

УДК 539.3

*В. Ф. Мейш, д-р фіз.-мат. наук, Ю. А. Мейш, канд. фіз.-мат. наук,
В. М. Мельник*

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ КОНІЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ ПРИ ДІЇ РОЗПОДІЛЕНОГО ІМПУЛЬСНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Розглянуто задачу про неосесиметричні коливання конічної оболонки змінної товщини при дії нестационарного навантаження. Приведено постановку та розроблено алгоритм розв'язку поставленої задачі. Система диференціальних рівнянь базується на застосуванні теорії оболонок типу Тимошенка. Наведено конкретний приклад розрахунку динамічної поведінки конічної оболонки змінної товщини при нестационарному навантаженні.

Ключові слова: конічні оболонки, змінна товщина, теорія оболонок типу Тимошенка, вимушені коливання, чисельний метод.

Вступ. Постановка і розв'язок задач статичної невідповідності по товщині конічних оболонок достатньо повно викладені в монографіях [1, 3]. Вільні коливання оболонок обертання змінної товщини розглядалися в [2, 9]. У наведених роботах, в основному, при розв'язку вихідних задач застосовувалися рівняння теорії оболонок в класичній постановці. Роботи [6–8] присвячені вимушеним осесиметричним та неосесиметричним коливанням конічних оболонок змінної товщини при нестационарних навантаженнях.

Метою даної роботи є постановка та чисельний розв'язок задач для дослідження неосесиметричних коливань конічних оболонок змінної товщини при нестационарних навантаженнях.

Постановка задачі. Розглядається задача динамічної поведінки конічних оболонок змінної товщини при дії нестационарного навантаження. Припускається, що неоднорідна по товщині конічна оболонка знаходиться під дією внутрішнього розподіленого навантаження $P_3(s_1, s_2, t)$, де $s_1 = A_1\alpha_1$, $s_2 = A_2\alpha_2$, t – просторові та часова координати; $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2$ – відповідно, коефіцієнти першої квадратичної форми та криволінійні координати серединної поверхні оболонки.

При розгляді конічних оболонок використовується система координат s_1, s_2, t , причому координата s_1 відраховується від вершини конуса. В деяких випадках, зокрема, для зрізаних конічних оболонок, раціональним є використання координати s_1 , яка відраховується від краю оболонки.

Коефіцієнти першої квадратичної форми та кривини координатної поверхні записуються наступним чином:

$$A_1 = 1, \quad A_2 = R_s, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = \cos \theta / R_s, \quad (1)$$

де θ – кут конусності; s_1 – текуча координата; $R_s = R_0 + s_1 \sin \theta$, R_0 – радіус оболонки при $s_1 = s_{10}$.

При побудові математичної моделі процесу динамічного деформування конічної оболонки змінної товщини використовується геометрично та фізично лінійний варіант теорії оболонок типу Тимошенка [4, 5]. Припускається, що товщина оболонки змінюється вздовж координати s_1 , тобто $h = h(s_1)$.

Рівняння коливань конічної оболонки змінної товщини записуються у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 T_{11}) - \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} T_{22} + \frac{\partial S}{\partial s_2} &= \rho h(s_1) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 S) + \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} S + \frac{\partial T_{22}}{\partial s_2} + k_2 T_{23} &= \rho h(s_1) \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 T_{13}) + \frac{\partial T_{23}}{\partial s_2} - k_2 T_{22} + P_3 &= \rho h(s_1) \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 M_{11}) - \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} M_{22} + \frac{\partial H}{\partial s_2} - T_{13} &= \frac{\rho h^3(s_1)}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 H) + \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} H + \frac{\partial M_{22}}{\partial s_2} - T_{23} &= \frac{\rho h^3(s_1)}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Зв'язок величин зусилля – моменти з відповідними величинами деформацій у випадку ортотропного матеріалу оболонки мають вигляд:

$$\begin{aligned} T_{11} &= B_{11}(s_1) \varepsilon_{11} + B_{12}(s_1) \varepsilon_{22}; \quad T_{22} = B_{21}(s_1) \varepsilon_{11} + B_{22}(s_1) \varepsilon_{22}; \\ S &= B_s(s_1) \varepsilon_{12}; \quad T_{13} = B_{13}(s_1) \varepsilon_{13}; \quad T_{23} = B_{23}(s_1) \varepsilon_{23}; \\ M_{11} &= D_{11}(s_1) \kappa_{11} + D_{12}(s_1) \kappa_{12}; \quad M_{22} = D_{21}(s_1) \kappa_{11} + D_{22}(s_1) \kappa_{22}; \\ H &= D_s(s_1) \kappa_{12}, \end{aligned} \quad (3)$$

