac{B_2^*(\xi_j)}{g(\xi_j)} - R_1(\zeta);$$

$$\sigma_{r\theta}(t) = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^n \frac{B_2^*(\xi_j)}{\xi_j - \zeta} - \frac{\pi \eta^2}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\xi_j B_2^*(\xi_j)}{g(\xi_j)} - R_2(\zeta),$$

$$\text{де } \zeta = \eta^{-1} t g \frac{\theta}{2} \notin (-1, 1), \quad t = a e^{i\theta}.$$

Слід відзначити, що для випадку моделі «відкритої» тріщини розрахункова система рівнянь буде складатись з рівнянь (48), в яких треба вибрати $\hat{N}(\zeta_i) = 0$, та (49).

Чисельні результати та їх аналіз. Розглядаємо тріщину радіуса $a=1$ м з кутом розхилу $2\theta_0 = 2\pi/3$ в однорідному матеріалі з характеристиками $\mu = 2 \times 10^{11}$ Па, $\kappa = 1,8$ під дією розтягуючого напруження інтенсивності $T = 10^6$ Па. Для кожного кута нахилу зовнішнього навантаження ω слід знаходити таку зону контакту Ω_k , при якій виконуються співвідношення (33).

Це здійснюється шляхом розв'язання системи рівнянь (48)–(50) методом послідовних наближень при різних Ω_k .

У даному конкретному випадку реалізувалась обернена процедура, а саме, вибиралось $d = -0,692954$ і шляхом послідовного розв'язання системи рівнянь (48)–(50) підбирався такий кут нахилу зовнішнього навантаження ω , при якому виконувались перша нерівність (33) та рівняння (45). Конкретним критерієм слугувало таке значення ω , при якому змінювався знак $\dot{N}(\zeta_m)$ розв'язку рівнянь (48). В результаті реалізації вказаного алгоритму виявилось, що шукане значення $\omega = 0,77917$.

На рис. 2 для заданого d і знайденого ω суцільною лінією наведено графік розкриття тріщини $\Delta_r(\theta) = u_r^+(\theta) - u_r^-(\theta)$ на проміжку $(-\theta_0, \theta_0)$. Для порівняння пунктирною лінією показано аналогічний графік для випадку моделі

«відкритої» тріщини. Видно, що зона взаємоперетину берегів тріщини є трохи більшою, ніж реальна довжина зони контакту, а графіки розкриття тріщини поза зоною контакту є досить близькими. Відповідні графіки напружень для $\theta \notin (-\theta_0, \theta_0)$ наведені на рис. 3 (окол верхньої вершини) і рис. 4, 5

(нижньої). Криві *I* відповідають напруженням $\tilde{\sigma}_{rr}(t) = 10^{-6} \sigma_{rr}(t)$, *II* – напруженням $\tilde{\sigma}_{r\theta}(t) = 10^{-6} \sigma_{r\theta}(t)$. Як і слід було чекати, в околі нижньої вершини, де має місце значна зона контакту, нормальні радіальні напруження є стискальними і найбільш небезпечними є зсувні напруження. В околі ж верхньої (відкритої) вершини тріщини виникають найбільші за модулем нормальні радіальні напруження.

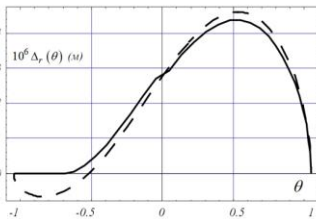


Рис. 2 – Стрибок радіальних переміщень берегів тріщини

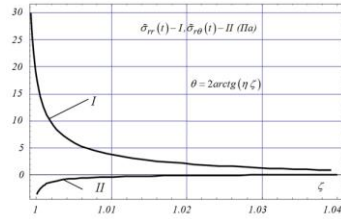


Рис. 3 – Зміна нормального та дотичного напружень в околі верхньої вершини тріщини

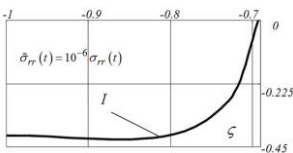


Рис. 4 – Зміна нормального напруження в зоні контакту берегів тріщини

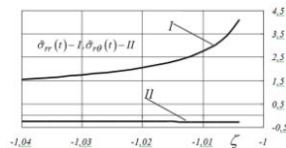


Рис. 5 – Нормальне та дотичне напруження на продовженні тріщини в околі її нижньої вершини

