

УДК 531, 534

*А. А. Клименко, Ю. В. Михлин, д-р физ.-мат. наук*

## **НЕЛИНЕЙНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ В НЕИДЕАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ С МАЯТНИКОВЫМ ГАСИТЕЛЕМ КОЛЕБАНИЙ**

Рассмотрены нелинейные нормальные формы колебаний неидеальной системы с маятниковым гасителем колебаний. Выделены связанная и локализованная формы колебаний. В последнем случае основная энергия колебаний сосредоточена в маятнике, поэтому эта форма колебаний наиболее благоприятна для виброгашения упругих колебаний. Изучена устойчивость форм колебаний. Построены амплитудно-частотные характеристики.

*Ключевые слова:* нелинейные нормальные формы колебаний, неидеальная система, маятниковый виброгаситель.

**Введение.** Неидеальная система характеризуется взаимодействием источника энергии и упругой системы, которая находится под действием этого источника энергии (Такие системы называют также системами с ограниченным возбуждением). Наиболее интересным эффектом, проявляющимся в неидеальной системе, является так называемый эффект Зоммерфельда [1], когда в упругой подсистеме возникает устойчивый резонансный режим с большими амплитудами, и значительная часть энергии колебаний переходит из источника энергии в эти резонансные колебания. Резонансная динамика неидеальной системы была впервые аналитически описана В. О. Кононенко [2]. Позднее результаты исследований динамики неидеальных систем были изложены в различных публикациях, в частности, в статьях [3, 4]. Использование гасителей колебаний позволяет существенно уменьшить амплитуды резонансных упругих колебаний. В данной статье рассмотрена неидеальная система с маятниковым гасителем колебаний. Использована концепция нелинейных нормальных форм колебаний, основанная на построении траекторий таких режимов в конфигурационном пространстве [5–7]. При этом используется новая, уточненная процедура построения траекторий. Учет диссипации позволяет проанализировать взаимодействие упругой подсистемы и источника энергии, оценить уменьшение амплитуды колебаний в резонансе благодаря использованию гасителя колебаний, а также выделить такие параметры системы, когда удастся избежать возникновения режима резонансных колебаний с большими амплитудами.

**Постановка задачи.** Рассмотрим неидеальную систему, содержащую линейную упругую подсистему, совершающую колебания под действием двигателя, и в то же время оказывающую воздействие на него. Также система содержит маятниковый гаситель колебаний.

Рассматриваемая модель представлена на рис. 1. Двигатель  $D$  оказывает влияние на упругую подсистему с массой  $M$  посредством кривошипа радиуса  $r$ . К упругому звену системы крепится виброгаситель с массой  $m$ .

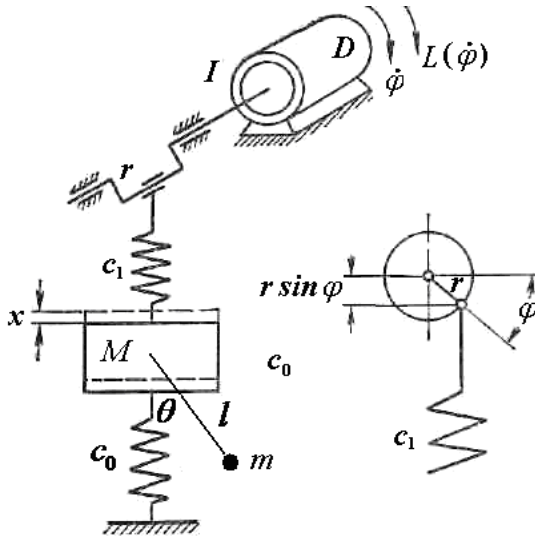


Рис. 1 – Рассматриваемая механическая система

В рассматриваемой системе кинетическая и потенциальная энергии записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon m \left[ (\dot{x} + l \dot{\theta} \cos \theta)^2 + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \right]; \\
 V &= \frac{1}{2} c_0 x^2 + \frac{1}{2} c_1 (x - r \sin \varphi)^2 + \varepsilon m g l (1 - \cos \theta).
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Используя уравнения Лагранжа 2-го рода, а также раскладывая тригонометрические функции  $\cos \theta$  и  $\sin \theta$  в ряд Тейлора, в которых удерживаются слагаемые до третьей степени, получаем уравнения движения системы

$$\left\{ \begin{aligned}
 (M + \varepsilon m) \ddot{x} + (c_0 + c_1) x &= c_1 r \sin \varphi - \varepsilon m l \left( \ddot{\theta} \left( 1 - \frac{1}{2} \theta^2 \right) - \theta \dot{\theta}^2 \right); \\
 I \ddot{\varphi} &= \varepsilon (a - b \dot{\varphi} + c_1 r (x - r \sin \varphi) \cos \varphi); \\
 \varepsilon m l \left( l \ddot{\theta} + g \theta + \ddot{x} \left( 1 - \frac{1}{2} \theta^2 \right) \right) &= 0.
 \end{aligned} \right.
 \tag{2}$$

где  $I$  – момент инерции вращающихся масс;  $(c_0 + c_1)$  – жесткость

упругой колебательной системы с массой  $M$ ;  $L = a - b\dot{\varphi}$  – движущий момент источника энергии (характеристика двигателя).

Из уравнений (2) видно, что момент  $c_1 r x \cos \varphi$  является такой составной частью нагрузки двигателя, которая зависит от колебаний упругой подсистемы. Малый параметр  $\varepsilon$  характеризует малость массы гасителя, а также малость амплитуд осцилляционных составляющих в законе изменения угловой скорости от времени по сравнению с постоянной составляющей угловой скорости.

Выделим в системе две формы колебаний:

а) форму связанных колебаний (амплитуды движений по всем обобщенным координатам соразмерны);

б) локализованную форму колебаний (имеются незначительные смещения упругой подсистемы  $M$  наряду с большими колебаниями виброгасителя  $m$ ), которая наиболее благоприятна для гашения упругих колебаний.

Заметим, что подобный анализ был проведен авторами и для других систем маятникового типа [8].

**Построение нелинейных нормальных форм колебаний.** Далее использованы методы теории нелинейных нормальных форм колебаний, которые базируются на построении траекторий в конфигурационном пространстве системы:  $x = x(\varphi)$ ,  $\theta = \theta(\varphi)$ . Для построения таких траекторий будут использованы следующие соотношения:

$$\dot{x} = x'\dot{\varphi}; \quad \ddot{x} = x''\dot{\varphi}^2 + x'\ddot{\varphi}; \quad \dot{\theta} = \theta'\dot{\varphi}; \quad \ddot{\theta} = \theta''\dot{\varphi}^2 + \theta'\ddot{\varphi}. \quad (3)$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по независимой переменной  $\varphi$ . С учетом таких преобразований кинетическая энергия принимает вид

