

УДК 539.3

*В. Я. Адлуцкий, канд. физ.-мат. наук, Г. М. Гавеля,
В. А. Громов, канд. физ.-мат. наук*

ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ХАРАКТЕР НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ НЕОДНОРОДНОМ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ

С позиций нелинейно-геометрической теории оболочек анализируется влияние неоднородности внешнего давления и вида граничных условий на уровень критических нагрузок и форму потери устойчивости для случаев полосовой нагрузки, действующей на круговую цилиндрическую оболочку. Рассматриваются пять вариантов задания граничных условий – от жёсткого защемления до свободного опирания.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, неоднородное внешнее давление, граничные условия, обобщённый метод Канторовича, потеря устойчивости.

Введение. Широкий диапазон применения тонкостенных систем обусловил устойчивый интерес к разработке математических моделей теории оболочек и соответствующих методов решения [1–3]. Существенная нелинейность поведения нагруженных тонкостенных систем проявляется в широком многообразии экспериментально наблюдаемых закритических форм. Последние, в свою очередь, соответствуют различным критическим нагрузкам, вследствие чего задача оценки этих нагрузок является весьма сложной.

Следует отметить, что линеаризация в окрестности докритического состояния при неосесимметричном нагружении приводит к неправильному описанию характера деформирования тонкостенной системы и недопустимым оценкам критических нагрузок. Чтобы получить надежные результаты следует рассматривать решение полной нелинейной задачи.

Для оценки критических нагрузок деформируемых тонкостенных систем необходимо выполнить всестороннее моделирование внешних воздействий (с различными функциями нагрузок) и по результатам определить наиболее неблагоприятные условия воздействия, приводящие к минимальным значениям критических нагрузок [4].

Ряд исследований [5, 6] посвящен местной и общей потере устойчивости круглых цилиндрических оболочек, подвергнутых несимметричному локальному осевому сжатию. Авторы трактуют закритическую «локальную вмятину» формы (местная потеря устойчивости) как пусковой механизм для общей потери устойчивости системы (регулярный набор вмятин). Обычно система испытывает обе эти формы потери устойчивости, и местная потеря устойчивости предшествует общей. Общая потеря устойчивости коррелирует со значением критической нагрузки λ^* , полученной с использованием линейной теории, тогда как местная потеря устойчивости коррелирует с намного более низкими значениями ($0,3 \lambda^*$ и менее).

В работе [7] исследована потеря устойчивости цилиндрических оболочек при неосесимметричном внешнем давлении. Асимметрия деформирования обусловлена наличием продольного сварного шва. Исследовано два вида сварного шва – жёсткий и гибкий – в зависимости от технологии изготовления. Экспериментальное и численное исследование демонстрирует два типа закритических форм (локальная и регулярная) с критической нагрузкой приблизительно $0,45 \lambda^*$ для локальной и $0,6 \lambda^* - 0,9 \lambda^*$ для общей формы потери устойчивости.

Работы [8–10] содержат исследования, посвященные неосесимметричному деформированию цилиндрических оболочек. В [8] рассматривалась асимметрия деформации, вызванная несовершенствами формы в виде ромбовидных вмятин, в [9] – вызванная наличием сварного шва, в [10] – вследствие ветровой нагрузки.

Можно заключить, что закритические формы типа «локальная вмятина» или «группа смежных локальных вмятин» (и, соответственно, локальные решения нелинейной краевой задачи теории оболочек) важны с практической и теоретической точки зрения.

Влияние граничных условий на величину критических нагрузок при воздействии на круговую цилиндрическую оболочку равномерно распределенного внешнего давления с позиций линеаризационного подхода рассмотрено в монографии [11]. В отличие от осесимметричного, неосесимметричное (особенно локальное) нагружение внешним давлением создает в оболочке изначально неоднородное напряженное состояние, сочетающее мембранные напряжения и напряжения изгиба. Вследствие этого изменение характера граничных условий должно существенно влиять на величину критических нагрузок и закритическое поведение оболочки. В настоящей работе с позиций нелинейно-геометрической теории оболочек анализируется влияние неоднородности внешнего давления и вида граничных условий на уровень критических нагрузок и форму потери устойчивости для случаев полосовой нагрузки. Рассматриваются пять вариантов задания граничных условий – от жёсткого защемления до свободного опирания.

