

УДК 539.3

*Н. И. Ободан, д-р техн. наук, Е. Ф. Прокопало, канд. техн. наук,  
В. А. Громов, канд. физ.-мат. наук*

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОДОЛЬНО СЖАТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ОБЛАСТЬЮ РАССЛОЕНИЯ

В работе приводятся результаты численного и экспериментального анализа двухслойных цилиндрических оболочек с областью расслоения, подвергнутых действию равномерного осевого сжатия. Установлено, что потеря устойчивости проходит в два этапа: локальная потеря устойчивости с образованием локальной вмятины в области расслоения и общая потеря устойчивости по форме “пояс” вмятин (последняя влечёт за собой потерю несущей способности). Анализируется связь между наблюдаемым процессом потери устойчивости и структурой ветвления нелинейной краевой задачи теории оболочек для случая цилиндрической оболочки без области расслоения.

*Ключевые слова:* двухслойная цилиндрическая оболочка, область расслоения, локальная и общая потеря устойчивости, теоретическое и экспериментальное исследование.

**Введение.** Технология изготовления двухслойных оболочек допускает наличие областей несклея, которые при наличии усилий сжатия могут приводить в указанной области к локальной потере устойчивости как одного слоя, так и обоих слоёв вместе, что приводит к существенному снижению несущей способности тонкостенной конструкции; при этом учёт эффекта локальной потери устойчивости возможен только с использованием нелинейной модели. Современные исследования [1–8], как правило, посвящены линейному либо нелинейному анализу тонкостенных систем с расслоениями в докритической стадии (до первой предельной точки); экспериментальные исследования связаны с идентификацией области расслоения.

**Постановка задачи.** Исследуется деформация двухслойной цилиндрической оболочки, подвергнутой действию равномерного осевого сжатия, при наличии прямоугольной в плане области несклея или двух диаметрально противоположно расположенных областей; торцы оболочки жёстко зацементированы;  $x_1, x_2, x_3$  соответствуют продольному, окружному и нормальному направлениям соответственно.

Оболочка характеризуется радиусом  $R$ , длиной  $L$ , толщинами внутреннего ( $h_1$ ) и наружного ( $h_2$ ) слоёв (толщина оболочки  $h = h_1 + h_2$ ), модулями упругости  $E_{x_1}$  (вдоль образующей) и  $E_{x_2}$  (вдоль направляющей), коэффициентами Пуассона  $\mu_{x_1}$  и  $\mu_{x_2}$ . Направления  $x_1, x_2$  соответствуют главным направлениям ортотропии материала.

Область (области) неприятия характеризуется размерами в продольном ( $a_{x_1}$ ) и окружном ( $a_{x_2}$ ) направлениях; предполагается возможность существования подобластей полного нормального контакта и раздельного деформирования слоёв в области неприятия.

**Экспериментальная модель.** В качестве экспериментальной модели рассматривается двухслойная цилиндрическая оболочка, выполненная из чертёжной бумаги (ГОСТ 597-73), характеризующаяся следующими значениями геометрических характеристик оболочки и упругих характеристик материала:  $h_1 = h_2 = 0,23 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ,  $L = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ,  $R = 3,75 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ; модулей упругости:  $E_{x_1} = 4,45 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ,  $E_{x_2} = 2,15 \cdot 10^9 \text{ Па}$  и коэффициентов Пуассона  $\mu_{x_1} = 0,31$ ,  $\mu_{x_2} = 0,15$ .

Толщина бумаги определялась при помощи индикатора часового типа с ценой деления  $10^{-6} \text{ м}$ . Для определения упругих постоянных бумаги проводились испытания как плоских образцов, так и оболочек. Прямоугольная заготовка вырезалась так, чтобы главное направление ортотропии (ось  $x_1$ ) совпадало с образующей, а ось  $x_2$  – с направляющей оболочки.

Изготовление моделей осуществлялось путём склеивания заготовок клеем БФ-2 на металлическом цилиндре диаметром  $7,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ . Рабочая длина оболочек, как уже указывалось, составляла  $L = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ , полная длина цилиндров –  $11,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ . Для передачи осевой нагрузки к криволинейным кромкам оболочки приклеивались торцевые приспособления. Ширина приклея с каждой стороны составляла по  $2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ . Такое закрепление краёв обеспечивало граничные условия, близкие к жёсткому закреплению.

Нагружение оболочек осуществлялось поэтапно, по схеме “мёртвого” груза при помощи стационарных гирь второго класса точности.

Всего было испытано 6 серий оболочек общим количеством 80 штук: первая и вторая серии – по четыре оболочки, остальные серии – по 18 оболочек (по 3 оболочки для 6 различных вариантов размеров/расположения области неприятия).

Оболочки первой серии были однослойными, остальных серий – двухслойными. На моделях второй серии склеивание проводилось по всей поверхности между слоями. На оболочках третьей-шестой серий при склеивании слоёв оставлялись прямоугольные участки неприятия размерами  $a_{x_1} \times a_{x_2}$ .

В случае наличия одной области неприятия (модели третьей-пятой серий) центр неприятия располагался диаметрально противоположно по отношению к шву, в случае наличия двух областей неприятия (шестая серия) – области располагались симметрично относительно продольного сечения оболочки, проходящего через шов.

**Расчётная модель.** Для построения разрешающих соотношений расчётной модели использовались следующие обозначения. Область расслоения обозначалась как  $\Omega_d$  ( $\Omega_d = \{x_{i,\min} \leq x_i \leq x_{i,\max}, i = 1, 2\}$ ), граница области расслоения –  $\Gamma_d$ . Контур  $\Gamma_B$  соответствует торцам оболочки.

Предполагается, что подобласти раздельного деформирования слоёв в области расслоения являются прямоугольными в плане; они обозначались –  $\Omega_j = \{x_{i,\min}^j \leq x_i \leq x_{i,\max}^j, i = 1, 2\}$ ,  $j = \overline{1, S}$ ; здесь  $x_{i,\min}^j, x_{i,\max}^j$  – границы  $j$ -й подобласти раздельной деформации.