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon m \left[ (\dot{x} + l\dot{\theta})^2 - l\dot{x}\dot{\theta} \right] = \\ &= \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M x'^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon m \left[ (x'\dot{\varphi} + l\theta'\dot{\varphi})^2 - l x' \dot{\varphi} \theta^2 \theta' \dot{\varphi} \right] = \\ &= \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M x'^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon m \left[ \dot{\varphi}^2 (x' + l\theta')^2 - l x' \theta^2 \theta' \dot{\varphi}^2 \right] = \\ &= \dot{\varphi}^2 \left[ \frac{1}{2} I + \frac{1}{2} M x'^2 + \frac{1}{2} \varepsilon m \left[ (x' + l\theta')^2 - l x' \theta^2 \theta' \right] \right] = \dot{\varphi}^2 \tilde{T}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\tilde{T} = T_0 + \varepsilon T_1, \quad T_0 = \frac{1}{2} I + \frac{1}{2} M x'^2, \quad T_1 = \frac{1}{2} m \left[ (x' + l\theta')^2 - l x' \theta^2 \theta' \right].$$

Потенциальную энергию системы можно представить следующим

образом:

$$V = V_0 + \varepsilon V_1, \quad V_0 = \frac{1}{2} c_0 x^2 + \frac{1}{2} c_1 (x - r \sin \varphi)^2, \quad V_1 = mgl \frac{\theta^2}{2}. \quad (5)$$

С учетом преобразований (3) можно переписать уравнения движения (2) в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} (M + \varepsilon m)(x''\dot{\varphi}^2 + x'\ddot{\varphi}) + (c_0 + c_1)x = \\ = c_1 r \sin \varphi - \varepsilon ml \left( (\theta''\dot{\varphi}^2 + \theta'\ddot{\varphi}) \left( 1 - \frac{1}{2} \theta^2 \right) - \theta \theta'^2 \dot{\varphi}^2 \right); \\ I\ddot{\varphi} = \varepsilon (a - b\dot{\varphi} + c_1 r (x - r \sin \varphi) \cos \varphi); \\ l(\theta''\dot{\varphi}^2 + \theta'\ddot{\varphi}) + g\theta + (x''\dot{\varphi}^2 + x'\ddot{\varphi}) \left( 1 - \frac{1}{2} \theta^2 \right) = 0. \end{array} \right. \quad (6)$$

Из интеграла энергии и уравнения (4) можно выразить  $\dot{\varphi}^2$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{T}{\tilde{T}} = \frac{h - V}{\tilde{T}}. \quad (7)$$

Из второго уравнения системы (6) получаем выражение для  $\ddot{\varphi}$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\varepsilon}{I} \left( a - b \left( \frac{h - V}{\tilde{T}} \right)^{0.5} + c_1 r (x - r \sin \varphi) \cos \varphi \right). \quad (8)$$

Подставляя выражения (7) и (8) в систему уравнений (9), получим уравнения для определения траекторий нелинейных нормальных форм колебаний. Полученные уравнения имеют особенность на максимальной изоэнергетической поверхности  $h = V$ , где все скорости обращаются в нуль. Аналитическое продолжение решения на эту поверхность возможно, если выполняются следующие граничные условия на этой поверхности [5–7]

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon(M + \varepsilon m)\tilde{T}x'(a + c_1 r (x - r \sin \varphi) \cos \varphi) + (c_0 + c_1)I\tilde{T}x = \\ = c_1 r I \tilde{T} \sin \varphi - \varepsilon^2 m l \tilde{T} \left( 1 - \frac{1}{2} \theta^2 \right) \theta' (a + c_1 r (x - r \sin \varphi) \cos \varphi); \\ \varepsilon l \tilde{T} \theta' (a + c_1 r (x - r \sin \varphi) \cos \varphi) + g I \tilde{T} \theta + \\ + \varepsilon \tilde{T} (a + c_1 r (x - r \sin \varphi) \cos \varphi) \left( 1 - \frac{1}{2} \theta^2 \right) x' = 0, \end{array} \right. \quad (10)$$

которые реализуются при амплитудных значениях  $\varphi = \varphi_0$ , при этом  $\dot{\varphi} = 0$ .

Траектория формы связанных колебаний разыскивается в виде рядов по степеням малого параметра

$$x = x(\varphi) = x_0 + \varepsilon x_1 + \dots; \theta = \theta(\varphi) = \theta_0 + \varepsilon \theta_1 + \dots, \quad (11)$$

где, в свою очередь,  $x_0$ ,  $x_1$ ,  $\theta_0$  и  $\theta_1$  представляются рядами по степеням  $\sin \varphi$ :

$$\begin{aligned} x_0 &= a_0 + a_1 \sin \varphi + a_2 (\sin \varphi)^2 + \dots; x_1 = \alpha_0 + \alpha_1 \sin \varphi + \alpha_2 (\sin \varphi)^2 + \dots; \\ \theta_0 &= b_0 + b_1 \sin \varphi + b_2 (\sin \varphi)^2 + \dots; \theta_1 = \beta_0 + \beta_1 \sin \varphi + \beta_2 (\sin \varphi)^2 + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим, что разложение вида (12) представляется более точным, чем ранее использованные разложения по степеням  $\varphi$ .

В случае локализованной формы колебаний, используются следующие разложения:

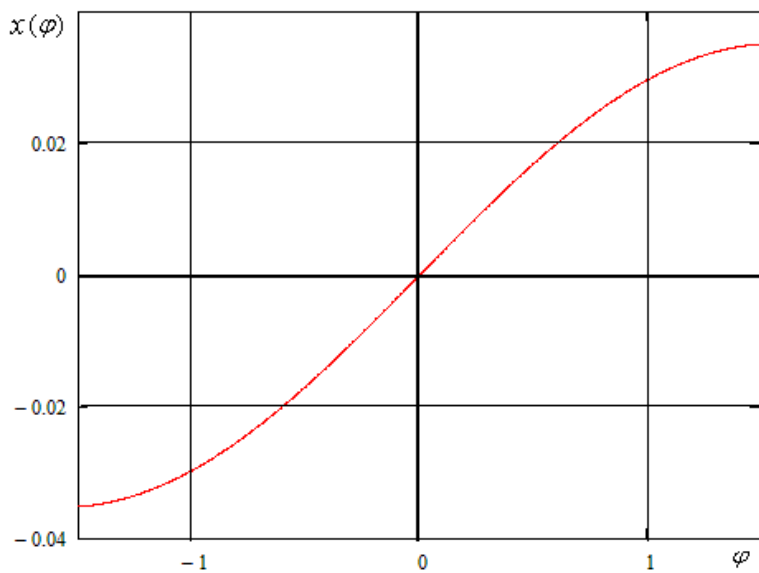
$$\begin{aligned} x &= x(\varphi) = \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots; \theta = \theta(\varphi) = \theta_0 + \varepsilon \theta_1 + \dots; \\ x_1 &= a_0 + a_1 \sin \varphi + a_2 (\sin \varphi)^2 + \dots; x_2 = \alpha_0 + \alpha_1 \sin \varphi + \alpha_2 (\sin \varphi)^2 + \dots; \\ \theta_0 &= b_0 + b_1 \sin \varphi + b_2 (\sin \varphi)^2 + \dots; \theta_1 = \beta_0 + \beta_1 \sin \varphi + \beta_2 (\sin \varphi)^2 + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя ряды (11), (12) (или (13) для локализованной формы колебаний) в систему уравнений (6) и в соответствующие граничные условия (10), и группируя слагаемые при  $\varepsilon^0$  и  $\varepsilon^1$ , а затем, выделяя слагаемые при  $\varphi^0$ ,  $\sin \varphi$  и  $(\sin \varphi)^2$ , получаем систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов рядов (11)–(13).