Постановка задачи. Рассматривается нелинейная краевая задача теории цилиндрических оболочек:

$$S(\bar{w}(\bar{x}, \bar{y}), \bar{\Phi}(\bar{x}, \bar{y}), \bar{\lambda} q(\bar{x}, \bar{y})) = 0; \quad (1)$$

$$G_i(\bar{w}(\bar{x}, \bar{y}), \bar{\Phi}(\bar{x}, \bar{y}))|_{\Gamma} = 0; \quad (2)$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{\Omega} = \{0 \leq \bar{x} \leq L, 0 \leq \bar{y} \leq 2\pi R\},$$

где \bar{x}, \bar{y} – продольная и окружная координаты; L, R, h – длина, радиус и толщина оболочки; E, μ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона; $\bar{w}(\bar{x}, \bar{y}), \bar{\Phi}(\bar{x}, \bar{y})$ – функция нормальных прогибов и функция напряжений в срединной поверхности оболочки $\bar{\Omega}$; $\bar{\lambda}$ – параметр нагружения; $q(\bar{x}, \bar{y})$ – нормализованная распределенная нагрузка; S – дифференциальный оператор теории пологих оболочек; G_i – оператор граничных условий; $\Gamma = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{\Omega}, \bar{x} = 0, \bar{x} = L\}$ – кромки оболочки.

Нелинейная краевая задача (1)–(2) получена на основе вариационной формулировки

$$\begin{aligned}
 \dot{Y} \rightarrow \min_{\{w(x,y), \Phi(x,y)\}} \iint_{\Omega} & \left[\frac{1}{2} \frac{1}{12(1-\lambda^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{\mu}{12(1-\lambda^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{12(1-\lambda^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\
 & + \frac{1-\mu}{12(1-\lambda^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)^2 + \mu \frac{1}{12(1-\lambda^2)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)^2 - \\
 & - (1+\lambda) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{R}{h} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} w + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \\
 & \left. - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \dot{q}(x, y) \right] dx dy
 \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $x = \frac{\bar{x}}{R}$; $y = \frac{\bar{y}}{R}$, $(x, y) \in \Omega = \{ 0 < x < \frac{L}{R}, 0 < y < 2\pi \}$; $w = \frac{\bar{w}}{h}$; $\Phi = \frac{\bar{\Phi}}{Eh^3}$;

$$\lambda = \frac{\bar{\lambda} R^4}{Eh^4}, \quad q(x, y) = q_x q_y.$$

Для построения разрешающей системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) к функционалу (3) применен обобщённый метод Канторовича (ОМК). В соответствии с процедурой ОКМ [12] неизвестные функции задачи представляются в виде сумм произведений неизвестных функций одного переменного. Такое представление является отражением того факта, что изменяемость решения нелинейной краевой задачи может существенно возрастать или убывать вдоль ветви решения. Широкомасштабные вычисления позволяют сделать вывод о том, что одночленная аппроксимация является достаточной для получения представления об основных свойствах решения исследуемой задачи. При этом результат согласуется с опытом других исследователей, применявших ОКМ для тонкостенных систем [13].

Таким образом, неизвестные функции задачи представлены в виде

$$\begin{aligned}
 w^{(n)}(x, y) &= h_w^{(n)}(x) g_w^{(n)}(y), \\
 \Phi^{(n)}(x, y) &= h_\Phi^{(n)}(x) g_\Phi^{(n)}(y)
 \end{aligned} \quad (4)$$

и подставляются в функционал (3). Верхний индекс n означает, что множители в формуле (4) вычисляются в рамках итерационного процесса ОКМ (n – номер шага итерации). Вычисляя вариационные производные независимо по $g_w(y)$, $g_\Phi(y)$, $h_w(x)$, $h_\Phi(x)$ (верхний индекс n опущен), можно получить следующую систему интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных $g_w(y)$, $g_\Phi(y)$, $h_w(x)$, $h_\Phi(x)$:

$$\begin{aligned}
\frac{d^4 g_w}{dy^4} = & -\frac{1}{a_3} \left[a_1 g_w + 2(a_2 - a_4) \frac{d^2 g_w}{dy^2} + \frac{R}{h} a_{10} g_\Phi + (a_9 - a_{12}) g_w \frac{d^2 g_\Phi}{dy^2} - \right. \\
& \left. - a_{11} \frac{dg_w}{dy} \frac{dg_\Phi}{dy} - a_{11} g_\Phi \frac{d^2 g_w}{dy^2} + a_{13} \lambda q_y \right]; \\
\frac{d^4 g_\Phi}{dy^4} = & -\frac{1}{a_5} \left[a_7 g_\Phi + 2(a_6 - a_8) \frac{d^2 g_\Phi}{dy^2} + \frac{R}{h} a_{10} g_w + \right. \\
& \left. + \left(a_9 + \frac{1}{2} a_{11} - a_{12} \right) \left(\frac{dg_w}{dy} \right)^2 + (a_9 - a_{12}) g_w \frac{d^2 g_w}{dy^2} \right],
\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}
a_1 = & \frac{1}{12(1-\mu^2)} \int_0^{L/R} \left(\frac{d^2 h_w}{dx^2} \right)^2 dx; \quad a_2 = \frac{\mu}{12(1-\mu^2)} \int_0^{L/R} h_w \frac{d^2 h_w}{dx^2} dx; \\
a_3 = & \frac{1}{12(1-\mu^2)} \int_0^{L/R} h_w^2 dx; \quad a_4 = \frac{1-\mu}{12(1-\mu^2)} \int_0^{L/R} \left(\frac{dh_w}{dx} \right)^2 dx; \\
a_5 = & - \int_0^{L/R} h_\Phi^2 dx; \quad a_6 = \mu \int_0^{L/R} \frac{d^2 h_\Phi}{dx^2} h_\Phi dx; \quad a_7 = - \int_0^{L/R} \left(\frac{d^2 h_\Phi}{dx^2} \right)^2 dx; \\
a_8 = & -(1+\mu) \int_0^{L/R} \left(\frac{dh_\Phi}{dx} \right)^2 dx; \quad a_9 = \int_0^{L/R} h_\Phi(x) \left(\frac{dh_w}{dx} \right)^2 dx; \\
a_{10} = & \int_0^{L/R} h_w \frac{d^2 h_\Phi}{dx^2} dx; \quad a_{11} = \int_0^{L/R} h_w^2 \frac{d^2 h_\Phi}{dx^2} dx; \\
a_{12} = & - \int_0^{L/R} h_w \frac{dh_w}{dx} \frac{dh_\Phi}{dx} dx; \quad a_{13} = \int_0^{L/R} q_x h_w dx.
\end{aligned} \tag{6}$$

К уравнениям (5) должны быть добавлены граничные условия периодичности:

$$\left\{ g_w(0) - g_w(2\pi) = 0; \quad \frac{dg_w}{dy}(0) - \frac{dg_w}{dy}(2\pi) = 0; \quad \frac{d^2 g_w}{dy^2}(0) - \frac{d^2 g_w}{dy^2}(2\pi) = 0; \right.$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^3 g_w}{dy^3}(0) - \frac{d^3 g_w}{dy^3}(2\pi) = 0; \quad g_\Phi(0) - g_\Phi(2\pi) = 0; \quad \frac{dg_\Phi}{dy}(0) - \frac{dg_\Phi}{dy}(2\pi) = 0; \\ \frac{d^2 g_\Phi}{dy^2}(0) - \frac{d^2 g_\Phi}{dy^2}(2\pi) = 0; \quad \frac{d^3 g_\Phi}{dy^3}(0) - \frac{d^3 g_\Phi}{dy^3}(2\pi) = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

Соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 h_w}{dx^4} = \frac{1}{a_1} \left[a_2 \frac{d^2 h_w}{dx^2} + a_3 h_w + a_4 h_\Phi \frac{d^2 h_w}{dx^2} + a_5 \frac{dh_w}{dx} \frac{dh_\Phi}{dx} + \right. \\ \left. + a_6 \frac{d^2 h_\Phi}{dx^2} + a_7 h_w \frac{d^2 h_\Phi}{dx^2} + a_8 \lambda q_x \right]; \\ \frac{d^4 h_\Phi}{dx^4} = \frac{1}{a_{11}} \left[a_9 h_\Phi + a_{10} \frac{d^2 h_\Phi}{dx^2} + a_{12} \left(\frac{dh_w}{dx} \right)^2 + a_{13} \frac{d^2 h_w}{dx^2} + a_{14} h_w \frac{d^2 h_w}{dx^2} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 = \frac{1}{12(1-\mu^2)} \int_0^{2\pi} g_w^2 dy; \quad a_2 = \frac{2\mu}{12(1-\mu^2)} \int_0^{2\pi} g_w \frac{d^2 g_w}{dy^2} dy - \frac{2(1-\mu)}{12(1-\mu^2)} \int_0^{2\pi} \left(\frac{dg_w}{dy} \right)^2 dy; \\ a_3 = \frac{1}{12(1-\mu^2)} \int_0^{2\pi} \left(\frac{d^2 g_w}{dy^2} \right)^2 dy; \quad a_4 = - \int_0^{2\pi} \frac{d^2 g_\Phi}{dy^2} g_w^2 dy; \quad a_5 = - \int_0^{2\pi} \frac{d^2 g_\Phi}{dy^2} g_w^2 dy; \\ a_6 = \frac{R}{h} \int_0^{2\pi} g_w g_\Phi dy; \quad a_7 = \int_0^{2\pi} g_\Phi \left(\frac{dg_w}{dy} \right)^2 dy + \int_0^{2\pi} g_w \frac{dg_w}{dy} \frac{dg_\Phi}{dy} dy; \quad a_8 = \int_0^{2\pi} q_y g_w dy; \\ a_9 = - \int_0^{2\pi} \left(\frac{d^2 g_\Phi}{dy^2} \right)^2 dy; \quad a_{10} = 2\mu \int_0^{2\pi} g_\Phi \frac{d^2 g_\Phi}{dy^2} dy + 2(1+\mu) \int_0^{2\pi} \left(\frac{dg_\Phi}{dy} \right)^2 dy; \\ a_{11} = - \int_0^{2\pi} g_\Phi^2 dy; \quad a_{12} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d^2 g_\Phi}{dy^2} g_w^2 dy + \int_0^{2\pi} g_\Phi \left(\frac{dg_\Phi}{dy} \right)^2 dy + \int_0^{2\pi} g_w \frac{dg_w}{dy} \frac{dg_\Phi}{dy} dy; \\ a_{13} = \frac{R}{h} \int_0^{2\pi} g_\Phi g_w dy; \quad a_{14} = \int_0^{2\pi} g_\Phi \left(\frac{dg_w}{dy} \right)^2 dy + \int_0^{2\pi} g_w \frac{dg_w}{dy} \frac{dg_\Phi}{dy} dy. \end{aligned} \quad (9)$$