Висновки. Проведено дослідження дугової тріщини, яка розташована між круговим включенням та нескінченною матрицею з різними механічними властивостями. На нескінченності під певним кутом до центральної осі тріщини діє рівномірне розтягуюче навантаження. Використовуючи представлення напружень і переміщень через комплексні потенціали, одержано вираз для напружень на інтерфейсі через аналітичну і кусково-аналітичну функції (19). На основі цих виразів сформульована нелінійна система сингулярних рівнянь (32) з відповідними додатковими умовами відносно функцій, які характеризують розкриття тріщини. Для часткового випадку однорідного матеріалу ця система розв'язувалась чисельно з використанням процедури послідовних наближень та квадратурної формули Гауса-Чебишева. Визначено довжину зони контакту берегів тріщини, її розкриття, а також нормальні радіальні та зсувні напруження в околі вершин тріщини.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Каландия А. И.** Математические методы двумерной упругости / А. И. Каландия. – М. : Наука, 1973. – 304 с.
2. **Лобода В. В.** О межфазной трещине с учетом контакта ее берегов / В. В. Лобода // Гидроаэромеханика и теория упругости. – Днепропетровск, 1991. – С. 78–86.
3. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 708 с.
4. **Салганик Р. Л.** О хрупком разрушении склеенных тел / Р. Л. Салганик // ПММ. – 1963. – Т. 27, вып. 5. – С. 957–962.
5. **Симонов И. В.** Трещина на границе раздела в однородном поле напряжений / И. В. Симонов // Механика композитных материалов. – 1985. – № 6. – С. 969–976.
6. **Chao R.** Closure of an arc crack in an isotropic homogeneous material due to uniaxial loading / R. Chao, N. Laws // Quart. J. Mech. and Appl. Math. – 1992. – Vol. 45. – P. 629–640.
7. **Chao R.** The fiber-matrix interface crack / R. Chao, N. Laws // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1997. – Vol. 64. – P. 992–999.
8. **Comninou M.** The interface crack / M. Comninou // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1977. – Vol. 44. – P. 631–636.
9. **Dundurs J.** Discussion / J. Dundurs // Journal of Applied Mechanics. – 1969. – Vol. 36, Trans. ASME, Series E. – P. 650–652.
10. **England A. H.** A crack between dissimilar media / A. H. England // Journal of Applied Mechanics. – 1965. – Vol. 32, Trans. ASME, Series E. – P. 440–402.
11. **England A. H.** An Arc Crack Around a Circular Elastic Inclusion / A. H. England // Journal of Applied Mechanics. – 1967. – Vol. 34, Trans. ASME, Series E. – P. 637–640.
12. **Williams M. L.** The stresses around a fault or cracks in dissimilar media / M. L. Williams // Bulletin of the Seismological Society of America. – 1959. – Vol. 49. – P. 199–204.

А. Е. Шевелёва, канд. физ.-мат. наук, К. О. Тулин, В. В. Лобода, д-р физ.-мат. наук

О КОНТАКТНОЙ МОДЕЛИ ДУГОВОЙ ТРЕЩИНЫ

Рассматривается плоская задача о дуговой трещине между круговым включением и бесконечной матрицей, которые имеют разные механические характеристики. Считается, что на бесконечности действует равномерное растягивающее напряжение, которое направлено под некоторым углом к центральной оси дуговой трещины. Проблема сводится к системе сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций, которые характеризуют раскрытие трещины. Отдельно рассматривается случай трещины в однородном материале. Графически проиллюстрировано раскрытие и поведение нормального и касательного напряжений в окрестности каждой из вершин дуговой трещины.

Ключевые слова: межфазная трещина, дуговая трещина, сингулярное интегральное уравнение.

ON THE CONTACT MODEL OF AN ARC CRACK

Annotation. The plane problem for a crack between a circular inclusion and an infinite matrix, which have different mechanical properties, is considered. It is assumed that a uniform tension directed under some angle to the central axis of the arc crack acts at infinity. The problem is reduced to a system of singular integral equations with respect to unknown functions which characterize opening of the crack. The case of a crack in homogeneous material is considered as well. The crack opening, the behavior of normal and shear stresses near each of the arc crack tips are illustrated graphically.

Keywords: interface crack, arc crack, singular integral equation.

The problem of a crack between two materials (interfacial crack) is very important for practice, since such cracks are a major cause of fracture of composite materials. In the case of rectilinear crack this problem was studied in the pioneering works [4, 10–12], where physically impossible crack faces interpenetration of an interfacial crack was found. Therefore contact model of an interface crack was proposed in [8] and the possibility of significant contact zones appearance under large shear field was found out. This model was analytically studied in [2, 5] and other papers.

In the case of an arc crack the investigation of the contact zone model is even more important because very often large contact area occur even for a homogeneous material. Model of "an open" arc crack in a homogeneous material was studied in the book [3], and for an interfacial case it was studied in paper [11]. Here, in particular, has been shown the incorrectness of this model for a number of crack opening angles and the external load cases. Contact arc crack model was studied in [6, 7] for homogeneous and composite materials, respectively. The problem was reduced to a system of singular integral equations and its numerical solution was performed.