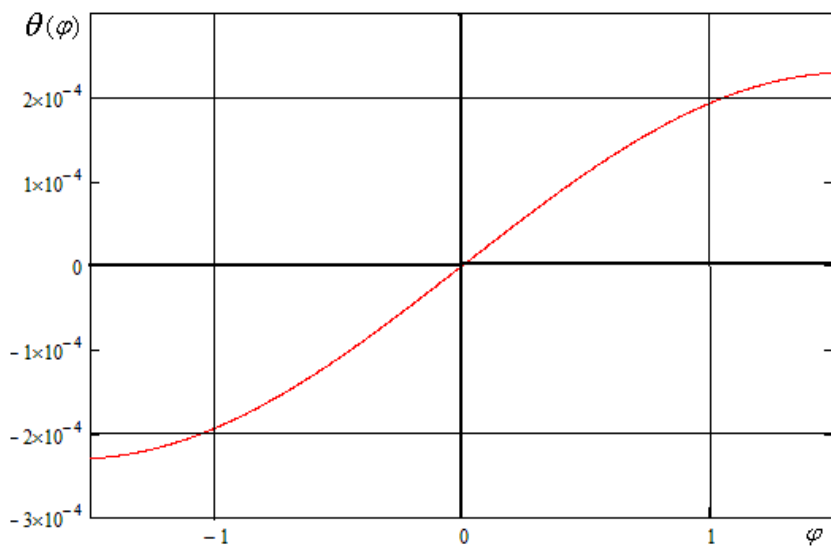
Следует отметить, что особые точки на траектории искомой нормальной формы колебаний представляют собой корни уравнения  $h = V$ , и равны амплитудным значениям  $\varphi = \varphi_0$ , которые достигаются на криволинейной траектории. Если амплитуда задана, то полная энергия системы меняется по мере уточнения решения путем последовательного вычисления функций  $x_0$ ,  $x_1$ ,  $\theta_0$  и  $\theta_1$ . Таким образом, полная энергия системы также раскладывается по малому параметру:

$$h = h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots$$

На рис. 2 изображена траектория формы связанных колебаний. Расчет проводился для следующих параметров системы:  $M = 1 \text{ кг}$ ;  $m = 0,1 \text{ кг}$ ;  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ ;  $\varepsilon = 0,1$ ;  $c_0 = 1 \text{ Н/м}$ ;  $c_1 = 0,5 \text{ Н/м}$ ;  $r = 0,1 \text{ м}$ ;  $I = 0,01 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $l = 1 \text{ м}$ ;  $a = 3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2$ ;  $b = 2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}$ .



a)

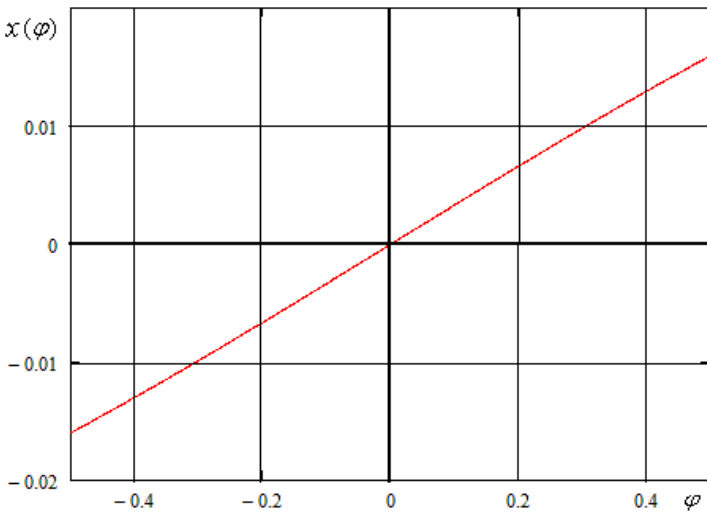


б)

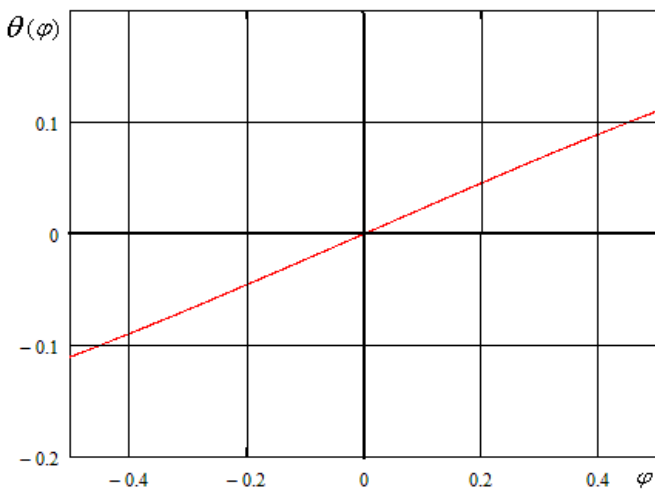
Рис. 2 – Траектория нормальной формы связанных колебаний в конфигурационном пространстве:

а)  $x = x(\varphi)$  ; б)  $\vartheta = \vartheta(\varphi)$

Траектория локализованной формы колебаний изображена на рис. 3. Расчет проводился при следующих параметрах системы:  $M=1$ ;  $m=0,1$ ;  $g=9,8$ ;  $\varepsilon=0,1$ ;  $c_0=1$ ;  $c_1=0,5$ ;  $r=0,1$ ;  $I=0,01$ ;  $l=1$ ;  $a=2$ ;  $b=2$  (размерности параметров приведены выше).



а)



б)

Рис. 3 – Траектория локализованной формы колебаний системы в конфигурационном пространстве

а)  $x = x(\varphi)$ ; б)  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\varphi)$

Следует отметить, что траектория локализованной формы колебаний в конфигурационном пространстве близка к прямой, что оказывается полезным в исследовании устойчивости этой формы колебаний.

**Анализ устойчивости нелинейных нормальных форм колебаний.**

Устойчивость формы связанных колебаний, траектория которой криволинейна, исследована с использованием численно-аналитического критерия, который является следствием классического определения устойчивости по Ляпунову [9]. При этом текущие значения возмущений сравниваются с их начальными значениями. Необходимое условие устойчивости движения можно записать следующим образом

$$\sqrt{(\Delta x(t))^2 + (\Delta \theta(t))^2} \leq \xi \sqrt{(\Delta x(0))^2 + (\Delta \theta(0))^2}, \quad (14)$$

где  $\Delta x(t) = x(t) - x_0$ ;  $\Delta \theta(t) = \theta(t) - \theta_0$ ;  $\Delta x(0) = \frac{x_0}{k}$ ;  $\Delta \theta(0) = \frac{\theta_0}{k}$ . Здесь

$x_0$  и  $\theta_0$  – начальные значения отклонения упругой подсистемы  $M$  и угла отклонения маятникового гасителя колебаний от положения равновесия. Имеется определенный произвол в выборе постоянных  $\xi$  и  $k$  [8]. Принимаем  $\xi = 10$ ,  $k = 100$ . Нарушение условия (14) на этапе интегрирования системы указывает на неустойчивость движения. Числовой расчет выполняется в точках некоторой сетки в пространстве параметров. Он проводится до тех пор, пока границы областей устойчивости/неустойчивости в выбранном масштабе сетки в пространстве параметров системы не стабилизируются.