В обозначениях индекс в круглых скобках  $(s)$  соответствует номеру слоя (0 отвечает неповреждённой части оболочки). Соответственно,  $\Omega^{(s)}$ ,  $s = 1, 2$  означает  $s$ -й слой в области расслоения,  $\Omega_j^{(s)}$  –  $s$ -й слой в  $j$ -й подобласти раздельной деформации слоёв;  $\Gamma_d^{(s)}$  и  $\Gamma_j^{(s)}$  означают соответствующие границы;  $\Gamma_j^{(s-)}$  и  $\Gamma_j^{(s+)}$  – части границы, принадлежащие  $\Omega_j$  и  $\Omega_d - \bigcup_{j=1}^K \Omega_j$  соответственно. Следует подчеркнуть, что границы  $\Gamma_j$  неизвестны и должны определяться в процессе решения задачи.

Компоненты вектора перемещений координатной поверхности в направлениях  $x_1, x_2, x_3$  обозначены как  $u_1^{(s)}, u_2^{(s)}, w^{(s)}$  соответственно; углы поворота единичного вектора нормали к координатной поверхности относительно направлений  $x_1, x_2$  –  $\theta_1^{(s)}, \theta_2^{(s)}$ ; удлинения (сдвиги) координатной поверхности в направлениях  $x_1, x_2$  –  $\varepsilon_{11}^{(s)}, \varepsilon_{22}^{(s)}$  ( $\varepsilon_{12}^{(s)}, \varepsilon_{21}^{(s)}$ ); изменения кривизн координатной поверхности в направлениях  $x_1, x_2$  (кручение кривизн) –  $\chi_{11}^{(s)}, \chi_{22}^{(s)}$  ( $\chi_{12}^{(s)}$ ) соответственно.

В сечении  $x_1 = \text{const}$  ( $x_2 = \text{const}$ ) для  $s$ -го слоя полный вектор и полный момент внутренних усилий раскладывается на усилия тангенциального растяжения  $T_{11}^{(s)}$  ( $T_{22}^{(s)}$ ) и сдвига  $T_{12}^{(s)}$  ( $T_{21}^{(s)}$ ), перерезывающую силу  $Q_1^{(s)}$  ( $Q_2^{(s)}$ ), изгибный  $M_{11}^{(s)}$  ( $M_{22}^{(s)}$ ) и крутящий  $M_{12}^{(s)}$  ( $M_{21}^{(s)}$ )

моменты.  $C_{(s)}^{ijkl} (C_{ijkl}^{(s)})$ ,  $D_{(s)}^{ijkl} (D_{ijkl}^{(s)})$ ,  $K_{(s)}^{ijkl} (K_{ijkl}^{(s)})$  описывают жесткостные коэффициенты [8];  $\Delta$  – сближение торцов оболочки.

Для формулировки указанных соотношений был осуществлён переход к системе безразмерных величин с помощью следующей системы соотношений, в которых черта над величиной отвечает размерной величине:

- безразмерные переменные  $x_i = \bar{x}_i / R$ ,  $i = 1, 2$ ;
- безразмерные неизвестные функции задачи  $\Delta = \bar{\Delta} / R$ ;  $T_{ij}^{(s)} = \bar{T}_{ij}^{(s)} / Eh$ ;  
 $M_{ij}^{(s)} = \bar{M}_{ij}^{(s)} / EhR$ ;  $(u_1^{(s)}, u_2^{(s)}, w^{(s)}) = R^{-1}(\bar{u}_1^{(s)}, \bar{u}_2^{(s)}, \bar{w}^{(s)})$ ;  $\chi_{ij}^{(s)} = R\bar{\chi}_{ij}^{(s)}$ ;
- безразмерные жесткостные коэффициенты  $C_{(s)}^{ijkl} = \bar{C}_{(s)}^{ijkl} / Eh$ ;  
 $D_{(s)}^{ijkl} = \bar{D}_{(s)}^{ijkl} / Eh^3$ ;  $K_{(s)}^{ijkl} = \bar{K}_{(s)}^{ijkl} / EhR$ ;  $C_{ijkl}^{(s)} = \bar{C}_{ijkl}^{(s)} Eh$ ;  $D_{ijkl}^{(s)} = \bar{D}_{ijkl}^{(s)} Eh^3$ ;  
 $K_{ijkl}^{(s)} = \bar{K}_{ijkl}^{(s)} EhR$ ;
- параметр  $\varepsilon = h^2 / R^2$ .

При формулировке разрешающих соотношений в работе используется соглашение о суммировании по повторяющимся индексам.

Для описания деформации оболочки в области расслоения использовалась гипотеза ломаных нормалей; в работе [8] показано, что учёт сдвиговых гипотез в рассматриваемой задаче, в сравнении с гипотезой ломаных нормалей, даёт поправку не большую 5%. Отметим, что неучёт деформации сдвига в рассматриваемой задаче приводит к возникновению скачков перерезывающих сил на границах подобластей контакта и раздельной деформации слоёв.

В качестве математической модели нагруженной конструкции используется уравнение нелинейной теории тонкостенных систем, дополненные условиями на торцах оболочки, на границе области расслоения и на границах подобластей нормального контакта и раздельной деформации слоёв, а именно:

- на торцах оболочки выполняются граничные условия (1);
- на границах неповреждённой части оболочки и граничащей с ней подобласти контакта – условия совместности по деформациям:

$$\begin{aligned} \left[ u^{(0)}(x_1, x_2) - u^{(s)}(x_1, x_2) \right] \Big|_{\Gamma_d} &= 0; \quad \left[ v^{(0)}(x_1, x_2) - v^{(s)}(x_1, x_2) \right] \Big|_{\Gamma_d} = 0; \\ \left[ w^{(0)}(x_1, x_2) - w^{(s)}(x_1, x_2) \right] \Big|_{\Gamma_d} &= 0; \\ \left[ \theta_p^{(0)}(x_1, x_2) - \theta_p^{(s)}(x_1, x_2) \right] \Big|_{\Gamma_d} &= 0, p, s = \overline{1, 2}; \end{aligned} \quad (2)$$