Кроме того, должны быть добавлены соответствующие граничные условия на кромках оболочки.

Условия, эквивалентные запрещению продольных перемещений имеют вид

$$\left[g_\Phi'(y) \Big|_0^{2\pi} h_\Phi(x) - \mu \int_0^{2\pi} g_\Phi(y) dy h_\Phi''(x) - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} g_w^2(y) dy (h_w'(x))^2 \Big|_{x=0, L/R} = 0 \right], \quad (10)$$

а окружающих –

$$\left[g_{\Phi}''(y) / 0^{2\pi} h_{\Phi}(x) + \mu g_{\Phi}(y) / 0^{2\pi} h_{\Phi}''(x) - (1 + \mu) g_{\Phi}'(y) / 0^{2\pi} h_{\Phi}'(x) + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} g_w(y) g_w'(y) dy (h_w'(x))^2 - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} g_w(y) g_w'(y) dy h_w''(x) h_w(x) \right] \Big|_{x=0, L/R} = 0. \quad (11)$$

Для случая закрепления кромок посредством неподвижных шарниров граничные условия (10), (11) должны быть дополнены условиями

$$\{h_w = 0; h_w'' = 0\} \Big|_{x=0, L/R}. \quad (12)$$

Для случая жестко защемленных кромок граничные условия (10), (11) должны быть дополнены условиями

$$\{h_w = 0; h_w' = 0\} \Big|_{x=0, L/R}. \quad (13)$$

Для случая свободного опирания граничные условия имеют вид

$$\{h_w = 0; h_w'' = 0; h_{\Phi} = 0; h_{\Phi}' = 0\} \Big|_{x=0, L/R}. \quad (14)$$

Другие варианты закрепления могут быть представлены с помощью комбинирования граничных условий (10)–(14).

Численный метод. Система уравнений (6)–(9) обладает тем свойством, что в первую пару уравнений (6) члены $g_w(y)$, $g_{\Phi}(y)$ входят под знаком дифференцирования, члены $h_w(x)$, $h_{\Phi}(x)$ – под знаком интегрирования, а для второй пары уравнений (8) – наоборот: члены $g_w(y)$, $g_{\Phi}(y)$ входят под знаком дифференцирования, а члены $h_w(x)$, $h_{\Phi}(x)$ – под знаком интегрирования. Это позволяет построить итерационный процесс ОМК для определения $w^{(n)}(x, y)$, $\Phi^{(n)}(x, y)$. Именно, начиная с исходной аппроксимации для $h_w^{(0)}(x)$, $h_{\Phi}^{(0)}(x)$, можно удовлетворить первой паре уравнений (6) как системе ОДУ относительно неизвестных $g_w(y)$, $g_{\Phi}(y)$ и решить её. В свою очередь это позволяет вычислить коэффициенты (9) для второй пары уравнений (8) и решить систему. Для n -й итерации процесса ОМК можно начать с $h_w^{(n-1)}(x)$, $h_{\Phi}^{(n-1)}(x)$ и выполнить те же операции для того, чтобы получить $w^{(n)}(x, y)$, $\Phi^{(n)}(x, y)$. Сходимость процесса оценивается в нормах $\|w^{(n)}(x, y) - w^{(n-1)}(x, y)\|_{L_2}$, $\|\Phi^{(n)}(x, y) - \Phi^{(n-1)}(x, y)\|_{L_2}$. Для решения одномер-

