

УДК 539.3

*Е. Н. Михайлуца, канд. техн. наук, Л. Н. Егармина, канд. техн. наук,
С. А. Яковлева*

СТАЦИОНАРНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ КОНСТРУКЦИИ ВИДА ПЛАСТИНА – СОСТАВНОЙ СЛОЙ С УПРУГОЙ СВЯЗЬЮ

Рассматривается действие подвижной нагрузки на бесконечную пластину, покоящуюся на составном слое с упругой связью. Для решения задачи предлагается эффективный численно–аналитический метод. Решение получено с помощью интегрального преобразования Фурье и специального численного алгоритма, основанного на методе Файлона для нахождения интегралов обращения. Продемонстрировано влияние податливости соединения на закономерности распределения по толщине составной конструкции перемещения и напряжения.

Ключевые слова: диссипация, упругая связь, потенциальные функции, инерциальность прослойки, преобразование Фурье, метод Файлона.

Введение. Актуальность задач исследования динамических характеристик конструкций, упрощенными моделями которых являются составные пластины и цилиндрические оболочки, связана с широким использованием таких конструкций в различных отраслях народного хозяйства Украины, в частности, в современной авиационной и космической технике, судостроении, строительстве инженерных сооружений и двигателей. Все они должны отвечать высоким требованиям надежности при эксплуатации в различных условиях, которые обеспечиваются не только за счет соблюдения технологических характеристик материала изделия, но и путем конструкторских решений. Работоспособность и надежность слоистой конструкции существенно зависит от прочности соединения ее слоев, поэтому разработке методов расчета прочности межслойных соединений посвящен ряд современных исследований [2]. Однако, в большинстве работ в этом направлении допускается наличие идеального (жесткого или скользящего) контакта между составляющими элементами конструкций. На практике же достаточно часто возникают ситуации, в которых необходимо учитывать наличие прослойки, имеющей податливость в нормальном и касательном направлении [4].

Целью данного исследования является изучение влияния податливости соединения на закономерности распределения по толщине составной конструкции компонент напряженно–деформированного состояния.

Постановка задачи. Рассматривается бесконечная пластина, которая опирается на двухслойную конструкцию с упругой склейкой между слоями. Нижний слой жестко сцеплен (полное склеивание без податливости) с абсолютно жестким полупространством. Пластина подвержена действию нормальной нагрузки, не зависящей от координаты y и движущейся с постоянной скоростью в положительном направлении оси Ox . Такая нагрузка вызывает в описанной выше системе плоское деформированное состояние. Считаем, что с момента приложения нагрузки прошло достаточно много времени, процесс установившийся, в подвижной системе координат перемещения и напряжения не зависят от времени, а скорость движения нагрузки входит в решение как параметр. Модуль упругости, плотность и толщина для различных слоев конструкции неодинаковы, однако в пределах каждого слоя постоянны.

Динамические уравнения движения для каждого слоя в перемещениях имеют вид:

$$C_{sk}^2 \left(\frac{\partial^2 U_x^{(k)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x^{(k)}}{\partial z^2} \right) + (C_{pk}^2 - C_{sk}^2) \left(\frac{\partial^2 U_x^{(k)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_z^{(k)}}{\partial x \partial z} \right) = \frac{\partial^2 U_x^{(k)}}{\partial t^2};$$

$$C_{sk}^2 \left(\frac{\partial^2 U_z^{(k)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_z^{(k)}}{\partial z^2} \right) + (C_{pk}^2 - C_{sk}^2) \left(\frac{\partial^2 U_x^{(k)}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 U_z^{(k)}}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 U_z^{(k)}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где C_{pk} , C_{sk} – скорости распространения волн растяжения-сжатия и волн сдвига в каждом из слоев конструкции; $\bar{U}^{(k)}$ – вектор перемещений точек k -го слоя в направлении координатных осей x, z ; G_k , ν_k , ρ_k – модуль сдвига, коэффициент Пуассона и массовая плотность; индекс 1 относится к верхнему (нагруженному) слою, 2 – к нижнему.