де:

$$\begin{aligned} B_{11}(s_1) &= \frac{E_1 h(s_1)}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad B_{12}(s_1) = \frac{E_1 h(s_1) \nu_2}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad B_{22}(s_1) = \frac{E_2 h(s_1)}{1 - \nu_1 \nu_2}; \\ B_{21}(s_1) &= \frac{E_2 h(s_1) \nu_1}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad B_s(s_1) = G_{12} h(s_1); \quad B_{13}(s_1) = G_{13} h(s_1); \end{aligned}$$

$$B_{13}(s_1) = G_{23}h(s_1); D_{11}(s_1) = \frac{E_1 h^3(s_1)}{12(1-\nu_1\nu_2)}; D_{12}(s_1) = \frac{E_1 h^3(s_1)\nu_2}{12(1-\nu_1\nu_2)};$$

$$D_{22}(s_1) = \frac{E_2 h^3(s_1)}{12(1-\nu_1\nu_2)}; D_{21}(s_1) = \frac{E_2 h^3(s_1)\nu_1}{12(1-\nu_1\nu_2)}; D_s(s_1) = G_{12} \frac{h^3(s_1)}{12}.$$

Деформаційні співвідношення у випадку конічної оболонки мають вигляд:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial s_1}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial s_2} + \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} u_1 + k_2 u_3; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial s_2} + \frac{\partial u_2}{\partial s_1} - \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} u_2;$$

$$\varepsilon_{13} = \varphi_1 + \frac{\partial u_3}{\partial s_1}; \quad \varepsilon_{23} = \varphi_2 + \frac{\partial u_3}{\partial s_2} - k_2 u_2; \quad (4)$$

$$\kappa_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}, \quad \kappa_{22} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} + \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} \varphi_1, \quad \kappa_{12} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1} - \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} \varphi_2.$$

Рівняння коливань неоднорідної по товщині конічної оболонки (2)–(4) доповнюються відповідними граничними умовами по координаті s_1 при $s_1 = s_{10}$ і $s_1 = s_N$. Початкові умови при $t = 0$ покладалися:

$$u_1 = u_2 = u_3 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0;$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

Чисельний алгоритм. Чисельний алгоритм розв'язання початково-крайової задачі (2)–(5) засновано на використанні інтегро-інтерполяційного метода побудови різницевих співвідношень по просторовим координатам s_1, s_2 та явній апроксимації по часовій координаті t [4, 5]. Інтегруємо вихідні рівняння коливань (2) по області $D_1 = \{s_{1i-1/2} \leq s_1 \leq s_{1i+1/2}; s_{2j-1/2} \leq s_2 \leq s_{2j+1/2}\}$. При цьому, інтегральні співвідношення для рівнянь (2) мають вигляд:

$$\int_{s_{1i-1/2}}^{s_{1i+1/2}} \int_{s_{2j-1/2}}^{s_{2j+1/2}} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 T_{11}) - \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} T_{22} + \frac{\partial S}{\partial s_2} \right] ds_1 ds_2 =$$

$$= \int_{s_{1i-1/2}}^{s_{1i+1/2}} \int_{s_{2j-1/2}}^{s_{2j+1/2}} \left[\rho h(s_1) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right] ds_1 ds_2 ;$$

$$\begin{aligned}
& \int_{s_{1i-1/2}}^{s_{1i+1/2}} \int_{s_{2j-1/2}}^{s_{2j+1/2}} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 S) + \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} S + \frac{\partial T_{22}}{\partial s_2} + k_2 T_{23} \right] ds_1 ds_2 = \\
& = \int_{s_{1i-1/2}}^{s_{1i+1/2}} \int_{s_{2j-1/2}}^{s_{2j+1/2}} \left[\rho h(s_1) \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right] ds_1 ds_2 ; \\
& \int_{s_{1i-1/2}}^{s_{1i+1/2}} \int_{s_{2j-1/2}}^{s_{2j+1/2}} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 T_{13}) + \frac{\partial T_{23}}{\partial s_2} - k_2 T_{22} + P_3 \right] ds_1 ds_2 = \\
& = \int_{s_{1i-1/2}}^{s_{1i+1/2}} \int_{s_{2j-1/2}}^{s_{2j+1/2}} \left[\rho h(s_1) \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \right] ds_1 ds_2 ; \tag{6} \\
& \int_{s_{1i-1/2}}^{s_{1i+1/2}} \int_{s_{2j-1/2}}^{s_{2j+1/2}} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 M_{11}) - \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} M_{22} + \frac{\partial H}{\partial s_2} - T_{13} \right] ds_1 ds_2 = \\
& = \int_{s_{1i-1/2}}^{s_{1i+1/2}} \int_{s_{2j-1/2}}^{s_{2j+1/2}} \left[\frac{\rho h^3(s_1)}{12} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \right] ds_1 ds_2 ; \\
& \int_{s_{1i-1/2}}^{s_{1i+1/2}} \int_{s_{2j-1/2}}^{s_{2j+1/2}} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 H) - \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} H + \frac{\partial M_{22}}{\partial s_2} - T_{23} \right] ds_1 ds_2 = \\
& = \int_{s_{1i-1/2}}^{s_{1i+1/2}} \int_{s_{2j-1/2}}^{s_{2j+1/2}} \left[\frac{\rho h^3(s_1)}{12} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} \right] ds_1 ds_2 .
\end{aligned}$$