ной нелинейной краевой задачи можно свести ее к эквивалентной задаче Коши, используя итерационный процесс Ньютона. Для решения задачи Коши на итерации метода Ньютона можно использовать численное интегрирование методом Рунге–Кутты. Вырожденность матрицы Фреше в итерационном процессе Ньютона для некоторой краевой задачи на последней итерации процесса ОМК указывает на то, что система проходит через особую точку (предельную или точку бифуркации). Процесс ОМК демонстрирует быструю сходимость. Для обеспечения хорошего начального приближения можно использовать метод продолжения по параметру.

Численные результаты. Предложенный алгоритм был использован для решения нелинейной краевой задачи анализа поведения и оценки уровня критической нагрузки для оболочки, подверженной воздействию полосового внешнего равномерно распределённого давления. Размер области нагружения в окружном направлении, измеряемый в радианах, обозначен θ . Рассматривались пять вариантов граничных условий. Варианты с нечётными номерами соответствуют «мягкой» схеме закрепления с разрешённым продольным перемещением на торцах (вариант 1 соответствует шарнирному опиранию, подвижному в продольном и окружном направлениях; вариант 3 – подвижному защемлению в продольном направлении и свободному смещению в окружном; вариант 5 – подвижному защемлению в продольном направлении и запрещённому перемещению в окружном). Варианты с чётными номерами соответствуют «жёсткой» схеме закрепления, когда продольные перемещения запрещены (вариант 2 соответствует жёсткому защемлению кромок, а вариант 4 – неподвижному в продольном направлении шарнирному защемлению в сочетании со свободным смещением в окружном направлении).

На рис. 1 приведены графики зависимостей критического давления от величины угла φ для указанных вариантов граничных условий. При этом полагалось $\frac{R}{h} = 200$, $\frac{L}{R} = 4$. Из приведенных результатов следует, что увеличение жёсткости продольной опоры приводит к увеличению критических нагрузок.

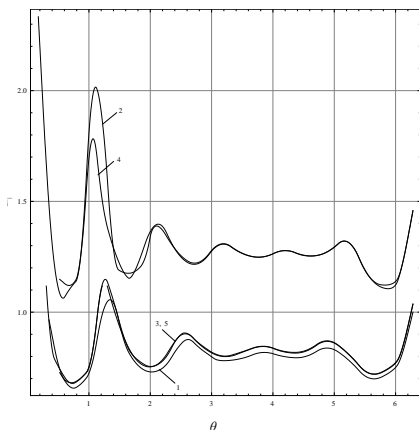


Рис. 1 – Зависимость критических нагрузок от угла раствора полосы нагружения для различных типов граничных условий

При $\varphi = 2\pi$ критическая нагрузка увеличивается в 1,5 раза, что соответствует результатам, приведенным в [11].

Увеличение жёсткости в кольцевом направлении практически не влияет на величину критической нагрузки, что в предельном случае $\varphi = 2\pi$ также согласуется с результатами [11]. Следует отметить, что немонотонный

характер зависимости (где $\lambda_{cr}^* = 0,92E \frac{R}{L} \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2}$ – классическое значение

критического давления [11]) сохраняется как для «мягкой», так и для «жёсткой» схем закрепления, при этом кривые практически эквидистантны. Между тем наблюдается изменение формы изгиба при потере устойчивости – увеличение критической нагрузки вследствие изменения граничных условий ведет к увеличению числа волн. На рис. 2 приведены формы изгиба для «мягкого» и «жёсткого» случаев граничных условий.

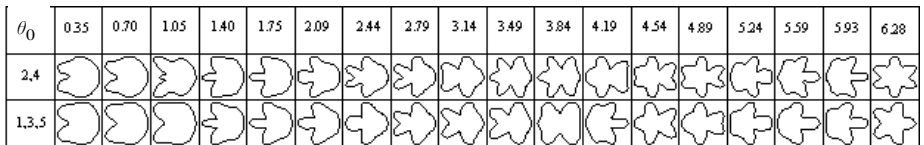


Рис. 2 – Закритические формы деформации для различных углов полосы нагружения

Следует отметить, что в случае «жёсткой» схемы закрепления в диапазоне углов нагружения $0 < \theta < \frac{\pi}{9}$ и $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ потеря устойчивости не сопровождается хлопком, т. е. на графике зависимости $\bar{\lambda}(\theta)$ отсутствует предельная точка. Для «мягкой» схемы закрепления явление хлопка характерно во всем диапазоне изменения углов нагружения.