Границы областей устойчивости для формы связанных колебаний построены на плоскости параметров  $r$  и  $A_x$ . Для определения начальных значений, фигурирующих в критерии (14), использовался расчет формы связанных колебаний, описанный выше. На рис. 4 показаны границы областей устойчивости/неустойчивости формы связанных колебаний. Расчет проводился при следующих параметрах системы:  $M = 1$ ;  $m = 0,01$ ;  $\varepsilon = 0,1$ ;  $c_0 = 1$ ;  $c_1 = 0,5$ ;  $l = 1$ ;  $g = 9,8$ ;  $a = 3$ ;  $b = 2$ .

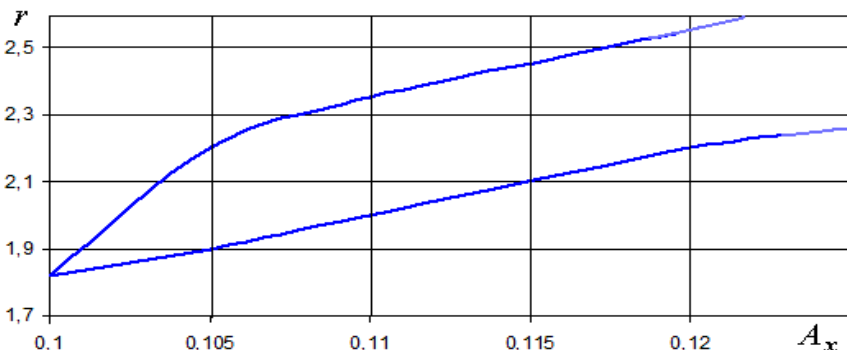


Рис. 4 – Границы области устойчивости/неустойчивости формы связанных колебаний



Неустойчивые движения наблюдаются внутри области, образованной указанными границами, а за пределами границ – устойчивые.

Поскольку траектория локализованной формы колебаний близка к прямой, то, осуществив поворот системы координат, устойчивость этой формы будем определять вариациями в ортогональном к данной траектории направлении. Амплитуды колебаний по координате  $x$  значительно меньше, чем по координатам  $\varphi$  и  $\theta$ , следовательно, целесообразно осуществлять поворот только системы координат  $\varphi O \theta$ .

Осуществляя поворот системы координат  $\varphi O \theta$  на угол  $\gamma$ , получаем вместо уравнений (2) систему уравнений в новых координатах  $\tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{\theta}$ :

$$u = A \cos \omega t;$$

$$\left\{ \begin{aligned} & (M + \varepsilon m) \ddot{x} + (c_0 + c_1)x = \varepsilon ml \left( \dot{\tilde{\varphi}} \sin \gamma + \dot{\tilde{\theta}} \cos \gamma \right)^2 \left( \tilde{\varphi} \sin \gamma + \tilde{\theta} \cos \gamma - \right. \\ & \left. - \frac{(\tilde{\varphi} \sin \gamma + \tilde{\theta} \cos \gamma)^3}{6} \right) + c_1 r \left( \tilde{\varphi} \cos \gamma - \tilde{\theta} \sin \gamma - \frac{(\tilde{\varphi} \cos \gamma - \tilde{\theta} \sin \gamma)^3}{6} \right) - \\ & - \varepsilon ml \left( \ddot{\tilde{\varphi}} \sin \gamma + \ddot{\tilde{\theta}} \cos \gamma \right) \left( 1 - \frac{(\tilde{\varphi} \sin \gamma + \tilde{\theta} \cos \gamma)^2}{2} \right); \\ & I \ddot{\varphi} = \varepsilon \left( a - b \left( \dot{\tilde{\varphi}} \cos \gamma - \dot{\tilde{\theta}} \sin \gamma \right) \right) + \\ & + \varepsilon c_1 r \left( x - r \left( \tilde{\varphi} \cos \gamma - \tilde{\theta} \sin \gamma - \frac{(\tilde{\varphi} \cos \gamma - \tilde{\theta} \sin \gamma)^3}{6} \right) \right) \times \\ & \times \left( 1 - \frac{(\tilde{\varphi} \cos \gamma - \tilde{\theta} \sin \gamma)^2}{2} \right); \\ & l \left( \ddot{\tilde{\varphi}} \sin \gamma + \ddot{\tilde{\theta}} \cos \gamma \right) + \ddot{x} \left( 1 - \frac{(\tilde{\varphi} \sin \gamma + \tilde{\theta} \cos \gamma)^2}{2} \right) + \\ & + g \left( \tilde{\varphi} \sin \gamma + \tilde{\theta} \cos \gamma - \frac{(\tilde{\varphi} \sin \gamma + \tilde{\theta} \cos \gamma)^3}{6} \right) = 0. \end{aligned} \right. \quad (15)$$

Уравнение в вариациях, определяющее устойчивость локализованной формы колебаний, имеет следующий вид

$$I(\ddot{v} \cos \gamma) - \varepsilon(-b\dot{v} \cos \gamma + c_1 r(u - rv \cos \gamma)) = 0, \quad (16)$$

где  $u$  и  $v$  – вариации переменных  $x$  и  $\varphi$  соответственно.

Применяется подход, предполагающий использование уравнения и определителей Хилла. С учетом равенства  $k_1 = tg \gamma$ , где  $k_1$  – угловой коэффициент прямолинейной аппроксимации формы колебаний, и гармонической аппроксимации решения вида, уравнение (16), после некоторых алгебраических преобразований, принимает следующий вид

$$\ddot{v} \left( \frac{I + \varepsilon b}{\sqrt{1 + k_1^2}} \right) + v \left( \frac{\varepsilon c_1 r^2}{\sqrt{1 + k_1^2}} \right) - \varepsilon c_1 r A \cos \omega t = 0. \quad (17)$$

В соответствие с теорией Флоке – Ляпунова границы областей устойчивости определяют периодические решения периода  $T$  и  $2T$  [10, 11]. Эти решения разыскиваются в виде:

$$\begin{aligned} v &= a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + a_4 \cos 4\omega t + a_5 \cos 5\omega t + \dots; \\ v &= a_1 \cos \frac{\omega}{2} t + a_2 \cos \omega t + a_3 \cos \frac{3\omega}{2} t + a_4 \cos 2\omega t + a_5 \cos \frac{5\omega}{2} t + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя разложения (18) поочередно в уравнение в вариациях (17) и группируя члены при различных гармониках, получаем системы однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложений. Приравнявая определители этих систем нулю, получаем уравнения для нахождения тех значений параметров системы, которые определяют границы областей устойчивости локализованной формы колебаний.

Границы областей устойчивости локализованной формы колебаний представлены на рис. 5. Расчет проводился для следующих параметров системы:  $g = 9,8$ ;  $\varepsilon = 0,1$ ;  $c_0 = 5$ ;  $c_1 = 1$ ;  $M = 1$ ;  $m = 0,1$ ;  $l = 1$ ;  $a = 2$ ;  $b = 2$ .