Движение пластины описывается уравнениями с учетом поперечного сдвига и инерции вращения (типа Тимошенко), при этом $F \neq 0$ – поверхностная нормальная нагрузка на пластину [1]:

$$\begin{cases} \frac{4Gh}{1-\nu} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \tau_c(x,t) = 2\rho h \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\ 2k^2 Gh \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) - q_c(x,t) = 2\rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + F \\ -\frac{4}{3} \frac{Gh^2}{(1-\nu)} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} - 2k^2 G \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \alpha \right) + \tau_c(x,t) = -\frac{2}{3} \rho h^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \cdot T_r \end{cases} \quad (2)$$

Здесь α – угол поворота поперечного сечения; k^2 – сдвиговой коэффициент Тимошенко; $q_c(x, t)$, $\tau_c(x, t)$ – нормальное и касательное напряжения, действующие на поверхности раздела пластины и верхнего слоя; ρ, ν, G – плотность, коэффициент Пуассона и модуль сдвига пластины; U, W – перемещения точек срединной поверхности пластины в направлении осей x и z . $T_r = 1$, если учитывается инерция вращения, и $T_r = 0$, если не учитывается при выводе системы уравнений (2).

Стыковка слоев, с учетом малой толщины прослойки b и ее инерциальности, моделируется следующими зависимостями:

при $z = 0$:

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(2)}; \sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)};$$

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \frac{E}{b} (U_z^{(1)} - U_z^{(2)}); \sigma_{xz}^{(1)} = \frac{G_p}{b} (U_x^{(1)} - U_x^{(2)}); E = 2G_p \cdot (1 + \nu_p). \quad (3)$$

Условия контакта на границе двухслойной конструкции будут иметь вид:

1) на границе раздела пластины и слоя в случае жесткого контакта при $z = h_1$:

$$\sigma_{zz}^{(1)} = q_c(x, t); \sigma_{xz}^{(1)} = \tau_c(x, t); U_z^{(1)} = W; U_x^{(1)} = U - h \frac{\alpha}{2}; \quad (4)$$

2) на основании при $z = -h_2$: $U_x^{(2)} = U_z^{(2)} = 0$. (5)

Аналитическое решение. Будем считать, что с момента нагружения прошло достаточно много времени, процесс можно считать установившимся, и в подвижной системе координат компоненты перемещения и напряжения не зависят от времени. При рассмотрении установившегося процесса применяется преобразование Галилея, с помощью которого в стационарных динамических задачах исключается независимая переменная t . Кроме того, перейдем к безразмерным переменным по формулам:

$$\left\{ U_x^{(k)}, U_z^{(k)} \right\} = \frac{1}{h_1} \left\{ U_x^{(k)}, U_z^{(k)} \right\}; \left\{ x^*, z^* \right\} = \frac{1}{h_1} \{ x, z \};$$

$$\eta = \frac{x - ct}{h_1}; \gamma = \frac{G_1}{G_2}; \gamma_p = \frac{G_p}{G_1};$$

$$\gamma_1 = \frac{G}{G_1}; \kappa_s = \frac{h_2}{h_1}; \kappa_p = \frac{h}{h_1}; \kappa_{s1} = \frac{b}{h_1}; c^* = \frac{c}{c_{s1}}; \rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}; \rho^* = \frac{\rho}{\rho_1}.$$

После перехода к безразмерным переменным в подвижной системе координат уравнения движения пластины (2) преобразуются следующим образом

$$\begin{cases} \left(\frac{4\gamma_1}{1-\nu} - 2\rho^* c_1^{*2} \right) \kappa_p \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = \frac{\tau_c(\eta)}{G_1} \\ \left(2k^2 \gamma_1 - 2\rho^* c_1^{*2} \right) \kappa_p \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} - 2k^2 \gamma_1 \kappa_p \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} = \frac{q_c(\eta) + F}{G_1} \\ \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{\gamma_1}{(1-\nu)} - \frac{2}{3} \cdot \rho^* c_1^{*2} T_r \right) \kappa_p^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \eta^2} + 2k^2 \gamma_1 \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} - \alpha \right) = \frac{\tau_c(\eta)}{G_1} \end{cases} \quad (6)$$

Для дальнейшего решения данной задачи применяется комплексное интегральное преобразование Фурье по переменной η ко всем искомым функциям, после чего поиск решения сводится к анализу краевой задачи в пространстве изображений. Уравнения (6) в пространстве изображений примут вид

$$\begin{cases} -\xi^2 n_1 U = \frac{\tau_c(\eta)}{G_1} \\ -\xi^2 \left(2k^2 \gamma_1 - 2\rho^* c_1^{*2} \right) \kappa_p W + 2k^2 \gamma_1 \xi i \kappa_p \alpha = \frac{q_c(\eta) + F}{G_1}, \\ -\left(\frac{n_2}{3} \xi^2 + 2k^2 \gamma_1 \right) \kappa_p^2 \alpha = -\xi^2 n_1 U + 2k^2 \gamma_1 \xi i W \end{cases}$$