При сужении полосы приложения нагрузки наблюдается еще одно различие в поведении оболочки при «мягкой» и «жёсткой» схемах закрепления. На рис. 3 и рис. 4 приведены типичные графики распределения в окружном

направлении осевых усилий $\tilde{T}_{11} = \frac{T_{11}}{\hat{T}_{11}}$ (где $\hat{T}_{11} = 0,605Eh^2/R$ – классическое значение критической нагрузки при сжатии [11]), для случая жёсткого защемления (рис. 3) и свободного опирания (рис. 4) при $\varphi = \frac{\pi}{9}$, $\lambda = 0,8\lambda_{cr}^*$

Здесь обозначено $\xi = \frac{\bar{x}}{L}$.

Из рис. 3 следует, что вблизи защемлённых кромок вследствие стесненности продольных перемещений возникает зона сжимающих осевых усилий (для приведенного случая: $\frac{\pi}{8} < y < \frac{\pi}{3}$), в которой с ростом нагружения вероятно локальная потеря устойчивости по типу продольного сжатия. Для «мягкой» схемы закрепления такая зона отсутствует.

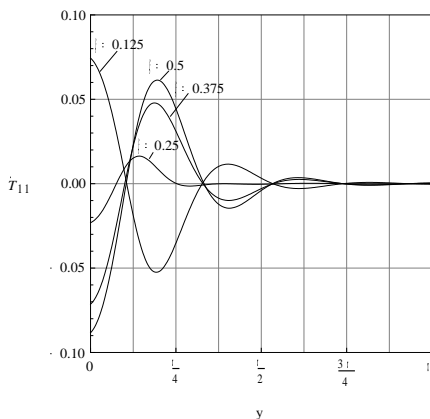


Рис. 3 – Типичные профили усилий T_{11} для «жестких» граничных условий

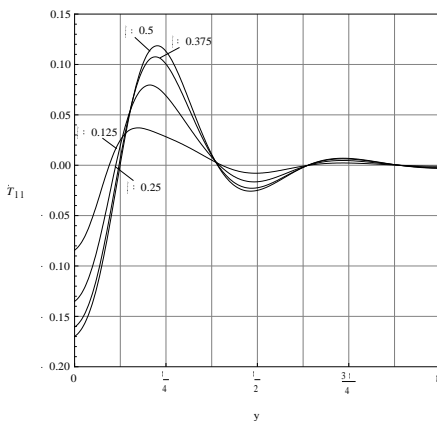


Рис. 4 – Типичные профили усилий T_{11} для «мягких» граничных условий

Выводы. Неосесимметричное деформирование может рассматриваться как пусковой механизм потери устойчивости цилиндрической оболочки. При этом влияние граничных условий и характера неоднородности нагружения на величину критической нагрузки в некоторых случаях весьма существенно. Для «жёсткой» схемы закрепления в случае воздействий, близких к локальным, наряду с окружной формой потери устойчивости с ростом нагрузки вероятны локальные формы потери устойчивости по типу продольного сжатия.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1961. – 985 с.
2. **Amabili M.** Non-linear vibrations and stability of shells and plates / M. Amabili. – Cambridge: Cambridge University Press, 2008. – 392 p.
3. **Aghdam M. M.** Solution to the Reissner plate with clamped edges / M. M. Aghdam, M. Shakeri, S. J. Fariborz // ASCE J. Eng. Mech. – 1996. – Vol. 7. – P. 679–682.