Після стандартних перетворень в (6) отримаємо наступні різниці співвідношення:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A_{2i}} \frac{(A_2 T_{11}^n)_{i+1/2, j} - (A_2 T_{11}^n)_{i-1/2, j}}{\Delta s_1} - \Psi_i T_{22i, j}^n + \\
& + \frac{S_{i, j+1/2} - S_{i, j-1/2}}{\Delta s_2} = \rho h(s_{1i}) (u_{1i, j}^n)_{\bar{ii}} ; \\
& \frac{1}{A_{2i}} \frac{(A_2 S^n)_{i+1/2, j} - (A_2 S^n)_{i-1/2, j}}{\Delta s_1} + \Psi_i S_{i, j}^n +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{T_{22i,j+1/2}^n - T_{22i,j-1/2}^n}{\Delta s_2} + k_{2i} \frac{T_{23i,j+1/2}^n + T_{23i,j-1/2}^n}{2} = \rho h(s_{1i})(u_{2i,j}^n)_{\bar{t}}; \\
& \frac{1}{A_{2i}} \frac{(A_2 T_{13}^n)_{i+1/2,j} - (A_2 T_{13}^n)_{i-1/2,j}}{\Delta s_1} + \frac{T_{23i,j+1/2}^n - T_{23i,j-1/2}^n}{\Delta s_2} - \\
& - k_{2i} \frac{T_{22i,j+1/2}^n + T_{22i,j-1/2}^n}{2} + P_{3i,j}^n = \rho h(s_{1i})(u_{3i,j}^n)_{\bar{t}}; \\
& + \frac{T_{23i,j+1/2}^n - T_{23i,j-1/2}^n}{\Delta s_2} - k_{2i} \frac{T_{22i,j+1/2}^n + T_{22i,j-1/2}^n}{2} + P_{3i,j}^n = \rho h(s_{1i})(u_{3i,j}^n)_{\bar{t}}; \\
& \frac{1}{A_{2i}} \frac{(A_2 M_{11}^n)_{i+1/2,j} - (A_2 M_{11}^n)_{i-1/2,j}}{\Delta s_1} - \Psi_i \frac{M_{22i,j+1/2}^n + M_{22i,j-1/2}^n}{2} + \\
& + \frac{H_{i,j+1/2}^n - H_{i,j-1/2}^n}{\Delta s_2} - \frac{T_{13i+1/2,j}^n + T_{13i-1/2,j}^n}{2} = \rho h(s_{1i})(\varphi_{1i,j}^n)_{\bar{t}}; \\
& \frac{1}{A_{2i}} \frac{(A_2 H^n)_{i+1/2,j} - (A_2 H^n)_{i-1/2,j}}{\Delta s_1} + \Psi_i \frac{H_{i,j+1/2}^n + H_{i,j-1/2}^n}{2} + \\
& + \frac{M_{22i,j+1/2}^n - M_{22i,j-1/2}^n}{\Delta s_2} - \frac{T_{23i,j+1/2}^n + T_{23i,j-1/2}^n}{2} = \rho h(s_{1i})(\varphi_{2i,j}^n)_{\bar{t}},
\end{aligned} \tag{7}$$

де $\Psi_i = \left(\frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds} \right)_i$. Позначення різницевих похідних в дискретних рів-

няннях (7) та різницеві співвідношення для величин зусиль – моментів та відповідних деформацій приймаються згідно [4, 5].

Чисельні результати. Як числовий приклад, розглядалася задача динамічної поведінки кінцевої панелі змінної товщини при дії нормального розподіленого навантаження $P_3(s_1, s_2, t)$. Покладається, що три краї кінцевої панелі жорстко защемлені, а край в перерізі $s_1 = s_{10}$ край вільний. У випадку жорсткого защемлення покладаємо $u_1 = u_2 = u_3 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0$. У випадку вільного краю при $s_1 = s_{10}$ виконуються умови $T_{11} = S = T_{13} = M_{11} = H = 0$. Нестационарне імпульсне навантаження за-
давалося у вигляді $P_3(s_1, s_2, t) = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)]$, де A – амплітуда навантаження; T – тривалість навантаження.

Товщина панелі визначається як лінійна функція координати s_1

$$h(s_1) = h(s_{10}) + [h(s_{1N}) - h(s_{10})] \frac{s_1}{L}, \text{ де } s_{1N} - s_{10} = L, \quad s_{10} \leq s_1 \leq s_{1N}.$$

Вихідна задача розв'язувалася при наступних геометричних та фізико-механічних параметрах: $\theta_1 = \pi/12$; $\theta_2 = \pi/6$; $\theta_3 = \pi/4$; $R_0 = 0,3 \text{ м}$; $L = 0,4 \text{ м}$; $\alpha_2 \in [-\pi/6; \pi/6]$; $h(s_{10}) = 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$; $h(s_{1N}) = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$; $E = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}$; $\nu = 0,3$; $\rho = 2,7 \text{ кг/м}^3$; $E/A = 7 \cdot 10^4$; $T = 0,625 L/c$; $c^2 = E/[\rho(1-\nu^2)]$.