Заметим, что область неустойчивости этой формы колебаний, благоприятной для гашения колебаний упругой подсистемы, чрезвычайно узкая.

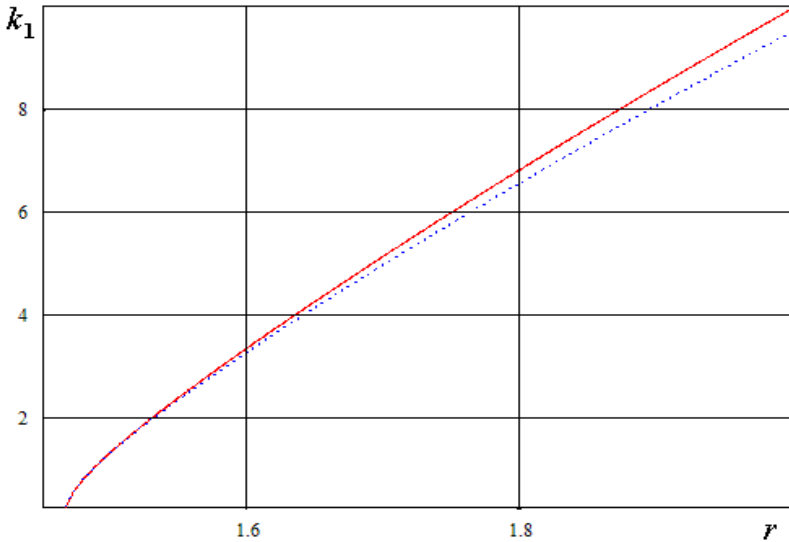


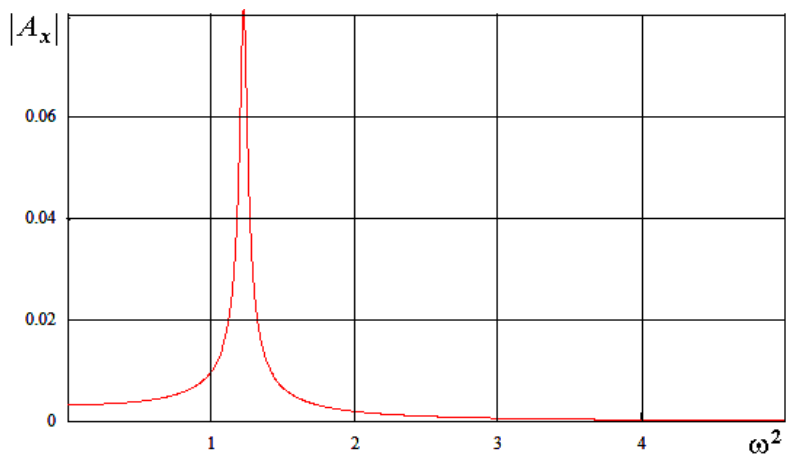
Рис. 5 – Границы областей устойчивости/неустойчивости локализованной формы колебаний.

**Построение амплитудно-частотных характеристик.** Для построения амплитудно-частотных характеристик в рассматриваемую систему вводится малая диссипация. Отбрасывая на этом этапе малые осцилляционные составляющие в законе изменения угловой скорости, запишем уравнения движения (2) в следующем виде:

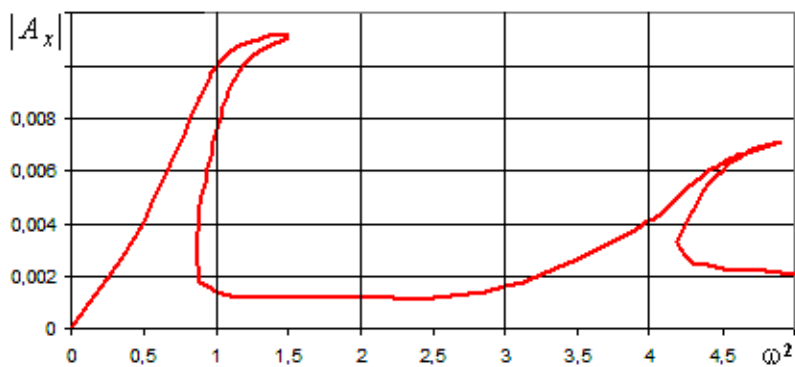
$$\left\{ \begin{array}{l} (M + \varepsilon m)\ddot{x} + \beta\dot{x} + (c_0 + c_1)x = c_1 r \sin \varphi - \varepsilon m l \left( \ddot{\theta} \left( 1 - \frac{1}{2} \theta^2 \right) - \theta \dot{\theta}^2 \right) \\ I\ddot{\varphi} = 0 \\ l\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + g\theta + \ddot{x} \left( 1 - \frac{1}{2} \theta^2 \right) = 0 \end{array} \right. \quad (19)$$

Далее используется метод гармонического баланса, в соответствии с которым  $x$  и  $\theta$  раскладываются в ряд Фурье. В расчетах ограничимся только первой гармоникой; таким образом,  $x = A_1 \sin(\omega t) + B_1 \cos(\omega t)$ ;  $\theta = A_2 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t)$ .

Рассматриваются два случая: система без маятникового гасителя колебаний и система с виброгасителем. На рис. 6 изображены амплитудно-частотные кривые (рис. 6, а – для системы без гасителя колебаний; рис. 6, б – с виброгасителем). Расчет проводился при следующих параметрах системы:  $M = 1$ ;  $m = 0,1$ ;  $\beta = 0,01$ ;  $g = 9,8$ ;  $\varepsilon = 0,1$ ;  $c_0 = 1$ ;  $c_1 = 0,5$ ;  $r = 0,1$ ;  $l = 1$ ;  $a = 5$ ;  $b = 2$ .



a)



б)

Рис. 6 – Амплитудно-частотные характеристики колебаний неидеальной системы:  
а) без гасителя; б) с виброгасителем

Заметим, что первый резонанс отвечает нелокальной форме колебаний рассмотренной ранее системы без диссипации; соответственно, второй резонанс – локализованной форме колебаний. Как следует из рисунка, наличие маятникового гасителя колебаний приводит к уменьшению в несколько раз амплитуд колебаний упругой подсистемы.