- условия равновесия по усилиям и моментам:

$$\begin{aligned}
 & \left[ T_{pp}^{(0)}(x_1, x_2) - T_{pp}^{(1)}(x_1, x_2) - T_{pp}^{(2)}(x_1, x_2) \right] \Big|_{\Gamma_d} = 0; \\
 & \left[ T_{12}^{(0)}(x_1, x_2) - T_{12}^{(1)}(x_1, x_2) - T_{12}^{(2)}(x_1, x_2) \right] \Big|_{\Gamma_d} = 0; \\
 & \left[ M_{pp}^{(0)}(x_1, x_2) - M_{pp}^{(1)}(x_1, x_2) - M_{pp}^{(2)}(x_1, x_2) \right] \Big|_{\Gamma_d} = 0; \\
 & \left[ M_{12}^{(0)}(x_1, x_2) - M_{12}^{(1)}(x_1, x_2) - M_{12}^{(2)}(x_1, x_2) \right] \Big|_{\Gamma_d} = 0; \\
 & \left[ Q_p^{(0)}(x_1, x_2) - Q_p^{(1)}(x_1, x_2) - Q_p^{(2)}(x_1, x_2) \right] \Big|_{\Gamma_d} = 0;
 \end{aligned} \tag{3}$$

- на границах подобластей контакта и отдельной деформации слоёв – условия совместности по деформациям вида (2);

- условия равновесия, сформулированные с учётом скачков по перерезывающим силам на указанных границах:

$$\begin{aligned}
 & T_{pp}^{(s)}(x_1, x_2) \Big|_{\Gamma_j^{(s+)}} - T_{pp}^{(s)} \Big|_{\Gamma_j^{(s-)}}(x_1, x_2) = 0; \\
 & T_{12}^{(s)}(x_1, x_2) \Big|_{\Gamma_j^{(s+)}} - T_{12}^{(s)} \Big|_{\Gamma_j^{(s-)}}(x_1, x_2) = 0; \\
 & M_{pp}^{(s)}(x_1, x_2) \Big|_{\Gamma_j^{(s+)}} - M_{pp}^{(s)} \Big|_{\Gamma_j^{(s-)}}(x_1, x_2) = 0; \\
 & M_{12}^{(s)}(x_1, x_2) \Big|_{\Gamma_j^{(s+)}} - M_{12}^{(s)} \Big|_{\Gamma_j^{(s-)}}(x_1, x_2) = 0; \\
 & Q_p^{(s)}(x_1, x_2) \Big|_{\Gamma_j^{(s+)}} - Q_p^{(s)} \Big|_{\Gamma_j^{(s-)}}(x_1, x_2) + (-1)^s \mu(x_1, x_2) \Big|_{\Gamma_j} = 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

(в выражениях (3), (4)  $p=1$  для частей контура  $x_1 = const$ ,  $p=2$  для частей контура  $x_2 = const$ ;  $\mu$  – скачок перерезывающей силы);

- внутри и на границах подобластей нормального контакта слоёв – условия непроникновения слоёв

$$\begin{aligned}
 & \left[ w^{(1)}(x_1, x_2) - w^{(2)}(x_1, x_2) \right] \Big|_{\Omega_d - \bigcup_{j=1}^K \Omega_j} = 0; \\
 & \left[ w^{(1)}(x_1, x_2) - w^{(2)}(x_1, x_2) \right] \Big|_{\Gamma_j^{(s+)}} = 0, s = 1, 2, j = \overline{1, K}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Вектор

$$U(x_1, x_2) = \left\{ u_k(x_1, x_2), k = \overline{1, 12} \right\} = \\ = \{u, v, w, \theta_1, \theta_2, T_{11}, T_{22}, T_{12}, Q_1, Q_2, M_{11}, M_{22}\}$$

объединяет неизвестные функции задачи, для которых формулируются дифференциальные разрешающие соотношения.

Отметим, что закон Гука (ввиду несовпадения координатной и срединной поверхностей оболочки) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} T_{ij}^{(s)} &= C_{(s)}^{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(s)} + K_{(s)}^{ijkl} \chi_{kl}^{(s)}; \quad M_{ij}^{(s)} = \varepsilon D_{(s)}^{ijkl} \chi_{kl}^{(s)} + K_{(s)}^{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(s)}; \\ \varepsilon_{ij}^{(s)} &= C_{ijkl}^{(s)} T_{kl}^{(s)} + K_{ijkl}^{(s)} M_{kl}^{(s)}; \quad \chi_{ij}^{(s)} = \frac{1}{\varepsilon} D_{ijkl}^{(s)} M_{kl}^{(s)} + K_{ijkl}^{(s)} T_{kl}^{(s)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для получения разрешающих соотношений используется эквивалентная вариационная постановка, которая даётся функционалом:

$$\begin{aligned} \frac{I}{EhR^2} &= \sum_{s=0}^2 \left[ \iint_{\Omega(s)} \left[ \frac{1}{2} \left( C_{(s)}^{ijkl} \varepsilon_{ij}^{(s)} \left( T_{(s)}^{ij} \right) \varepsilon_{kl}^{(s)} \left( T_{(s)}^{kl} \right) + \right. \right. \right. \\ &+ \varepsilon D_{(s)}^{ijkl} \chi_{ij}^{(s)} \left( M_{(s)}^{ij} \right) \chi_{kl}^{(s)} \left( M_{(s)}^{kl} \right) \left. \right) + K_{(s)}^{ijkl} \varepsilon_{ij}^{(s)} \left( T_{(s)}^{ij} \right) \chi_{kl}^{(s)} \left( M_{(s)}^{kl} \right) - \\ &\left. - T_{(s)}^{ij} \phi_{ij}^{(s)} - M_{(s)}^{ij} \phi_{ij}^{(s)} - \tilde{Q}_{(s)}^i \zeta_i^{(s)} \right] dx_1 dx_2 - \int_{\Gamma_B} \Delta \cdot T_{11}^{(0)} d s \Big] \rightarrow extr, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^{(s)} &\equiv \varepsilon_{ij}^{(s)} \left( T_{(s)}^{ij} \right) - \frac{1}{2} \left[ u_{i,x_j}^{(s)} + u_{j,x_i}^{(s)} \right] + B_{ij} w^{(s)} - \frac{1}{2} \theta_i^{(s)} \theta_j^{(s)} (B_{11} = B_{12} = 0, B_{22} = 1); \\ \zeta_i^{(s)} &\equiv \theta_i^{(s)} + w_{,x_i}^{(s)}; \quad \phi_{ij}^{(s)} \equiv \chi_{ij}^{(s)} \left( M_{(s)}^{ij} \right) - \theta_{i,x_j}^{(s)}; \quad \tilde{Q}_{(s)}^i \equiv Q_{(s)}^i + T_{ij}^{(s)} \theta_j^{(s)} - \text{обобщённые} \end{aligned}$$

щённые перерезывающие силы Кирхгофа.

Условия стационарности данного функционала дают уравнения в частных производных нелинейной теории тонкостенных оболочек; указанные дифференциальные соотношения должны быть дополнены условиями (1)–(5) на соответствующих границах.

Для удовлетворения условий непроникновения слоёв (5) внутри под областей нормального контакта вводится функция контактного давления  $q_c$ , определяемая из условий непроникновения

$$q_{(s)}(x_1, x_2) = \begin{cases} q_c(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in \Omega_j^{(1)}; \\ -q_c(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in \Omega_j^{(2)}; \\ 0, (x_1, x_2) \notin \Omega_j^{(1)} \cup \Omega_j^{(2)}. \end{cases} \quad (8)$$

**Метод численного анализа.** Решение рассматриваемой нелинейной краевой задачи (1)–(9) ищется в виде

$$U(x_1, x_2) = \left\{ h_k^{(i_1)}(x_1) g_k^{(i_2)}(x_2), i \rightarrow \infty \right\} \Big|_{k=\overline{1, 12^*3}}, \quad (9)$$

где  $i_1 = i$ ,  $i_2 = i - 1$  для чётных  $i$ ;  $i_1 = i - 1$ ,  $i_2 = i$  для нечётных.

Функции одной переменной являются независимо варьируемыми внутри областей  $\Omega_{(s)}$ ,  $s = 0, 1, 2$ . В процессе построения вариационной производной функционала (7) по функциям  $h_k^{(i)}(x_1)$  и  $g_k^{(i)}(x_2)$  функции  $g_k^{(i)}(x_2)$  и  $h_k^{(i)}(x_1)$ , соответственно, являются известными, поскольку они уже найдены на предыдущем шаге итерационного процесса.

Итерационный процесс, определяемый представлением (9), эквивалентен обобщённому методу Канторовича, применённому к решению нелинейной краевой задачи (1)–(8).

В качестве критерия окончания таким образом сформулированного итерационного процесса используется малость изменения функционала (7) на последовательных итерациях

$$\left| I^{(i)} - I^{(i-1)} \right|, I^{(i)} = I\left(h_k^{(i_1)} g_k^{(i_2)}\right).$$

Таким образом, решение двумерной нелинейной краевой задачи (данной своей вариационной формулировкой) сводится к отысканию решений последовательности краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dh_k^{(i)}}{dx_1} = f_k^{x_1}\left(h^{(i)}(x_1), a^{x_2}(x_1), \lambda\right), k = \overline{1, 7}, x_1 \in \left[0; \frac{L}{R}\right]; \quad (10)$$

$$\frac{dg_k^{(i)}}{dx_2} = f_k^{x_2}\left(g^{(i)}(x_2), a^{x_1}(x_2), \lambda\right), j = \overline{1, 7}, x_2 \in [0; 2\pi]. \quad (11)$$

Здесь компоненты векторов  $a^{x_1}(x_2)$  и  $a^{x_2}(x_1)$  являются определёнными интегралами от компонент вектор-функций  $h(x_1)$  и  $g(x_2)$ ,

вычисленных на предыдущей итерации. А именно, компоненты вектора  $a^{x_2}$  зависят от  $g^{(i-1)}(x_2)$  следующим образом:

- для коэффициентов линейных членов уравнения (10)

$$a_j^{x_2}(x_1) = \int_{\xi_1(x_1)}^{\xi_2(x_1)} g_{j_1}^{(i-1)}(x_2) g_{j_2}^{(i-1)}(x_2) dx_2 ;$$

- для коэффициентов нелинейных членов уравнения (10)

$$a_j^{x_2}(x_1) = \int_{\xi_1(x_1)}^{\xi_2(x_1)} g_{j_1}^{(i-1)}(x_2) g_{j_2}^{(i-1)}(x_2) g_{j_3}^{(i-1)}(x_2) dx_2 .$$

Аналогично, компоненты вектора  $a^{x_1}$  зависят от  $h^{(i-1)}(x_1)$ :

- для коэффициентов линейных членов уравнения (11)

$$a_j^{x_1}(x_2) = \int_{\eta_1(x_2)}^{\eta_2(x_2)} h_{j_1}^{(i-1)}(x_1) h_{j_2}^{(i-1)}(x_1) dx_1 ;$$

- для коэффициентов нелинейных членов уравнения (11)

$$a_j^{x_1}(x_2) = \int_{\eta_1(x_2)}^{\eta_2(x_2)} h_{j_1}^{(i-1)}(x_1) h_{j_2}^{(i-1)}(x_1) h_{j_3}^{(i-1)}(x_1) dx_1 .$$

Указанные системы обыкновенных дифференциальных уравнений должны быть дополнены граничными условиями, которые получаются из условий (2)–(4) с учётом представления (9).