На рис. 1–5 наведені результати розрахунків для оболонок змінної товщини. На рис. 1 представлені залежності переміщення u_3 по просторовій координаті s_1 в перерізі $s_2 = 0$ при різних кутах конусності вихідної оболонки. Крива з індексом 1 відповідає випадку $\theta_1 = \pi/12$ в момент часу $t_1 = 16,75T$; крива 2 – $\theta_2 = \pi/6$ в момент часу $t_2 = 18,5T$; крива 3 – $\theta_3 = \pi/4$ в момент часу $t_3 = 16,25T$.

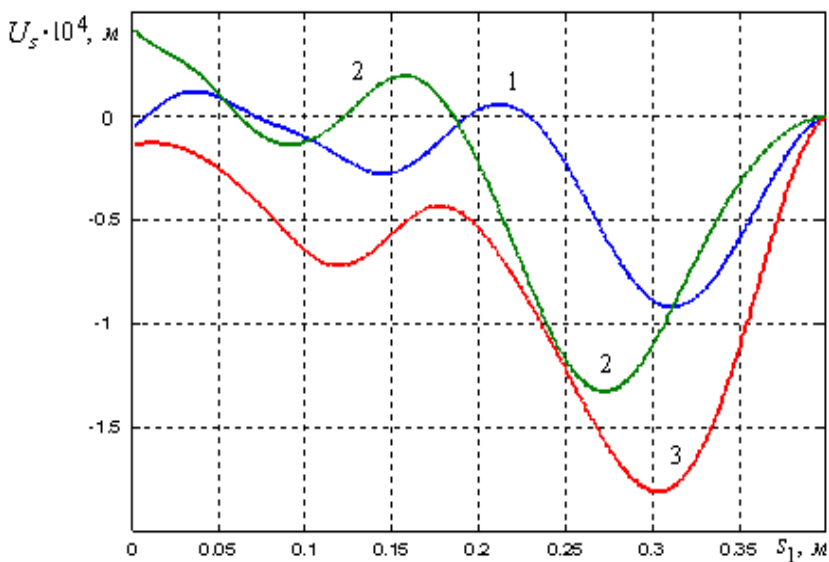


Рис. 1 – Залежності величин u_3 від просторової координати s_1

Враховуючи, що вихідна задача є багатопараметричною (в різні моменти часу t кінематичні та силові параметри приймають різні значення по координатам s_1 та s_2), в подальшому будемо розглядати залежності вихідних величин в моменти часу досягнення ними максимальних значень по модулю.

На рис. 2 наведені залежності величин ε_{11} у вказаному перерізі $s_2 = 0$. На рисунку криві, згідно вище прийнятим позначенням, відповідають моментам часу $t_1 = 1,0T$; $t_2 = 1,2T$; $t_3 = 1,4T$. При $s_1 = 0$ величини $\varepsilon_{11}(t_1) = -1,07 \cdot 10^{-4}$; $\varepsilon_{11}(t_2) = -1,08 \cdot 10^{-4}$; $\varepsilon_{11}(t_3) = -1,16 \cdot 10^{-4}$. Якісна відмінність кривої 1 від кривих 2, 3 пояснюється різним часом досягнення максимальних значень по модулю величин ε_{11} .