Теперь для уточнения закона изменения угловой скорости с учетом малых осцилляционных слагаемых во втором уравнении системы (2) применим метод многих масштабов [3], в соответствии с которым:

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= x(t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t, \dots; \varepsilon); & \varphi(t, \varepsilon) &= \varphi(t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t, \dots; \varepsilon); \\ \theta(t, \varepsilon) &= \theta(t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t, \dots; \varepsilon). \end{aligned} \quad (20)$$

Также используем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial T_0} \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} + 2 \frac{\partial}{\partial T_0} \frac{\partial}{\partial T_2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (21)$$

Решения для переменных  $x$ ,  $\varphi$  и  $\theta$  разыскиваются в виде степенных рядов по малому параметру:

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots; \quad \varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots; \quad \theta = \theta_0 + \varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + \dots \quad (22)$$

Для дальнейших расчетов введем замену переменных

$$x_0 = A_1 \sin(\omega t) + B_1 \cos(\omega t) = \tilde{A} \sin(\omega t + \phi).$$

Новые переменные  $\tilde{A}$  и  $\phi$  будут медленно изменяющимися функциями  $t$ . В нулевом приближении ( $\varepsilon = 0$ ) из второго уравнения системы (2) получаем, что  $\varphi_0 = \omega(T_1)T_0$ . Уравнение первого приближения для переменной  $\varphi$  имеет следующий вид

$$I \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0^2} + 2I \frac{\partial \varphi_0}{\partial T_0} \frac{\partial \varphi_0}{\partial T_1} - a + b \frac{\partial \varphi_0}{\partial T_0} - c_1 r (x_0 - r \sin \varphi_0) \cos \varphi_0 = 0. \quad (23)$$

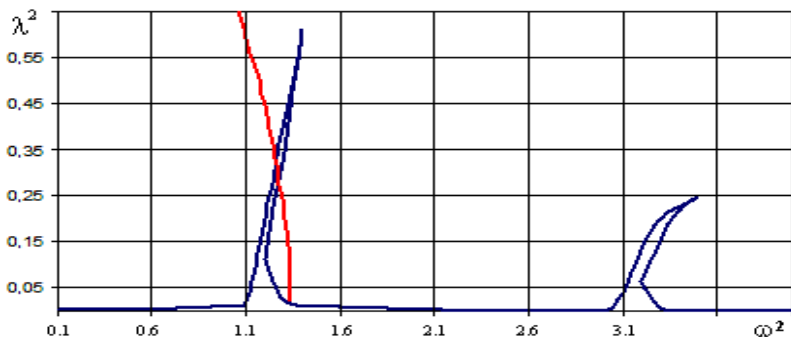
Соответствующее условие отсутствия секулярных членов

$$2I \frac{\partial \omega}{\partial T_1} + b\omega - a - c_1 r \tilde{A} \cos \phi = 0. \quad (24)$$

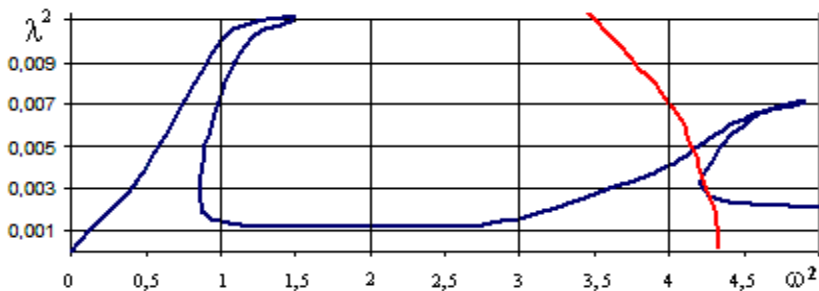
Решая дифференциальное уравнение (24), получаем зависимость  $\tilde{A}^2$  от  $\omega$

$$\tilde{A}^2 = -\frac{3I}{2\beta} \omega - \frac{a\sqrt{c_0}}{\beta\sqrt{M}} - Ce^{-\frac{3\sqrt{c_0}}{4\sqrt{M}}T_1}. \quad (25)$$

На рис. 7 изображены несколько случаев расположения графиков кривых  $L$  (характеристики источника энергии), отвечающих зависимости (25), где вычисления проводились для достаточно больших значений времени и амплитудно-частотных характеристик системы. Подбором параметров  $a$  и  $b$  можно добиться того, чтобы график  $L$  не пересекался с амплитудно-частотной кривой на частоте первого резонанса, где амплитуды колебаний наиболее велики (рис. 7, б). В случае рис. 7, а расчет проводился для следующих параметров системы:  $M=1$ ;  $m=0,1$ ;  $\beta=0,001$ ;  $g=9,8$ ;  $\varepsilon=0,1$ ;  $c_0=0,5$ ;  $c_1=0,5$ ;  $r=0,5$ ;  $l=1$ ;  $a=2$ ;  $b=2$ . Для построения графиков, изображенных на рис. 7, б, расчет проводился при следующих параметрах:  $M=1$ ;  $m=0,1$ ;  $\beta=0,01$ ;  $g=9,8$ ;  $\varepsilon=0,1$ ;  $c_0=1$ ;  $c_1=0,5$ ;  $r=0,1$ ;  $l=1$ ;  $a=5$ ;  $b=2$ .



а)



б)

Рис. 7 – Характеристики источника энергии и амплитудно-частотные характеристики

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Аврамов К. В.** Нелинейная динамика упругих систем. Том 1. Модели, методы, явления / Аврамов К. В., Михлин Ю. В. – Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. – 2010. – 704 с.
2. **Кононенко В. О.** Колебательные системы с ограниченным возбуждением / В. О. Кононенко. – М. : Наука, 1985. – 254 с.
3. **Малкин И. Г.** Некоторые задачи теории нелинейных колебаний / И. Г. Малкин. – М. : Гостехтеориздат, 1956. – 492 с.
4. **Balthazar J. M.** An overview on non-ideal vibrations / J. M. Balthazar, D. T. Mook, H. I. Weber [e. a.] // *Mechanic*. – 2003. – Vol. 38, Is. 6. – P. 613–621.
5. **Klimenko A. A.** Nonlinear normal modes in pendulum systems / A. A. Klimenko, Y. V. Mikhlin, J. Awrejcewicz // *Nonlinear Dynamics*. – 2012. – Vol. 70, Is. 1. – P. 797–813.
6. **Mikhlin Yu. V.** Lyapunov definition and stability of regular or chaotic vibration modes in systems with several equilibrium positions / Yu. V. Mikhlin, T. V. Shmatko, G. V. Manucharyan // *Computers and Structures*. – 2004. – Vol. 82. – P. 2733–2742.
7. **Mikhlin Yu. V.** Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments / Yu. V. Mikhlin, K. V. Avramov // *Applied Mechanics Review*. – 2010. – Vol. 63. – P. 4–20.
8. **Nayfeh A. H.** Nonlinear Oscillations / A. H. Nayfeh, D. T. Mook. – N-Y. : Wiley, 1979. – 704 p.
9. **Rosenberg R.** Nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom / R. Rosenberg // *Advances of Applied Mechanics*. – 1966. – Vol. 9. – P. 156–243.
10. **Sommerfeld A.** Beiträge zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre / A. Sommerfeld // *Physikal Zeitschr.* – 1902. – Vol. 3. – P. 266–286.
11. **Vakakis A. F.** Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems / A. F. Vakakis , L. I. Manevitch, Yu. V. Mikhlin [e. a.]. – 1996. – N-Y. : Wiley. – 552 p.

*А. О. Клименко, Ю. В. Міхлін, д-р фіз.-мат. наук*

### НЕЛІНІЙНІ НОРМАЛЬНІ ФОРМИ КОЛИВАНЬ У НЕІДЕАЛЬНІЙ СИСТЕМІ З МАЯТНИКОВИМ ГАСИТЕЛЕМ КОЛИВАНЬ

Розглянуто нелінійні нормальні форми коливань неідеальної системи з маятниковим гасителем коливань. Виділено зв'язану та локалізовану форми коливань. В останньому випадку основна енергія коливань зосереджена у маятнику, тому ця форма коливань є найбільш сприятливою для віброгасіння пружних коливань. Проаналізована стійкість форм коливань. Побудовано амплітудно-частотні характеристики.