Для определения границ между подобластями нормального контакта и раздельной деформации слоёв в области расслоения использовались условия трансверсальности, которые, с учётом (9), представляют собой условия трансверсальности для функционала, зависящего от функций одной переменной.

Решения одномерных задач строятся итеративно сведением на каждой итерации краевой задачи к задаче Коши методом Ньютона, неизвестная граница входит в число неизвестных; для обеспечения сходимости алгоритма использовался метод продолжения по параметру; в окрестности предельных точек зависимости нагрузка-прогиб используется приём смены ведущего параметра.



**Результаты численного и экспериментального анализа.** С помощью разрешающих соотношений (1)–(7) выполнен численный анализ рассматриваемой задачи.

На рис. 1 приведены результаты расчёта для двухслойной оболочки, жёстко закреплённой по криволинейным контурам; геометрические и упругие характеристики оболочки соответствуют экспериментальным образцам (см. выше). На торцах оболочки выполнялись условия жёсткого защемления. Длина области неприятия в продольном направлении составляла  $a_{x_1} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ; в окружном направлении –  $a_{x_2} = 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ; указанная область неприятия расположена на равном удалении от торцов оболочки.

На рис. 2–6 представлены основные результаты экспериментов.

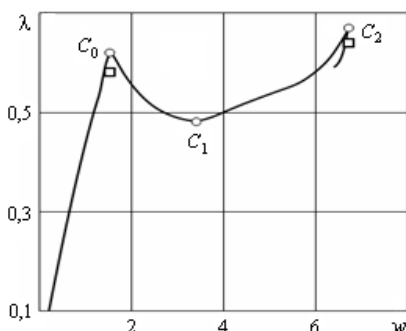


Рис. 1 – Характерная расчетная зависимость нагрузка-прогиб

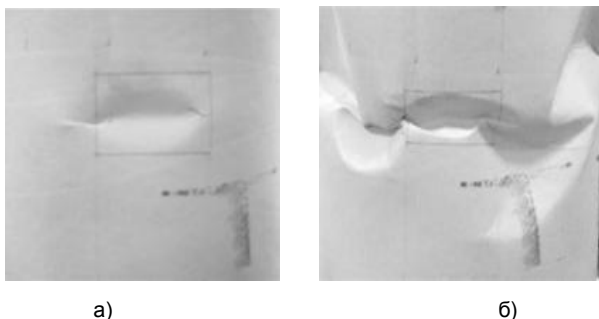


Рис. 2 – Наблюдаемые в эксперименте формы потери устойчивости:  
а) одна локальная вмятина; б) “пояс” вмятин

Численно (рис. 1) и экспериментально (рис. 2–6) было установлено, что процесс нелинейного деформирования протекает в две стадии – практически линейная деформация до достижения  $\lambda_{loc}$  (особая точка  $\tilde{C}_0$ ), а затем – участок нелинейного деформирования с достижением критической  $\lambda_{gen}$  (особая точка  $\tilde{C}_2$ ). При достижении первой

предельной точки  $\lambda_{loc}$  реализуется форма потери устойчивости с одной вмятиной и совместной деформацией слоёв – локальная потеря устойчивости (рис. 2, а), при достижении  $\lambda_{gen}$  – “пояс” локальных вмятин – общая потеря устойчивости (рис. 2, б). Если  $\lambda = \lambda_{gen}$ , наблюдалась потеря несущей способности. На рис. 3–6 представлены результаты испытаний для оболочек третьей – шестой серий соответственно. Здесь квадратами отмечены нагрузки, соответствующие локальной потере устойчивости, кружками – общей.

Для оболочек третьей серии (рис. 3) размер области неприятия был постоянен и составлял  $a_{x_1} \times a_{x_2} = 3 \cdot 10^{-2} \times 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ . Изменялось расположение области неприятия вдоль образующей. На рис. 3 критические нагрузки представлены в виде функции расстояния от срединного окружного сечения оболочки до центра области неприятия ( $l_{x_1}, \text{ м}$ ). Проведенные испытания позволили установить, что критические нагрузки (как локальной, так и общей потери устойчивости) слабо зависят от расположения области неприятия.

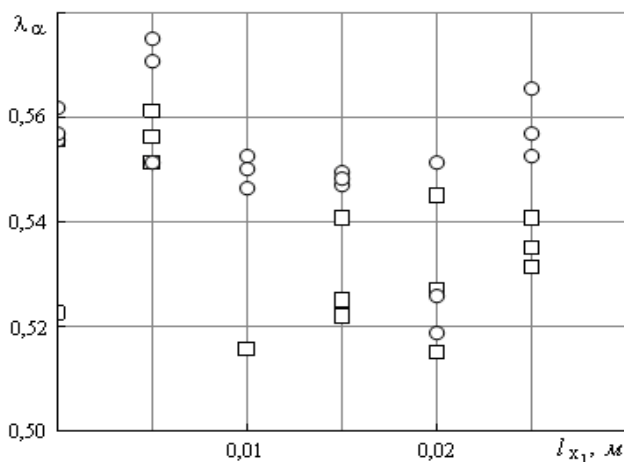


Рис. 3 – Третья серия (одна область неприятия):  
зависимость критических нагрузок от расположения области неприятия

Для оболочек четвёртой серии (рис. 4) постоянными оставались размеры области неприятия в окружном направлении ( $a_{x_2} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ) и её месторасположение; размеры области неприятия в продольном направлении варьировались от  $a_{x_1} = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$  до  $a_{x_1} = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ . Здесь наблюдается монотонное убывание критических нагрузок с ростом размеров области неприятия, при этом также увеличивается расстояние между нагрузками общей и локальной потери устойчивости.