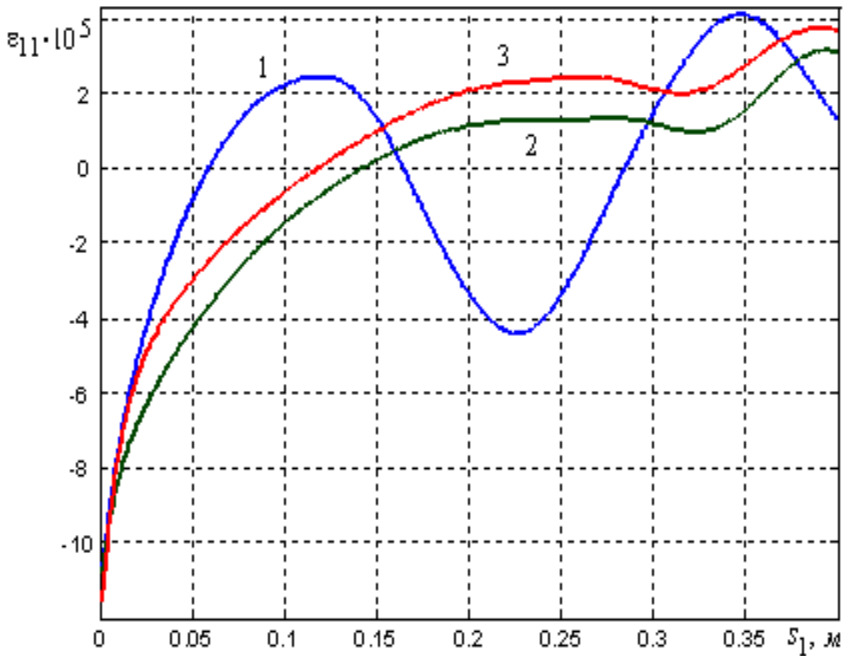


Рис. 2 – Залежності величин ε_{11} від просторової координати s_1

На рис. 3 наведені залежності величин σ_{22} у вказаному перерізі $s_2 = 0$. На рисунку криві, згідно вище прийнятим позначенням, відповідають моментам часу $t_1 = 1,05T$, $t_2 = 1,1T$, $t_3 = 1,45T$.

На рис. 4, 5 наведені залежності величин ε_{11} та ε_{22} при вказаних кутах конусності по часовій координаті в перерізі $s_1 = s_{10}$ (вільний край). Крива 1 відповідає випадку $\theta_1 = \pi/12$; крива 2 – $\theta_2 = \pi/6$; крива 3 – $\theta_3 = \pi/4$.

Як бачимо з наведених на рис. 1–5 кривих, чітко проявляється вплив геометрії (кута конусності) на напружено-деформований стан вихідної конструкції. Із збільшенням кута конусності зростають максимальні значення величин u_3 , ε_{11} , ε_{22} , σ_{22} .