где

$$n_1 = \left(\frac{4\gamma_1}{1-\nu} - 2\rho^* c_1^{*2} \right) \kappa_p; \quad n_2 = \left(\frac{4\gamma_1}{1-\nu} - 2\rho^* c_1^{*2} \right) \kappa_p T_r.$$

Выразим из полученной системы угол поворота поперечного сечения α и нормальное напряжение пластины q_c через компоненты перемещения:

$$\alpha = \frac{3\xi^2 n_1}{n_2 \xi^2 + 6k^2 \gamma_1} U - \frac{6k^2 \gamma_1 \xi}{n_2 \xi^2 + 6k^2 \gamma_1} i W;$$

$$\frac{q_c + F}{G_1} = \left(-\frac{2k^2 \gamma_1 \xi^2 n_2}{n_2 \xi^2 + 6k^2 \gamma_1} + 2\rho^* c_1^{*2} \right) \xi^2 W + \frac{6k^2 \gamma_1 n_1}{n_2 \xi^2 + 6k^2 \gamma_1} i \xi^3 U.$$

Для интегрирования уравнений движения слоев вводятся потенциальные функции:

$$U_x^{(k)} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} - \frac{\partial \psi_k}{\partial z}; \quad U_z^{(k)} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} + \frac{\partial \psi_k}{\partial x}.$$

Компоненты напряжения в слоях выражаются через потенциальные функции следующим образом:

$$\sigma_{zz}^{(k)} = \frac{2G_k(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} \left(\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x \partial z} \right) + \frac{2G_k \nu_k}{1-2\nu_k} \left(\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x \partial z} \right);$$

$$\sigma_{xz}^{(k)} = G_k \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} \right).$$

Видоизмененные волновые уравнения движения для определения потенциальных функций запишутся в виде:

$$\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial z^{*2}} - \lambda_{1k} \varphi_k = 0; \quad \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial z^{*2}} - \lambda_{2k} \psi_k = 0, \quad (7)$$

где

$$\lambda_{1k} = \xi^2 (1 - \theta_k c_k^{*2}); \quad \lambda_{2k} = \xi^2 (1 - c_k^{*2}); \quad \theta_k = \frac{1 - 2\nu_k}{2(1 - \nu_k)}.$$

Общие решения полученных уравнений (7) можно представить в виде:

$$\varphi_k(z, \xi) = C_1^{(k)} \exp(z_k^* \sqrt{\lambda_{1k}}) + C_2^{(k)} \exp(-z_k^* \sqrt{\lambda_{1k}});$$

$$\psi_k(z, \xi) = D_1^{(k)} \exp(z_k^* \sqrt{\lambda_{2k}}) + D_2^{(k)} \exp(-z_k^* \sqrt{\lambda_{2k}}). \quad (8)$$

Перемещения через потенциальные функции в подвижной системе координат выражаются следующим образом:

$$U_x^{(k)} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial \eta} - \frac{\partial \psi_k}{\partial z^*}; \quad U_z^{(k)} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial z^*} + \frac{\partial \psi_k}{\partial \eta}.$$

После применения преобразования Фурье компоненты тензора перемещений и напряжений представляются в виде:

$$\begin{aligned}
U_x^{(k)} &= -i\xi\varphi_k - \frac{\partial\psi_k}{\partial z^*}; U_z^{(k)} = -i\xi\psi_k + \frac{\partial\varphi_k}{\partial z^*}; \\
\frac{\sigma_{zz}^{(k)}}{G_k} &= \frac{2(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} \left(\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial z^{*2}} - i\xi \frac{\partial\psi_k}{\partial z^*} \right) + \frac{2\nu_k}{1-2\nu_k} \left(-\xi^2\varphi_k + i\xi \frac{\partial\psi_k}{\partial z^*} \right); \\
\frac{\sigma_{xz}^{(k)}}{G_k} &= -2i\xi \frac{\partial\varphi_k}{\partial z^*} - \frac{\partial^2\psi_k}{\partial z^{*2}} - \xi^2\psi_k.
\end{aligned} \tag{9}$$