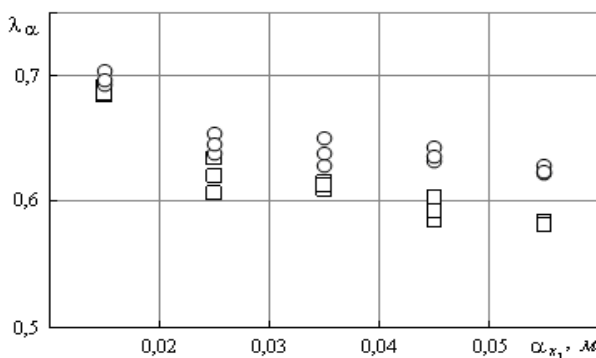


Рис. 4 – Четвёртая серия (одна область не приклея): зависимость критических нагрузок от размеров области не приклея в продольном направлении

Оболочки пятой серии (рис. 5) характеризуются постоянными размерами области не приклея в продольном направлении ( $a_{x_1} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ); в окружном направлении размеры области не приклея изменялись от  $a_{x_2} = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$  до  $5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ . Положение области не приклея оставалось неизменным. Здесь также наблюдается убывание критических нагрузок с ростом размеров области не приклея, однако оно, в отличие от предыдущего случая, не носит монотонного характера. Область немонотонности связана, по-видимому, со сменой типов форм потери устойчивости внутреннего слоя оболочки в области расслоения (формы аналогичны формам цилиндрической панели соответствующих размеров).

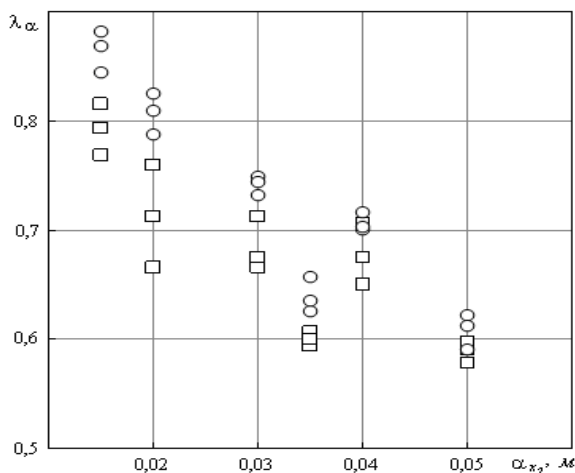


Рис. 5 – Пятая серия (одна область не приклея): зависимость критических нагрузок от размеров области не приклея в окружном направлении

Оболочки шестой серии (рис. 6) изготавливались с двумя диаметрально противоположными не приклеями. Продольные размеры областей не приклея для всех оболочек серии составляли  $a_{x_1} = 2,5 \cdot 10^{-2}$ , а размеры областей не приклея в окружном направлении, как и в предыдущем случае, менялись от  $a_{x_2} = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$  до  $5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ . Здесь, также, наблюдается монотонное убывание критических нагрузок как локальной, так и общей потери устойчивости, однако, на графике зависимости можно выделить два характерных уровня нагрузок общей потери устойчивости:  $\lambda_{cr} \sim 0,8$  и  $\lambda_{cr} \sim 0,7$ .

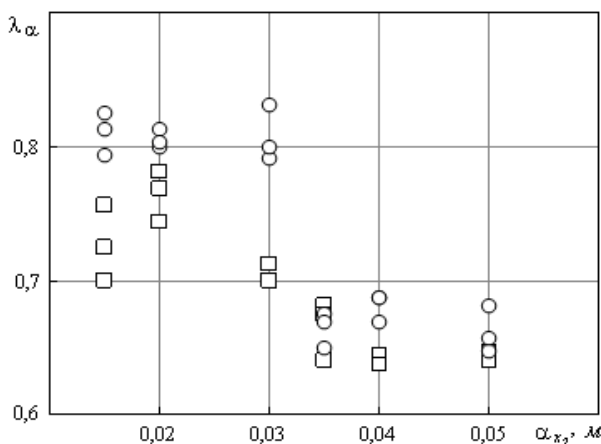


Рис. 6 – Шестая серия (две области не приклея): зависимость критических нагрузок от размеров области не приклея в окружном направлении

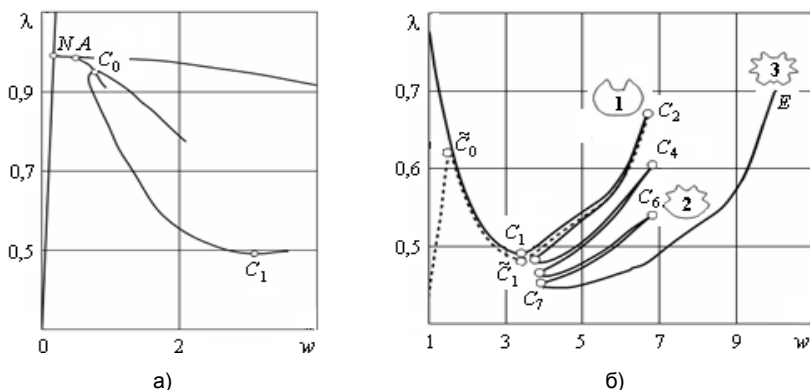


Рис. 7 – Характерная структура ветвления для оболочки без повреждений:  
а) фрагмент общей бифуркационной картины;  
б) ветви с формами деформации одна/несколько локальных вмятин и “пояс” вмятин

Из сопоставления кривой деформирования (рис. 1) и общей картины ветвления для полностью склеенной цилиндрической оболочки (рис. 7), следует, что кривая на рис. 1 реализуется путём разрушения общей картины ветвления за счёт появления возмущений в виде области не-приклея. На рис. 7, а представлен фрагмент указанной структуры: здесь участку ветви  $N-A$  соответствуют регулярные формы деформации; участку ветви  $A-C_0$  – формы деформации вида “пояс” вмятин; участку ветви  $C_0-C_1$  – формы деформации одна или несколько локальных вмятин. На рис. 7, б представлен участок ветви локальных форм и участок ветви с формой вида “пояс” вмятин ( $C_7-E$ ).

**Выводы.** Изложенные выше теоретические и экспериментальные исследования позволяют сформулировать следующее.

1. Потеря устойчивости двухслойной цилиндрической оболочки с областью расслоения при действии равномерного внешнего давления проходит в два этапа: на первом этапе проходит локальная потеря устойчивости в области не-приклея, но оболочка продолжает нести возрастающую нагрузку, на втором – происходит потеря несущей способности в результате потере устойчивости по форме “пояс” локальных вмятин.