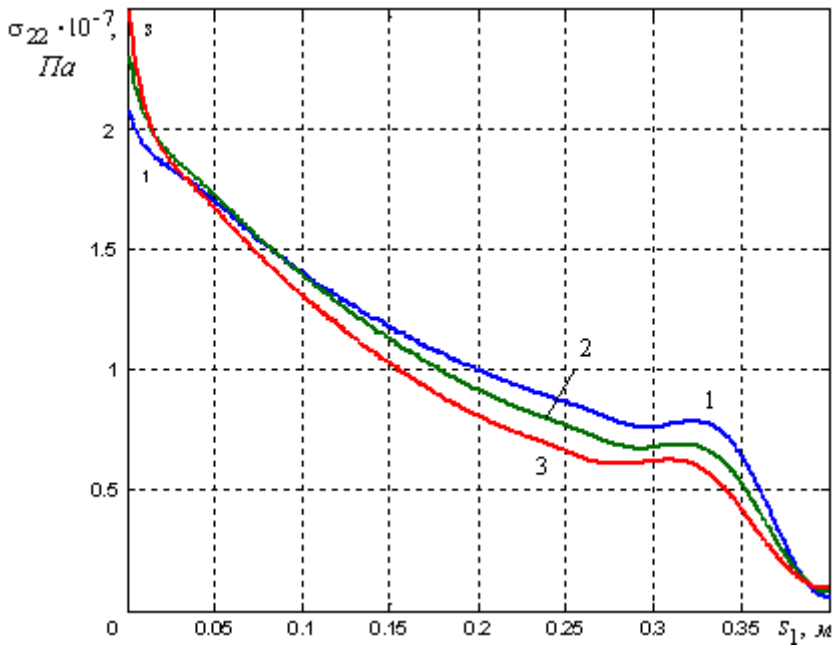


Рис. 3 – Залежності величин σ_{22} від просторової координати s_1

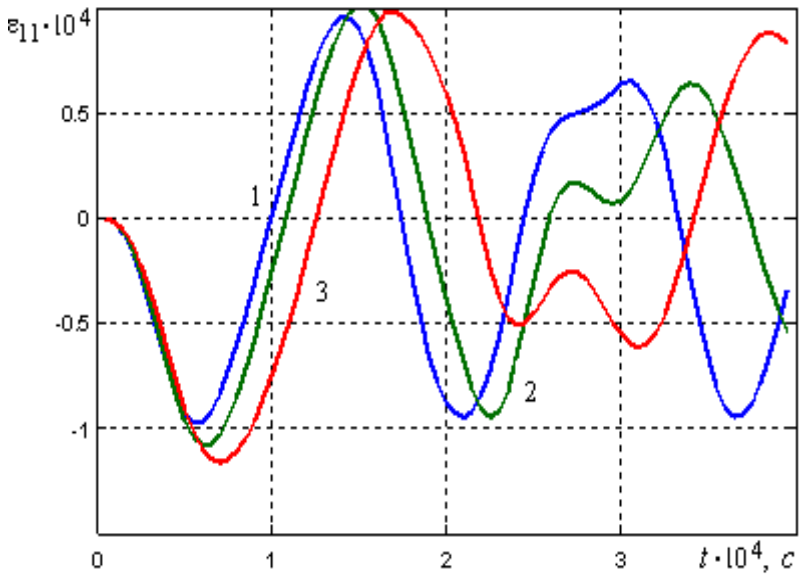


Рис. 4 – Залежності величин ϵ_{11} від часової координати t

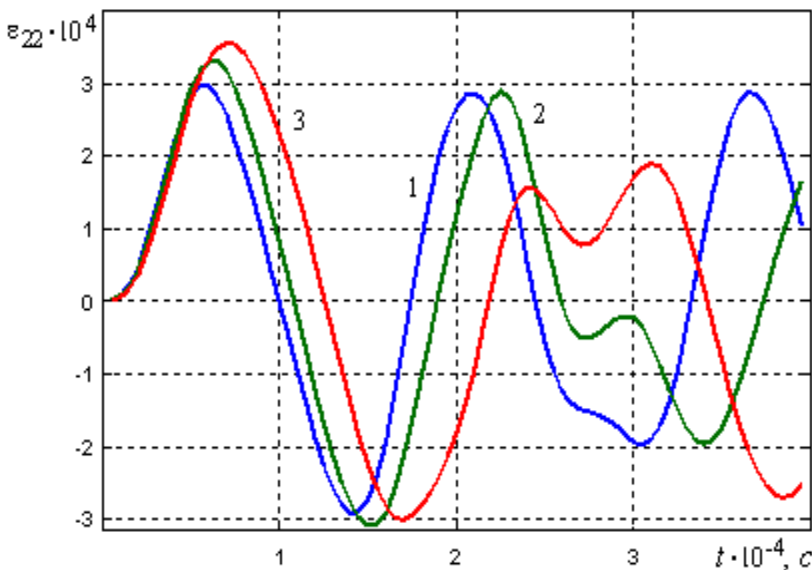


Рис. 5 – Залежності величин ε_{22} від часової координати t

Висновки. В роботі наведено постановку задачі про неосесиметричне коливання конічної оболонки змінної товщини. Математична модель вихідної задачі базується на застосуванні теорії оболонок типу Тимошенка. В основу чисельного алгоритму поставленої задачі покладено застосування методу скінченних різниць з використанням інтеро-інтерполяційного методу побудови різницевих схем по просторовим координатам та явній різницевій апроксимації по часовій координаті. Розглянуто задачу про вимушені коливання конічної панелі змінної товщини з вільним краєм при дії розподіленого імпульсного навантаження. Проведено детальний аналіз напружено-деформованого стану вихідної конструкції. Показано якісну та кількісну залежність кінематичних та силових величин, які характеризують напружено-деформований стан неоднорідної оболонки, від її геометричних параметрів.

Представляють інтерес дослідження нестационарних задач в аналогічній постановці при інших граничних умовах, а також розв'язок неосесиметричних задач про вимушені коливання оболонок більш складної геометрії.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Григоренко Я. М.** Теория оболочек переменной жесткости / Методы расчета оболочек / Я. М. Григоренко, А.Т. Василенко. – К. : Наук. думка, 1982. – Т. 4. – 544 с.
2. **Григоренко Я. М.** Свободные колебания оболочечных конструкций / Я. М. Григоренко, Е. И. Беспалова, А. Б. Китайгородский, А. И. Шинкарь. – К. : Наук. думка, 1986. – 172 с.

3. **Григоренко Я. М.** Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко. – М. : Наука, 1992. – 336 с.
4. **Головко К. Г.** Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / К. Г. Головко, П. З. Луговой, В. Ф. Мейш; под ред. акад НАН Украины А. Н. Гузя. – К. : Изд. полигр. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.
5. **Луговой П. З.** Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций / П. З. Луговой, В. Ф. Мейш, Э. А. Штанцель. – К. : Изд-во. полигр. центр «Киевский ун-т», 2005. – 537 с.
6. **Мейш В. Ф.** Осесимметричные колебания конических оболочек переменной толщины при действии нестационарной нагрузки / В. Ф. Мейш, В. М. Мельник // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Д. : Вид-во ДНУ, 2012. – Вып. 18. – С. 132–139.
7. **Мейш В. Ф.** О динамическом поведении конической оболочки переменной толщины на упругом основании / В. Ф. Мейш, П. З. Луговой, В. М. Мельник // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Д. : Вид-во ДНУ. – Вып. 19. – С. 219–225.
8. **Мейш В. Ф.** До розрахунку неосесиметричних коливань конічних оболонок змінної товщини при нестационарних навантаженнях / В. Ф. Мейш, В. М. Мельник // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: Фіз.-мат. науки. – К. : Вид-во КНУ, 2012. – Вип. 3. – С. 83–86.
9. **Преображенский И. Н.** Устойчивость и колебания конических оболочек / И. Н. Преображенский, В. З. Гришак. – М. : Машиностроение, 1986. – 240 с.

*В. Ф. Мейш, д-р физ.-мат. наук, Ю. А. Мейш, канд. физ.-мат. наук,
В. М. Мельник*

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ИМПУЛЬСНОЙ НАГРУЗКИ

Рассмотрена задача о неосесимметричных колебаниях конической оболочки переменной толщины при действии нестационарной нагрузки. Приведена постановка и разработан алгоритм решения поставленной задачи. Система дифференциальных уравнений основывается на применении теории оболочек типа Тимошенко. Приведен конкретный пример расчета динамического поведения конической оболочки переменной толщины при нестационарной нагрузке.