*Ключові слова:* нелінійні нормальні форми коливань, неідеальна система, маятниковий віброгасник.

*A. A. Klimenko, Yu. V. Mikhlin, Dr. Sci. (Tech.)*

### NONLINEAR NORMAL VIBRATION MODES IN NON-IDEAL SYSTEM WITH PENDULUM ABSORBER

Nonlinear normal vibration modes in non-ideal system with pendulum absorber were studied. Modes of coupled and localized vibration are selected. In the last case the main part of the vibrational energy is focused in the pendulum, so this vibration mode is the most favorable for absorption of elastic vibrations. Frequency responses are constructed.

*Keywords:* nonlinear normal vibration modes, non-ideal system, the pendulum absorber.

The system with limited power supply (or non-ideal system) is characterized by interaction of source of energy and elastic sub-system which is un-

der action of the source. The most interesting effect appearing in non-ideal systems is the Sommerfeld effect [10], when in the elastic sub-system it is appeared the stable resonance regime with large amplitudes. Resonance dynamics of the non-ideal systems was first analytically described by V. Kononenko [4]. Then investigations on the subject were continued in different publications, in particular, in papers [2, 8]. Use of absorbers permits to reduce amplitudes of resonance elastic vibrations. Here the non-ideal system with pendulum absorber is considered. Concept of nonlinear normal modes [6, 9, 11] is used in this investigation.

It is considered the non-ideal system containing the linear elastic sub-system which vibrates under external excitation, and there is the back influence of the sub-system to the energy source. The non-ideal system contains the pendulum absorber too. The model under consideration is presented in Fig. 1.

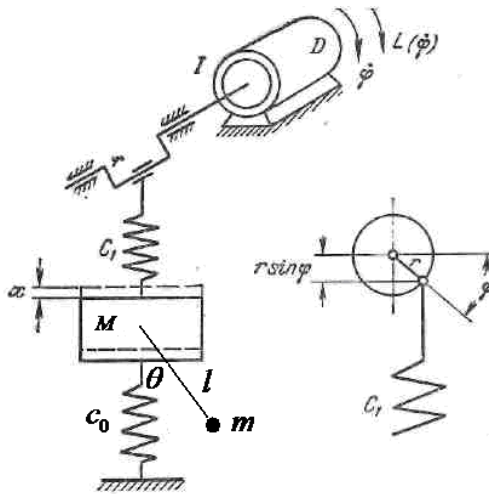


Fig. 1 – The mechanical system under consideration

The system potential and kinetic energies are the following:

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon m \left[ (\dot{x} + l \dot{\theta} \cos \theta)^2 + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \right]; \quad (1)$$

$$V = \frac{1}{2} c_0 x^2 + \frac{1}{2} c_1 (x - r \sin \varphi)^2 + \varepsilon m g l (1 - \cos \theta).$$

Small parameter  $\varepsilon$  characterizes a smallness of the absorber mass with respect to mass of elastic sub-system and a smallness of vibration components in variability in time of angle  $\varphi$  velocity with respect to the main constant component. One selects two vibration modes:

- mode of coupled vibrations when amplitudes of all sub-systems are comparable;
- localized vibration mode with small amplitudes of the elastic sub-system



and large vibrations of pendulum absorber. The mode is the most appropriate for absorption of elastic vibrations.

The vibration modes are constructed in the form of trajectories in the system configuration space:  $x = x(\varphi)$ ,  $\theta = \theta(\varphi)$ . These trajectories are presented as power series by the small parameter  $\varepsilon$  and  $\sin \varphi$ :

$$x = x(\varphi) = x_0 + \varepsilon x_1 + \dots; \theta = \theta(\varphi) = \theta_0 + \varepsilon \theta_1 + \dots, \quad (2)$$

$$x_0 = a_0 + a_1 \sin \varphi + a_2 (\sin \varphi)^2 + \dots; x_1 = \alpha_0 + \alpha_1 \sin \varphi + \alpha_2 (\sin \varphi)^2 + \dots; \quad (3)$$

$$\theta_0 = b_0 + b_1 \sin \varphi + b_2 (\sin \varphi)^2 + \dots; \theta_1 = \beta_0 + \beta_1 \sin \varphi + \beta_2 (\sin \varphi)^2 + \dots$$

Trajectory of the mode of coupled vibrations is curvilinear, and trajectory of the localized vibration mode is near-rectilinear.

Stability of the vibration mode of coupled vibrations is analyzed by the numerical-analytical criterion [7] which is a consequence of the classical stability definition by Lyapunov. Boundaries of the stability/ instability regions in the place of the parameters  $r$  and  $A_x$  are obtained (Fig. 2). Unstable solutions are observed inside of the presented region.

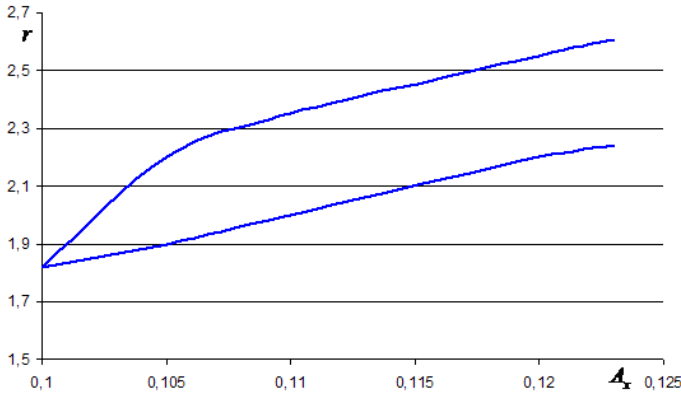
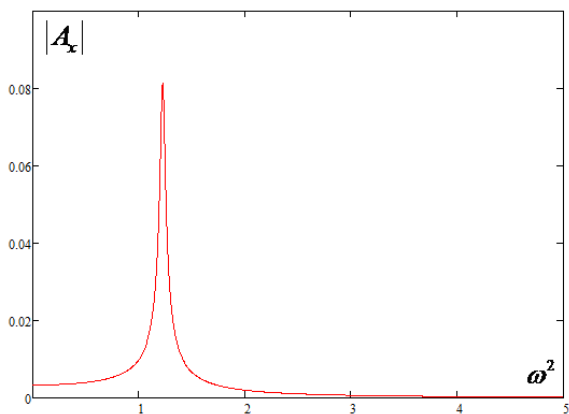


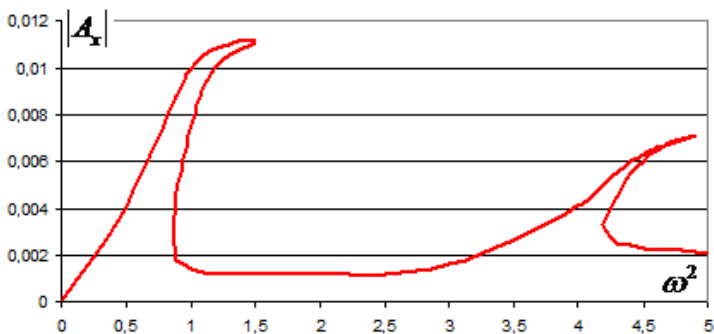
Fig. 2 – Boundaries of region of stability/ instability of mode of coupled vibrations

Trajectory of the localized mode is near-rectilinear, and stability of the mode is determined by variations which are orthogonal to the mode. Corresponding equation can be presented as Hill equation, and the method of the Hill determinants is used. It is obtained that region of instability of the mode in the parameter place is very narrow.