2. Соответствующая расчётная кривая нагрузка-прогиб представляет собой разрушение ветви третичного ветвления нелинейной краевой задачи для случая оболочки без расслоения, вызванное ослаблением жёсткости в области расслоения.

Положение области расслоения практически не влияет на несущую способность нагруженной тонкостенной конструкции, увеличение размеров области расслоения приводит к снижению критических нагрузок (как локальной, так и общей); нижняя граница критической нагрузки общей потери устойчивости определяется нижней границей области существования форм деформации вида “пояс” вмятин для соответствующей оболочки без области расслоения.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Моссаковский В. И.** Нелинейная модель деформирования оболочек с расслоениями / В. И. Моссаковский, Н. И. Ободан, И. П. Железко // Докл. АН СССР. – 1985. – Т. 282, № 5. – С. 1070–1073.
2. **Салганик Р. Л.** Задача о деформировании упруго заделанной пластины, моделирующей отслоившееся от подложки покрытие (плоская деформация) / Р. Л. Салганик, К. Б. Устинов // Изв. РАН. МТТ. – 2012. – № 4. – С. 50–62.
3. **Сяо Y.-P.** Buckling and post-buckling of thin film resting on an elastic graded substrate / Y.-P. Cao, F. Jia, Y. Zhao, X.-Q. Feng, S.-W. Yu // Int. J. of Solids and Structures. – 2012. – Vol. 49 – P. 1656–1664.
4. **Фу Y.** The analysis of interlaminar stresses for composite laminated shallow shells with interfacial damage / Y. Fu, S. Li, Y. Mao // Acta Mechanica Sinica. – 2011. – Vol. 24, № 6 – P. 539–554.
5. **Hosseini-Toudeshky H.** Delamination buckling growth in laminated composites using layerwise-interface element / H. Hosseini-Toudeshky, S. Hosseini, B. Mohammadi // Composite Structures. – 2010. – Vol. 92 – P. 1846–1856.
6. **Malgaca L.** Integration of active vibration control methods with finite element models of smart laminated composite structures / L. Malgaca // Composite Structures. – 2010. – Vol. 92 – P. 1651–1663.

7. **Muc A.** Identification of damages in composite multilayered cylindrical panels with delaminations / A. Muc, A. Stawiarski // Composite Structures. – 2012. – Vol. 94 – P. 1871–1879.

8. **Tian Y.** Nonlinear static/dynamic analysis for elasto-plastic laminated plates with interfacial damage evolution / Y. Tian, Y. Fu, Y. Mao // Composite Structures. – 2010. – Vol. 93. – P. 103–112.

*Н. І. Ободан, д-р техн. наук, Є. Ф. Прокопало, канд. техн. наук,  
В. О. Громов, канд. фіз.-мат. наук*

## **ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ПОДОВЖНЬО СТИСНУТИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З ОБЛАСТЮ РОЗШАРУВАННЯ**

У роботі наведено результати чисельного та експериментального аналізу двошарових циліндричних оболонок з областю розшарування, підданих діє рівномірного осьового стиску. Встановлено, що втрата стійкості відбувається в два етапи: локальна втрата стійкості з утворенням локальної вм'ятини в області розшарування та загальна втрата стійкості за формою “пояс” вм'ятин (остання тягне за собою втрату несучої здатності). Аналізується зв'язок між процесом втрати стійкості, що спостерігається, та структурою розгалуження нелінійної крайової задачі теорії оболонок для випадку циліндричної обolonки без області розшарування.

**Ключові слова:** двошарова циліндрична обolonка, область розшарування, локальна та загальна втрата стійкості, теоретичне та експериментальне дослідження.

*N. I. Obodan, Dr. Sci. (Tech.), E. F. Prokopalo, PhD (Tech.),  
V. A. Gromov, PhD (Phys.-Math.)*

## **AXIALLY LOADED CYLINDRICAL SHELL WITH DELAMINATED AREA. THEORETICAL AND EXPERIMENTAL INVESTIGATION**

Numerical and experimental data for uniformly axially loaded cylindrical shell with delaminated area is presented in the paper. It was ascertained that loss of stability is carried out in two phases. The first one (local buckling) leads to localized deformed shape associated with delaminated area. The second one (general buckling) leads to “belt of dents” deformed shape (and, in turn, to loss of load-carrying capability). The relation between the buckling observed and nonlinear boundary problem bifurcation pattern for the case of cylindrical shell without delaminated area is considered.

**Keywords:** two-layered cylindrical shell, delaminated area, local and general buckling, theoretical and experimental investigation.

**Introduction.** Modern two-layered thin-walled shell manufacturing process can lead to delaminated areas between layers. Compressive forces prevailing in the areas may cause localized buckling of a single layer or both layers as well and, in turn, essential drop of shell load-carrying capability. The above-mentioned localized buckling can be revealed and investigated in the frameworks of nonlinear shell behaviour model. Modern studies on the topic [1–8] deal with linear and nonlinear delaminated thin-walled system models and analyze, mainly, pre-buckling branches (unless the first limit point is reached), experimental studies focus on delaminated area identification.

**Problem statement.** In the present paper, two-layered cylindrical shell with delaminated area rectangle in plan or two symmetrically placed delaminated

areas is studied numerically and experimentally. The shell is subjected to uniform axial compression, its ends are clamped.

**Experimental model.** Two-layered cylindrical shell manufactured of Whatman paper is considered to be experimental model. Geometrical characteristics, elastic moduli, and Poisson's ratios for the shell are  $h_1 = h_2 = 0.23 \cdot 10^{-3} m$ ,  $L = 7.5 \cdot 10^{-2} m$ ,  $R = 3.75 \cdot 10^{-2} m$ ;  $E_{x_1} = 4.45 \cdot 10^9 Pa$ ;  $E_{x_2} = 2.15 \cdot 10^9 Pa$ ;  $\mu_{x_1} = 0.31$ ,  $\mu_{x_2} = 0.15$ , respectively.