In the present paper the plane problem for a crack between a circular inclusion and an infinite matrix, which have different mechanical properties, is considered. It is assumed that a uniform tension directed under some angle to the central axis of the arc crack acts at infinity. The presentations for stresses and displacements via complex potentials [3] for the matrix and the inclusion are used. Satisfying the continues conditions for stresses along the whole interface and for the derivatives of displacement jump along the bonded part of the interface the following presentation for the stresses via two partially analytic functions is formulated

$$\sigma_{rr}^{(1)}(t) + i\sigma_{r\theta}^{(1)}(t) = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \kappa_1\mu_2} \left\{ G^+(t) + \rho G^-(t) + \delta F(t) \right\}, \quad (1)$$

$$\text{where } \rho = \frac{\mu_1 + \kappa_1\mu_2}{\mu_2 + \kappa_2\mu_1}; \quad \delta = \frac{1 - \kappa_1\kappa_2}{\mu_2 + \kappa_2\mu_1}.$$

The following presentation of the crack opening via the same functions permitted to formulate the system of singular integral equations (SIE) with respect to unknown functions which characterize opening of the crack. After the transformation of this system to the interval $(-1, 1)$ and assumptions that the materials of the matrix and the inclusion are identical each other and the contact is frictionless this system can be written in the form

$$\int_{-1}^1 \frac{B_1(\xi)}{\xi - \zeta} d\xi = \eta^2 \int_{-1}^1 \frac{\xi B_1(\xi)}{g(\xi)} d\xi + 2\eta \int_{-1}^1 \frac{B_2(\xi)}{g(\xi)} d\xi + R_1(\zeta) + \hat{N}(\zeta);$$

$$\int_{-1}^1 \frac{B_2(\xi)}{\xi - \zeta} d\xi = \eta^2 \int_{-1}^1 \frac{\xi B_2(\xi)}{g(\xi)} d\xi + R_2(\zeta),$$

$$\zeta \in (-1, 1), (2)$$

where $g(\xi) = 1 + \eta^2 \xi^2$, $\eta = tg(\theta_0/2)$, $\hat{N}(\xi)$ is the normalized contact stress, $R_1(\zeta)$, $R_2(\zeta)$ – loading functions, $B_1(\xi)$, $B_2(\xi)$ are unknown functions which define crack opening. Two additional conditions representing the displacements uniqueness and the equation for zero opening of the crack in the contact zone are used as well.

The collocation method together with Gauss-Chebyshev quadrature rule is used for the solution of the formulated system of SIE which reduces to a system of linear algebraic equations.

The numerical results are presented for the case of an arc crack in homogeneous material loaded by one-direction uniform stress of different direction with respect to the symmetry axis of the crack. The main attention is devoted to the cases of large contact zones at one of the crack tip. The stress distributions in the contact zone and ahead of the crack tips are presented. It appears to be that the largest stress occurs at the open crack tip, however, for its correct determination the account of contact zone at the other crack tip is required.

REFERENCES

1. **Kalanduya A. I.** Mathematical methods of two-dimensional elasticity / A. I. Kalanduya // M. : Nauka, 1973. – 304 p. (in Russian).
2. **Loboda V. V.** On an interface crack with taking into account the contact of crack faces. / V. V. Loboda // Gydro-aero-dynamics and theory of elasticity. – Dnipropetrovsk, 1991. – P. 78–86 (in Russian).
3. **Muskhelisvili N. I.** Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity / N. I. Muskhelishvili – M. : Nauka, 1966. – 708 p. (in Russian).
4. **Salganik R. L.** On the brittle fracture of glued bodies / R. L. Salganik // PMM. – 1963. – Vol. 27, Is. 5. – P. 957–962 (in Russian).
5. **Simonov I. V.** An interface crack in a homogeneous field of tension / I. V. Simonov // Mechanics of composite materials. – 1985. – № 6. – P. 969–976 (in Russian).
6. **Chao R.** Closure of an arc crack in an isotropic homogeneous material due to uniaxial loading / R. Chao, N. Laws // Quart. J. Mech. and Appl. Math. – 1992. – Vol. 45. – P. 629–640.
7. **Chao R.** The fiber-matrix interface crack / R. Chao, N. Laws // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1997. – Vol. 64. – P. 992–999.
8. **Comninou M.** The interface crack / M. Comninou // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1977. – Vol. 44. – P. 631–636.
9. **Dundurs J.** Discussion / J. Dundurs // Journal of Applied Mechanics. Trans. ASME, Series E, 1969. – Vol. 36. – P. 650–652.
10. **England A. H.** A crack between dissimilar media / A. H. England // Journal of Applied Mechanics. Trans. ASME, Series E, 1965. – Vol. 32. – P. 440–402.
11. **England A. H.** An Arc Crack around a Circular Elastic Inclusion / A. H. England // Journal of Applied Mechanics. Trans. ASME, Series E, 1967. – Vol. 34. – P. 637–640.
12. **Williams M. L.** The stresses around a fault or cracks in dissimilar media / M. L. Williams // Bulletin of the Seismological Society of America. – 1959. – Vol. 49. – P. 199–204.

Дніпропетровський національний університет
ім. О. Гончара,
Дніпропетровськ, Україна

Надійшла до редколегії 10.02.2013