Подставляя решения для потенциальных функций (8) в выражения для компонент напряжений и перемещений(9), получим зависимости вида:

$$\begin{aligned}
U_z^{(k)} &= \sqrt{\lambda_{1k}} \left(C_1^{(k)} \exp\left(z_k^* \sqrt{\lambda_{1k}}\right) - C_2^{(k)} \exp\left(-z_k^* \sqrt{\lambda_{1k}}\right) \right) - \\
&\quad - i\xi \left(D_1^{(k)} \exp\left(z_k^* \sqrt{\lambda_{2k}}\right) + D_2^{(k)} \exp\left(-z_k^* \sqrt{\lambda_{2k}}\right) \right); \\
\frac{\sigma_{zz}^{(k)}}{G_k} &= \left(\frac{2\lambda_{1k} - 2\nu_k(\lambda_{1k} + \xi)}{1-2\nu_k} \right) \cdot \left(C_1^{(k)} \exp\left(z_k^* \sqrt{\lambda_{1k}}\right) + C_2^{(k)} \exp\left(-z_k^* \sqrt{\lambda_{1k}}\right) \right) - \\
&\quad - 2i\xi \sqrt{\lambda_{2k}} \cdot \left(D_1^{(k)} \exp\left(z_k^* \sqrt{\lambda_{2k}}\right) - D_2^{(k)} \exp\left(-z_k^* \sqrt{\lambda_{2k}}\right) \right).
\end{aligned}$$

После введения новых переменных по формулам:

$$C_j^{*(k)} = C_j^{(k)} \cdot \frac{G_1}{F} \cdot \exp\left(\sqrt{\lambda_{jk}} \beta_k / 2\right); D_j^{*(k)} = D_j^{(k)} \cdot \frac{G_1}{F} \cdot \exp\left(\sqrt{\lambda_{jk}} \beta_k / 2\right)$$

и удовлетворяя граничным условиям (3)–(5), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_j^{*(k)}, D_j^{*(k)}$, где $j=1,2, k=1,2$.

Решая полученную систему неоднородных линейных алгебраических уравнений методом Гаусса, однозначно определяем неизвестные коэффициенты $C_j^{*(k)}, D_j^{*(k)}$. Соответствующие безразмерные компоненты тензора напряжений и перемещений находятся путем подстановки найденных коэффициентов в следующие выражения:

$$U_z^{(k)} = T_{1k} \frac{F}{G_1}; \frac{\sigma_{zz}^{(k)}}{G_k} = T_{2k} \frac{F}{G_1};$$

$$T_{1kz} = \sqrt{\lambda_{1k}} \exp(-\sqrt{\lambda_{1k}} \beta_k / 2) \cdot (C_1^{*(k)} \exp(z_k^* \sqrt{\lambda_{1k}}) - C_2^{*(k)} \exp(-z_k^* \sqrt{\lambda_{1k}})) - \xi \exp(-\sqrt{\lambda_{2k}} \beta_k / 2) \cdot (D_1^{*(k)} \exp(z_k^* \sqrt{\lambda_{2k}}) + D_2^{*(k)} \exp(-z_k^* \sqrt{\lambda_{2k}}));$$

$$T_{2k} = \frac{2\lambda_{1k} - 2\nu_k (\lambda_{1k} + \xi^2)}{1 - 2\nu_k} \cdot \exp(-\sqrt{\lambda_{1k}} \beta_k / 2) (C_1^{*(k)} \exp(z_k^* \sqrt{\lambda_{1k}}) + C_2^{*(k)} \exp(-z_k^* \sqrt{\lambda_{1k}})) - 2\xi \sqrt{\lambda_{2k}} \cdot \exp(-\sqrt{\lambda_{2k}} \beta_k / 2) \cdot (D_1^{*(k)} \exp(z_k^* \sqrt{\lambda_{2k}}) - D_2^{*(k)} \exp(-z_k^* \sqrt{\lambda_{2k}})).$$

В качестве примера рассмотрен случай нагружения пластины нормальной нагрузкой, равномерно распределенной по полосе шириной $2a$, аналитическое представление которой после перехода к безразмерным переменным и применения интегрального преобразования Фурье по пространственной координате имеет вид

$$F^\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F_0 h(\eta) e^{-i\xi\eta} d\eta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} F_0 \frac{\sin(\xi a^*)}{\xi}. \quad (10)$$

Подставляя (10) в выражения для компонент перемещений и напряжений и применяя обратное преобразования Фурье, получаем:

$$U_z^{(k)} = \frac{F_0}{\pi G_1} I_{1k}; \quad \frac{\sigma_{zz}^{(k)}}{G_k} = \frac{F_0}{\pi G_1} I_{2k},$$

где

$$I_{jk} = 2 \int_0^\infty \frac{T_{jk}}{\xi} \cdot \sin(\xi a^*) \cdot \cos(\xi \eta) d\xi, \quad j = 1, 2. \quad (11)$$

Интегралы вида (11) находятся численно по методу Файлона [3]. Верхний предел и шаг интегрирования по пространственной координате определялись опытным путем, обеспечивая заданную относительную точность по всем искомым величинам.