To construct the system frequency response a small dissipation is taken into account. Then the harmonic balance method is used. Frequency response calculated for some concrete parameters of the system without absorber is shown in Fig. 3, a. Frequency response for the system with pendulum absorber is presented in Fig. 3, b, where the first resonance



a)



b)

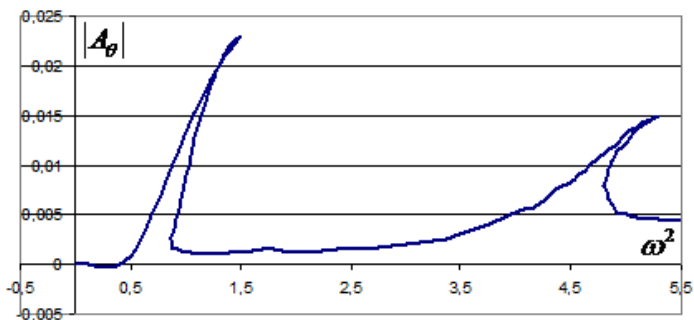


Fig. 3 – Frequency responses of the non-ideal system

corresponds to the considered earlier non-local vibration mode in the system without dissipation, and the second resonance corresponds to the localized mode. Note that a use of the pendulum absorber permits to reduce vibration amplitude of the elastic sub-system in few times.

Then the multiple scale method [8] is used to precise the angle velocity change. Dependence of the vibration amplitude on the system parameters, that is, the energy source characteristic, is obtained.

Few cases of disposition of the energy source characteristics and frequency responses are presented in Fig. 4. It can be seen, that by choice of the system parameters it is possible to obtain the situation, when the characteristic does not intersect a region of the first resonance where vibration amplitudes are large (Fig. 4, b).

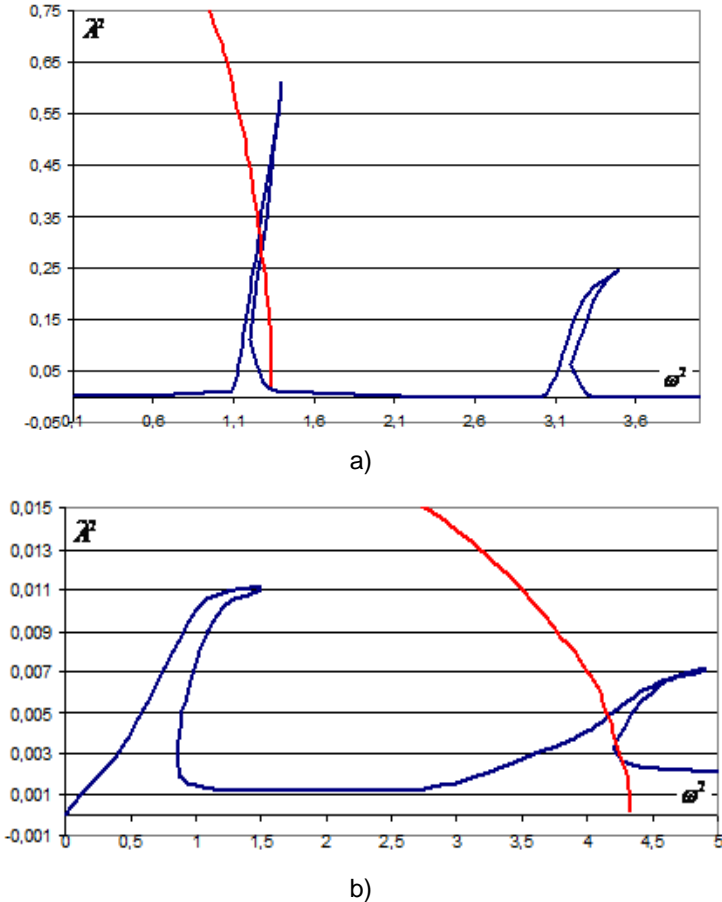


Fig. 4 – Characteristics of source of energy and frequency responses

## REFERENCES

1. **Avramov K. V.** Nonlinear dynamics of elastic systems. Vol. 1. Models, methods, phenomena / Avramov K. V., Mikhlin Yu. V. – Moscow-Izhevsk: Regular and chaotic dynamics. – 2010. – 704 p. (in Russian)

2. **Kononenko V. O.** Vibration systems with limited power supply / M. : Nauka, 1985. – 254 p. (in Russian)
3. **Malkin I. G.** Some problems of the nonlinear vibration theory / I. G. Malkin. – M. : Gostekhteorizdat, 1956. – 492 p.
4. **Klimenko A. A.** Nonlinear normal modes in pendulum systems / A. A. Klimenko, Y. V. Mikhlin, J. Awrejcewicz // Nonlinear Dynamics. – 2012. – Vol. 70, Is. 1. – P. 797–813 (in Russian).
5. **Balthazar J. M.** An overview on non-ideal vibrations / J. M. Balthazar, D. T. Mook, H. I. Weber [e. a.] // Mechanics. – 2003. – Vol. 38, Is. 6. – P. 613–621.
6. **Klimenko A. A.** Nonlinear normal modes in pendulum systems / A. A. Klimenko, Y. V. Mikhlin, J. Awrejcewicz // Nonlinear Dynamics. – 2012. – Vol. 70, Is. 1. – P. 797–813.
7. **Mikhlin Yu. V.** Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments / Yu. V. Mikhlin, K. V. Avramov // Applied Mechanics Review. – 2010. – Vol. 63. – P. 4–20.
8. **Mikhlin Yu. V.** Lyapunov definition and stability of regular or chaotic vibration modes in systems with several equilibrium positions / Yu. V. Mikhlin, T. V. Shmatko, G. V. Manucharyan // Computers and Structures. – 2004. – Vol. 82. – P. 2733–2742.
9. **Nayfeh A. H.** Nonlinear Oscillations / A. H. Nayfeh, D. T. Mook. – N-Y. : Wiley, 1979. – 704 p.
10. **Rosenberg R.** Nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom / R. Rosenberg // Advances of Applied Mechanics. – 1966. – Vol. 9. – P. 156–243.
11. **Sommerfeld A.** Beiträge zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre / A. Sommerfeld // Physikal Zeitschr. – 1902. – Vol. 3. – P. 266–286.
12. **Vakakis A. F.** Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems / A. F. Vakakis, L. I. Manevitch, Yu. V. Mikhlin [e. a.]. – 1996. – N-Y. : Wiley. – 552 p.

*Национальный технический университет  
«Харьковский политехнический институт»,  
Харьков, Украина.*

*Поступила в редколлегию 01.12.2013*