Ключевые слова: конические оболочки, переменная толщина, теория оболочек типа Тимошенко, вынужденные колебания, численный метод.

*V. F. Meish Dr. Sci. (Phys.-Math.), Yu. A. Meish, PhD. (Phys.-Math.),
V. M. Melnik*

NUMERICAL SIMULATION OF DYNAMIC BEHAVIOR OF VARIABLE THICKNESS CONICAL SHELL UNDER THE ACTION OF DISTRIBUTED IMPULSIVE LOAD

A problem of nonaxisymmetric vibrations of variable thickness conical shell under nonstationary distributed load is considered. Postulation and numerical algorithm for the solution of the problem are represented. The system of differential equations is based on the Timoshenko's type shell theory. As an example the results of analysis of nonstationary vibrations of variable thickness conical shells are presented.

Keywords: conical shells, variable thickness, Timoshenko's type shell theory, forced vibrations, numerical method.

Problem statement. In the present paper, the problem formulation of the dynamic behavior of the conical shells of variable thickness under the action of the nonstationary loading is considered. It is assumed that a conical shell is loaded of the normal distributed loading $P_3(s_1, s_2, t)$, where s_1, s_2 and t are the spatial and temporal coordinates.

Geometrically and physically linear variant of the Timoshenko's type shell theory is used for constructing of a mathematical model of the dynamic deformation process of the conical shell of variable thickness [1, 4].

The vibration equations of the conical shells have the following form:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 T_{11}) - \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} T_{22} + \frac{\partial S}{\partial s_2} = \rho h(s_1) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \\
 & \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 S) + \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} S + \frac{\partial T_{22}}{\partial s_2} + k_2 T_{23} = \rho h(s_1) \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}; \\
 & \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 T_{13}) + \frac{\partial T_{23}}{\partial s_2} - k_2 T_{22} + P_3 = \rho h(s_1) \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \\
 & \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 M_{11}) - \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} M_{22} + \frac{\partial H}{\partial s_2} - T_{13} = \frac{\rho h^3(s_1)}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}; \\
 & \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 H) + \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} H + \frac{\partial M_{22}}{\partial s_2} - T_{23} = \frac{\rho h^3(s_1)}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

The relation of the forces – moments with corresponding values of deformations has the form:

$$\begin{aligned}
 T_{11} &= B_{11}(s_1)\varepsilon_{11} + B_{12}(s_1)\varepsilon_{22}; & T_{22} &= B_{21}(s_1)\varepsilon_{11} + B_{22}(s_1)\varepsilon_{22}; \\
 S &= B_s(s_1)\varepsilon_{12}; & T_{13} &= B_{13}(s_1)\varepsilon_{13}; & T_{23} &= B_{23}(s_1)\varepsilon_{23}; \\
 M_{11} &= D_{11}(s_1)\kappa_{11} + D_{12}(s_1)\kappa_{12}; & M_{22} &= D_{21}(s_1)\kappa_{11} + D_{22}(s_1)\kappa_{22}; \\
 H &= D_s(s_1)\kappa_{12},
 \end{aligned} \tag{2}$$

where:

$$\begin{aligned}
 B_{11}(s_1) &= \frac{E_1 h(s_1)}{1 - \nu_1 \nu_2}; & B_{12}(s_1) &= \frac{E_1 h(s_1) \nu_2}{1 - \nu_1 \nu_2}; & B_{22}(s_1) &= \frac{E_2 h(s_1)}{1 - \nu_1 \nu_2}; \\
 B_{21}(s_1) &= \frac{E_2 h(s_1) \nu_1}{1 - \nu_1 \nu_2}; & B_s(s_1) &= G_{12} h(s_1); & B_{13}(s_1) &= G_{13} h(s_1); \\
 B_{13}(s_1) &= G_{23} h(s_1); & D_{11}(s_1) &= \frac{E_1 h^3(s_1)}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}; & D_{12}(s_1) &= \frac{E_1 h^3(s_1) \nu_2}{12(1 - \nu_1 \nu_2)};
 \end{aligned}$$

$$D_{22}(s_1) = \frac{E_2 h^3(s_1)}{12(1-\nu_1\nu_2)}; D_{21}(s_1) = \frac{E_2 h^3(s_1)\nu_1}{12(1-\nu_1\nu_2)}; D_s(s_1) = G_{12} \frac{h^3(s_1)}{12}.$$

The deformation ratio can be written in the form:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial s_1}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial s_2} + \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} u_1 + k_2 u_3; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial s_2} + \frac{\partial u_2}{\partial s_1} - \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} u_2; \\ \varepsilon_{13} &= \varphi_1 + \frac{\partial u_3}{\partial s_1}; \quad \varepsilon_{23} = \varphi_2 + \frac{\partial u_3}{\partial s_2} - k_2 u_2; \\ \kappa_{11} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}, \quad \kappa_{22} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} + \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} \varphi_1, \quad \kappa_{12} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1} - \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} \varphi_2. \end{aligned} \quad (3)$$