В ходе численных экспериментов изучалось влияние механических и физических параметров конструкции на картину напряженно-деформированного состояния, построены картины распределения компонент напряжений и перемещений по пространственной координате и по глубине слоя. На рис. 1 приведены картины распределения нормального перемещения по длине конструкции для различных относительных значений модуля сдвига.

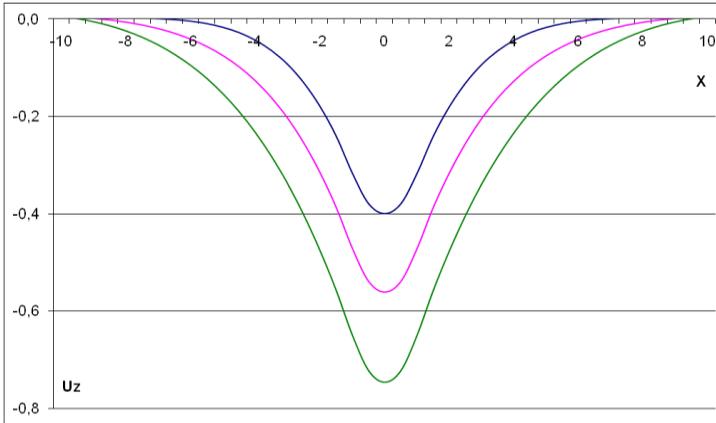


Рис. 1 – Распределение нормальной компоненты перемещения по пространственной переменной

Эффективность алгоритма доказывалась путем расчетов компонент напряженно-деформированного состояния в произвольной точке конструкции. В качестве примера, на рис. 2 приведены картины распределения нормального перемещения по глубине для различных физических параметров упругой склейки между слоями. Отметим, что при увеличении модуля сдвига в 5 и 10 раз пропорционально изменяются значения перемещения при сохранении характерного скачка на границе раздела слоев.

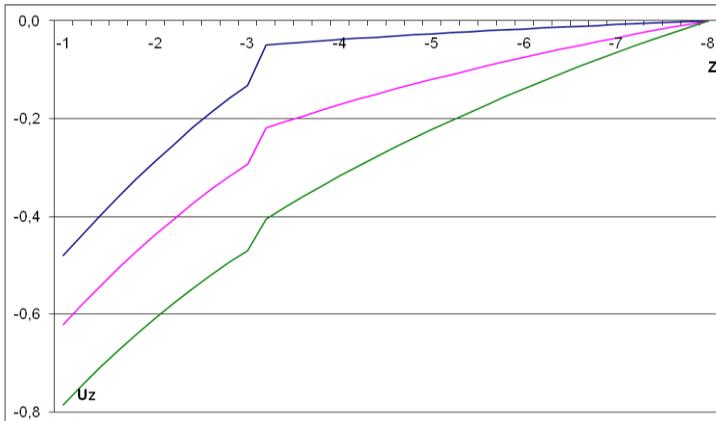


Рис. 2 – Распределение нормальной компоненты перемещения по глубине слоя

Построенные графики наглядно демонстрируют влияние податливости соединения на закономерности распределения перемещения и напряжения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Вольмир А. С.** Нелинейная динамика пластин и оболочек / А. С. Вольмир. – М. : Наука, 1972. – 432 с.
2. **Горшков А. Г.** Стационарные задачи динамики многослойных конструкций / А. Г. Горшков, В. И. Пожуев – М. : Машиностроение, 1992. – 224 с.
3. **Крылов В. И.** Методы приближенного преобразования Фурье и обращения Лапласа / В. И. Крылов, Н. С. Скобля – М. : Наука, 1974. – 223 с.
4. **Chonan S.** Moving load on a two-layered plate with imperfect bonding, resting on a fluid half-space / S. Chonan // Archive J. Appl. Mech. – No. 2. – Vol. 49. – P. 97–106.