4. **Doyle J. F.** Non-linear analysis of thin-walled structures / J. F. Doyle. – N.–Y. : Springer-Verlag, 2001. – 412 p.
5. **Gavrilenko G. D.** Stability of circular cylindrical shells with a single local dent / G. D. Gavrilenko, V. L. Krasovskii // Strength of Materials. – 2004. – Vol. 36(3). – P. 260–268.
6. **Gavrilenko G. D.**, Calculation of load-carrying capacity of elastic shells with periodic dents (theory and experiment) / G. D. Gavrilenko, V. L. Krasovskii // Strength of Materials. – 2004. – Vol. 36(5). – P. 511–517.
7. **Kerr A. D.** An extension of Kantorovich method / A. D. Kerr // Q. Appl. Math. – 1968. – Vol. 26. – P. 219–229.
8. **Krisnakumar S.** Axial load compatibility of cylindrical shells with local geometric effects / S. Krisnakumar, C. G. Forster // Experimental Mechanics. – 1991. – Vol. 31. – P. 104–110.
9. **Pircher M.** The influence of circumferential weld-induced imperfections on the buckling of silos and tanks / M. Pircher, R. Q. Bridge // J. of Constructional Steel Research. – 2001. – Vol. 57. – P. 569–580.
10. **Schneider W.** The conception of quasi-collapse-affine imperfections. A new approach to unfavourable imperfections of thin-walled shell structures / W. Schneider, I. Timmel, K. Hoehn. // Thin-walled systems. – 2005. – Vol. 43. – P. 1202–1224.
11. **Sosa E. M.** Changes in the computation of lower-bound buckling loads for tanks under wind pressures / E. M. Sosa, L. A. Godoy // Thin-walled Systems. – 2010. – Vol. 48. – P. 935–945.
12. **Thompson J. M. T.** A general theory of elastic stability / J. M. T. Thompson, G. W. Hunt. – London; N.–Y. : Wiley & sons, 1973. – 317 p.
13. **Wang J. H.** Buckling of cylindrical shells with longitudinal joints under external pressure / J. H. Wang, A. Koizumi // Thin-walled systems. – 2010. – Vol. 48. – P. 897–904.

*В. Я. Адлуцький, канд. фіз.-мат. наук, Г. М. Гавелья,
В. А. Громов, канд. фіз.-мат. наук*

ВПЛИВ ГРАНИЧНИХ УМОВ НА ХАРАКТЕР НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ПРИ НЕОДНОРІДНОМУ ЗОВНІШНЬОМУ ТИСКУ

З позиції нелінійно-геометричної теорії оболонок аналізується вплив неоднорідності зовнішнього тиску й виду граничних умов на рівень критичних навантажень і форму втрати стійкості для випадків смугового навантаження, що діє на кругову циліндричну оболонку. Розглядаються п'ять варіантів завдання граничних умов – від жорсткого защемлення до вільного обпирання.

Ключові слова: циліндрична оболонка, неоднорідний зовнішній тиск, граничні умови, узагальнений метод Канторовича, втрата стійкості.

*V. J. Adlucky, Associate Professor, G .M. Gavelja,
V. A. Gromov, Associate Professor*

INFLUENCE OF BOUNDARY CONDITIONS ON NONLINEAR DEFORMATION OF CYLINDRICAL SHELL SUBJECTED TO NONUNIFORM EXTERNAL PRESSURE

An influence of external pressure non-uniformity and boundary conditions on critical load level and buckling mode for the case of circular cylindrical shell subjected to band loading is considered with employment of geometrically nonlinear shell theory. Five boundary conditions types are investigated, from clamped edges up to free supported edges.

Keywords: cylindrical shell, non-uniform external pressure, boundary conditions, extended Kantorovich method, loss of stability.

Problem statement and numerical method. Variational formulation of nonlinear boundary problem for thin-walled shell theory is considered. The extended Kantorovich method is applied in order to construct governing equations. According to the method unknown functions of the problem (the functions of two variables) are represented as a sum of products of single-variable functions. The representation reflects the fact that nonlinear boundary problem solutions are highly changeable along the post-critical bifurcation paths. A wide-ranging simulation showed that a single term representation is able to reveal qualitative boundary problem solution features.

Numerical data. The above-mentioned algorithm is employed to construct nonlinear boundary problem solutions and to estimate buckling loads for cylindrical shell subjected to band external pressure. The band aperture angle is denoted as θ . The five various boundary conditions are considered. Namely, boundary conditions set variants with odd numbers correspond to “soft” boundaries with free axial displacements (the first variant correspond to hinge support with free in both longitudinal and circumferential directions, the third variant correspond to clamped edge free in tangent directions, the fifth one correspond to clamped edge free in circumference and restricted longitudinally). Sets with even numbers correspond to “stiff” boundaries with restricted axial displacements (the second set describes fully clamped edges, the fourth one corresponds to hinge fixed longitudinally).

Fig. 1 displays dependence of critical (buckling) pressure on aperture θ for boundary condition sets considered (for $\frac{R}{h} = 200$, $\frac{L}{R} = 4$). The results obtained corroborate the fact that critical load values increase with longitudinal support rigidity.