In formulas (1)–(3) $u_1(s_1, s_2, t)$, $u_2(s_1, s_2, t)$, $u_3(s_1, s_2, t)$, $\varphi_1(s_1, s_2, t)$, $\varphi_2(s_1, s_2, t)$ are components of the generalized displacement vector of the middle surface of shell; A_1, A_2, k_2 – the coefficients of the first quadratic form and the curvature of the middle surface; $h(x)$ – the variable thickness of the shell; ρ – density of the shell material; $E_1, E_2, G_{12}, G_{13}, G_{23}, \nu_1, \nu_2$ – physical and mathematical parameters of the shell material.

The shell thickness h is obtained as a linear function of the coordinates s_1 :

$$\begin{aligned} h(s_1) &= h(s_{10}) + [h(s_{1N}) - h(s_{10})] \frac{s_1}{L}; \\ s_{1N} - s_{10} &= L; \quad s_{10} \leq s_1 \leq s_{1N}. \end{aligned} \quad (4)$$

The corresponding boundary and initial conditions are added to the vibration equations (1)–(3). In the given work the following variants of boundary conditions at end faces of shell were analyzed:

$$\begin{aligned} 1) \text{ for } s_1 = s_{10}: \quad T_{11} = 0, \quad s = 0, \quad T_{13} = 0, \quad M_{11} = 0, \quad H = 0; \\ 2) \text{ for } s_1 = s_{1N}: \quad u_1 = u_2 = u_3 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

The initial conditions at the $t = 0$ have the form

$$\begin{aligned} u_1 = u_2 = u_3 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0; \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Numerical algorithm of the problem solution. The numerical algorithm of solution of the initial-boundary value problem (1)–(6) is based on the application of the integro-interpolation method of the constructing differential relations on the spatial coordinates s_1, s_2 and explicit approximations of the time coordinate t [2, 3, 5].

Numerical results. As numerical example, we consider the problem of the dynamic behavior of conical shell of variable thickness under the action of the normal distributed loading $P_3(s_1, s_2, t)$. The boundary and initial conditions are defined by the formulas (5), (6). The results of analysis of non-stationary vibrations of variable thickness conical shell are presented.

REFERENCES

1. **Grigorenko Ya. M.** The theory of shells of variable stiffness / Ya. M. Grigorenko, A. T. Vasilenko // Shells calculation methods. – K. : Nauk. dumka, 1982. – Vol. 4. – 544 p. (in Russian).
2. **Grigorenko Ya. M.** Free vibrations of the shell constructions / Ya. M. Grigorenko, E. Bespalova, A. B. Kitaygorodskiy, A. I. Shynkar. – K. : Nauk. dumka, 1986. – 172 p. (in Russian).
3. **Grigorenko Ya. M.** Problems of static inhomogeneous anisotropic shells / Ya. M. Grigorenko, A. T. Vasilenko. – M. : Nauka, 1992. – 336 p.
4. **Golovko K. G.** Dynamics of inhomogeneous shells under nonstationary loading: monograph / K. G. Golovko, P. Z. Lugovoyi, V. F. Meish; edited by academician NAS of Ukraine, A. N. Guz. – K. : Vyd-vo «Kyiv Univ.», 2012. – 541 p. (in Russian).
5. **Lugovoyi P. Z.** The nonstationary dynamics of inhomogeneous shell constructions: monograph / P. Z. Lugovoyi, V. F. Meish, E. A. Shtantsel. – K. : Vyd-vo «Kyiv Univ.», 2005. – 537 p. (in Russian).
6. **Meish V. F.** Axisymmetric vibrations of conical shells of variable thickness under the influence of unsteady load / V. F. Meish, // Problems of computational mechanics and strength of structures. – D. : Vyd-vo DNU, 2012. – Vol. 18. – P. 132–139 (in Russian).
7. **Meish V. F.** The dynamic behavior of a conical shell of variable thickness on an elastic foundation / V. F. Meish, P. Z. Lugovoyi, V. M. Miller / Problems of computational mechanics and strength of structures. – D. : Vyd-vo DNU. – Vol. 19. – P. 219–225 (in Russian).
8. **Meish V. F.** To calculate of non – axially symmetric vibrations of variable thickness conical shells under non – stationary load / V. F. Meish, V. M. Melnik // Bulletin of Kyiv Taras Shevchenko Nat. Univ. Series Physics & Mathematics. – 2012, Vol. 3. – P. 83–86 (in Ukrainian).
9. **Preobrazhenskiy I. N.** Stability and oscillations of conical shells / I. N. Preobrazhenskiy, V. Z. Grischak. – M. : Mashinostroenie, 1986. – 240 p. (in Russian).

*Институт механики
им. С. П. Тимошенко НАН Украины,
Киев, Украина*

Надійшла до редколегії 01.02.2013.