*О. М. Міхайлуца, канд. техн. наук, Л. М. Єгарміна, канд. техн. наук,
С. О. Яковлева*

СТАЦІОНАРНА ДЕФОРМАЦІЯ КОНСТРУКЦІЇ ВИДУ ПЛАСТИНА–СКЛАДОВИЙ ШАР З ПРУЖНИМИ ЗВ'ЯЗКАМИ

Розглядається дія рухомого навантаження на нескінченну пластину, що покоїться на складовому шарі з пружним зв'язком. Для вирішення задачі пропонується ефективний чисельно-аналітичний метод. Розв'язок отримано за допомогою інтегрального перетворення Фур'є і спеціального чисельного алгоритму, заснованого на методі Файлона для знаходження інтегралів обернення. Продемонстровано вплив піддатливості з'єднання на закономірності розподілу по товщині складової конструкції переміщення і напруження.

Ключові слова: дисипація, пружний зв'язок, потенційні функції, інерціальність прошарку, перетворення Фур'є, метод Файлону.

*O. M. Mikhaylutsa, PhD (Tech.), L. M. Yegarmina, PhD (Tech.),
S. O. Yakovleva*

STATIONARY DEFORMATION CONSTRUCTION PLATE-TYPE COMPOSITE LAYER WITH ELASTIC CONNECTIONS

The action of moving load on an infinitely long plate that rests on the composite layer with an elastic connection was considered. To solve the problem we suggest an effective numerical-analytical method. The solution is obtained by using the integral Fourier transform and a special numerical algorithm based on the method Failon for finding integrals converting. The influence of the flexibility of the compound on the regularities of the distribution on the thickness of the composite construction component of the stress-strain state was demonstrated.

Keywords: dissipation, elastic connection, potential remedial functions, inertiality layer, Fourier transform, the method Failon.

Construction in the form of multilayer plates and shells found wide application in modern engineering, aviation, construction of engineering structures. When analyzing the problems of the impact of moving loads on layered media were considered subcritical speed of movement of loads in the assumption of a perfect (hard or sliding) contact between the layers [2]. However, in practice, between the layers, there is often the interlayer (gluing), possessed of the flexibility and having different from the bearing layer characteristics, the influence of which must not be neglected.

This relationship is inertial and its modeling by normal and tangential stresses depends on the difference between the respective movements [4].

The infinite plate based on the two-layer construction with elastic bonding between the layers is considered. The bottom layer is rigidly connected (full bonding without compliance) with absolutely rigid half-space. The plate is exposed to the normal load, moving with a constant speed. We believe that from the moment of application of the load has been a long time, the process is steady, and in the moving coordinate system the moving and stresses are independent of time, and the speed of the load is included in the solution as a parameter.

The movement of each layer structure describes the dynamic equations of elasticity theory and exact accounting of the mechanism of contact between the layers. The movement of the plate is described by equations with account of transverse shear and the inertia of rotation (type – Timoshenko) [1]. The presence of elastic layer is modeled in terms of connections with the properties of flexibility and dissipation.

It's assumed, that the loading process of composite construction is steady, hence, in the movable coordinate system the stress and strain components are independent of time.

For the implementation of the model the special numerical - analytical algorithm based on the method of integral transform of Fourier and quadrature formulas for its transform [3] was proposed.

Analytical solution was found by the introduction of potential functions, satisfying the boundary conditions with the subsequent solution of SLAE. All the required expressions for the components of the stress-strain state are in the form of improper integral in the space of images and to obtain the numerical results the special numerical methods of their joint request, based on the method Failon for calculation of integrals from intensely oscillatory functions, was applied.

For analysis of determination the number of members of the series, the upper limit and the step of integration were conducted. The distributions of the component of the stress-strain state of the spatial coordinates for various physical and geometrical parameters of constructions were obtained. The results are presented into the graphics.

REFERENCES

1. **Volmir A. S.** Nonlinear dynamics of plates and shells / A. S. Volmir. – M. : Science, 1972. – 432 p. (in Russian)
2. **Gorshkov A. G.** Stationary problems of the dynamics of multilayer constructions / A. G. Gorshkov, V. I. Pozhuyev. – M. : Engineering, 1992. – 224 p. (in Russian)
3. **Krylov V. I.** Methods of approximate Fourier transform and Laplace transform / V. I. Krylov, N. S. Skoblya. – M. : Science, 1974. – 223 p. (in Russian)
4. **Chonan S.** Moving load on a two-layered plate with imperfect bonding, resting on a fluid half-space / S. Chonan // Archive J. Appl. Mech. – No. 2. – Vol. 49. – P. 97–106 (in Russian).

*Запорожская государственная
инженерная академия,
Запорожье, Украина*

Поступила в редакцию 20.01.2014