A total number of shells tested is 80 specimens; specimens are grouped into 6 series. The first and second series contain 4 shells each, other series contain 18 shells (each series include 6 various delamination areas sizes and/or position, 3 shells for each variant). The first series shells are single-layered, shells of other series contains two layers. The second series specimens do not possess delamination areas while shells of third to sixth series are manufactured with rectangular delamination areas of linear sizes  $a_{x_1} \times a_{x_2}$ . If shell possesses single delamination area (third to fifth series) it is placed oppositely to shell joint. If shell possesses two areas they are placed symmetrically about longitudinal shell cross-section passing through the joint line.

**Shell deformation model.** Nonlinear thin-walled system theory equations in conjunction with boundary conditions for shell ends, delamination areas boundaries, and boundaries between normal layer contact and separate deformation subareas (of the delamination areas) are used to formulate shell deformation model. Furthermore, broken lines hypothesis are employed to describe shell stress-strain state in the delamination areas. A paper [8] shows that broken line hypothesis (in comparison with more sophisticated shear hypotheses) leads to not more than 5% error, and yet it can cause shear forces discontinuities at normal layer contact and separate deformation subareas boundaries.

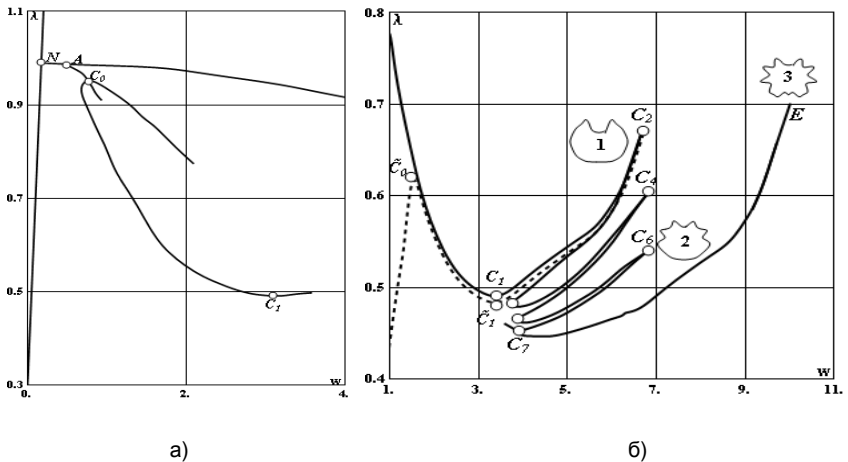


Fig. 1 – Typical branching pattern for undamaged shell:  
a) branching pattern fragment;  
b) branches with deformed shapes single/group of dents.  
The dashed line corresponds to the case of shell with delamination area

**Conclusions.** The obtained experimental and numerical data leads to the following conclusions.

Firstly, two-layered cylindrical shell with delamination areas loses its stability in two steps. The first step ends in the buckling localized at the delamination areas, but the shell is able to carry increasing load, while, after the second one, shell load-carrying capability exhausts and respective buckling mode can be described as a “belt” of localized dents. This conclusion is illustrated by fig. 2 which shows localized and “belt” of dents buckling modes.

Secondly, load-deflection diagram is a result of tertiary branch distortion for the single-layered shell branching pattern; the distortion is caused by rigidity decrease at the delamination areas. This conclusion is illustrated by fig. 1.

Thirdly, the delamination area position hardly affects loaded thin-walled system load-carrying capability, while critical loads (for both localized and general buckling) are essentially dependent on delamination area sizes. The lower boundary for general buckling critical load is estimated by the existence domain lower boundary for “belt of dents” deformed shapes for the respective shell without delamination area.

## REFERENCES

1. **Mossakovskiy V. I.** Nonlinear deformation model for shell with delaminated area / V. I. Mossakovskiy, N. I. Obodan, I. P. Zhelezko // Doklady AN USSR. – 1985. – Vol. 282, № 5. – P. 1070–1073. (in Russian)
2. **Salganik R. L.** Elastically clamped plate deformation as a model for delaminated covering (plane case) / R. L. Salganik, K. B. Ustinov // Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics. – 2012. – № 4. – P. 50–62. (in Russian)
3. **Cao Y.-P.** Buckling and post-buckling of thin film resting on an elastic graded substrate / Y.-P. Cao, F. Jia, Y. Zhao, X.-Q. Feng, S.-W. Yu // Int. J. of Solids and Structures. – 2012. – Vol. 49 – P. 1656–1664.
4. **Fu Y.** The analysis of interlaminar stresses for composite laminated shallow shells with interfacial damage / Y. Fu, S. Li, Y. Mao // Acta Mechanica Solida Sinica. – 2011. – Vol. 24, № 6 – P. 539–554.
5. **Hosseini-Toudeshky H.** Delamination buckling growth in laminated composites using layerwise-interface element / H. Hosseini-Toudeshky, S. Hosseini, B. Mohammadi // Composite Structures. – 2010. – Vol. 92 – P. 1846–1856.
6. **Malgaca L.** Integration of active vibration control methods with finite element models of smart laminated composite structures / L. Malgaca // Composite Structures. – 2010. – Vol. 92 – P. 1651–1663.
7. **Muc A.** Identification of damages in composite multilayered cylindrical panels with delaminations / A. Muc, A. Stawiarski // Composite Structures. – 2012. – Vol. 94 – P. 1871–1879.
8. **Tian Y.** Nonlinear static/dynamic analysis for elasto-plastic laminated plates with interfacial damage evolution / Y. Tian, Y. Fu, Y. Mao // Composite Structures. – 2010. – Vol. 93. – P. 103–112.

Днепропетровский национальный  
университет им. Олеся Гончара,  
Днепропетровск, Украина

Поступила в редколлегию 06.06.2013