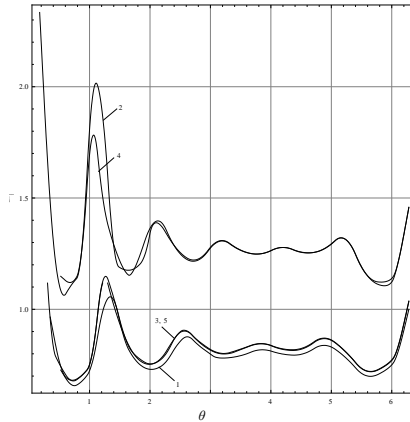


Fig. 1 – Dependence of critical loads on pressure band aperture angle for various boundary conditions

Increase in circumferential stiffness hardly affects critical load values. Non-monotonous dependence of critical loads $(\bar{\lambda}(j) = \frac{\lambda_{cr}(j)}{\lambda_{cr}^*}, \lambda_{cr}^* = 0,92E \frac{R}{L} \left(\frac{h}{R}\right)^{\frac{5}{2}}$

is the critical load estimate obtained in the frameworks of linear theory) on the band aperture takes place for “soft” and “stiff” boundaries as well. Fig. 2 displays buckling mode for “soft” (the left column) and “stiff” (right column) boundaries.

“Stiff” boundaries does not show load-deflection diagram limit points for $0 < \theta < \frac{\pi}{9}$ and $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ band aperture values while, for “soft” boundaries such singular points occurs over all aperture angle range.

Fig. 3 displays the compressive axial forces area ($\frac{\pi}{8} < y < \frac{\pi}{3}$ for the figure), adjacent to shell edges, caused by longitudinal displacement restrictions. External loading growth may lead to buckling localized in the area resembling axial compression buckling mode.

Conclusions. Non-axisymmetrical deformation is considered to be “a trigger” for cylindrical shell buckling. Shell ends boundary conditions and load non-uniformity is proved to influence essentially critical load value. The point of interest is that for “stiff” boundary conditions and highly localized external pressure the buckling modes observed are closely parallels those for axially compressed cylindrical shell.

REFERENCES

1. **Volmir A. S.** Stability of deformed systems / A. C. Вольмир. – М.: Наука, 1961. – 985 p. (in Russian)
2. **Amabili M.** Non-linear vibrations and stability of shells and plates / M. Amabili. – Cambridge: Cambridge University Press, 2008. – 392 p.
3. **Aghdam M. M.** Solution to the Reissner plate with clamped edges / M. M. Aghdam, M. Shakeri, S. J. Fariborz // ASCE J. Eng. Mech. – 1996. – Vol. 7. – P. 679–682.
4. **Doyle J. F.** Non-linear analysis of thin-walled structures / J. F. Doyle. – N.-Y.: Springer-Verlag, 2001. – 412 p.
5. **Gavrilenko G. D.** Stability of circular cylindrical shells with a single local dent / G. D. Gavrilenko, V. L. Krasovskii // Strength of Materials. – 2004. – Vol. 36(3). – P. 260–268.
6. **Gavrilenko G. D.**, Calculation of load-carrying capacity of elastic shells with periodic dents (theory and experiment) / G. D. Gavrilenko, V. L. Krasovskii // Strength of Materials. – 2004. – Vol. 36(5). – P. 511–517.
7. **Kerr A. D.** An extension of Kantorovich method / A. D. Kerr // Q. Appl. Math. – 1968. – Vol. 26. – P. 219–229.
8. **Krisnakumar S.** Axial load compatibility of cylindrical shells with local geometric effects / S. Krisnakumar, C. G. Forster // Experimental Mechanics. – 1991. – Vol. 31. – P. 104–110.
9. **Pircher M.** The influence of circumferential weld-induced imperfections on the buckling of silos and tanks / M. Pircher, R. Q. Bridge // J. of Constructional Steel Research. – 2001. – Vol. 57. – P. 569–580.
10. **Schneider W.** The conception of quasi-collapse-affine imperfections. A new approach to unfavourable imperfections of thin-walled shell structures / W. Schneider, I. Timmel, K. Hoehn. // Thin-walled systems. – 2005. – Vol. 43. – P. 1202–1224.
11. **Sosa E. M.** Changes in the computation of lower-bound buckling loads for tanks under wind pressures / E. M. Sosa, L. A. Godoy // Thin-walled Systems. – 2010. – Vol. 48. – P. 935–945.
12. **Thompson J. M. T.** A general theory of elastic stability / J. M. T. Thompson, G. W. Hunt. – London, N.-Y.: Wiley & sons, 1973. . – 317 p.
13. **Wang J. H.** Buckling of cylindrical shells with longitudinal joints under external pressure / J. H. Wang, A. Koizumi // Thin-walled systems. – 2010. – Vol. 48. – P. 897–904.

*Днепропетровский национальный университет
имени Олеся Гончара,
Днепропетровск, Украина*

Поступила в редколлегию 15.11.2012