ISSN 2079–1836
2014, вип. 22

УДК 393.3

В. С. Попович, д-р техн. наук, В. В. Янішевський

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ТОНКОЇ СМУГИ ЗА СКЛАДНОГО ТЕПЛООБМІНУ

На основі моделі термочутливого тіла, з використанням методу лінеаризувальних параметрів знайдено температурне поле в тонкій смузі, через поверхні якої здійснюється конвективний теплообмін з середовищами сталих температур. Визначено компоненти напружено-деформованого стану, спричиненого знайденим розподілом температури. На основі проведених числових досліджень проаналізовано вплив термочутливості матеріалу на температурне поле та напруження.

***Ключові слова**: термочутливе тіло, тонка пластинка, температурне поле, термопружний стан.*

Вступ. Лінійні моделі при дослідженні полів температури та компонент напруженого стану в тонкостінних елементах конструкцій, що експлуатуються в умовах високих чи низьких температур, не в повній мірі відображають реальну суть речей. Тому, для отримання достовірніших результатів, використовують нелінійні моделі, де теплові та механічні характеристики матеріалу залежать від температури. В таких моделях задача теплопровідності є нелінійною крайовою задачею [3, 5, 6]. Якщо розглядати матеріали, коефіцієнт температуропровідності яких неістотно залежить від температури [1, 5], то її точний розв'язок можна знайти, коли на поверхні задана температура або температурний потік. Такий тип нелінійних задач зводиться до лінійних шляхом використання перетворення Кірхгофа. Розв'язок отриманої лінійної крайової задачі на змінну Кірхгофа можна знайти класичними методами (розділення змінних, інтегральних перетворень тощо). При заданні граничної умови конвективного теплообміну перетворення Кірхгофа не лінеаризує задачу повністю. В цьому випадку пропонується нелінійні вирази температури через змінну Кірхгофа подати у вигляді лінійних залежностей, що містять певні лінеаризувальні параметри (ЛП) і таким чином звести задачу до лінійної. Далі, шляхом ітерації, ЛП підбирають так, щоб із заданою точністю задовольнялись нелінійні умови, отримані з умов конвективного теплообміну.

В моделі термочутливого тіла, задача термопружності є крайовою задачею для системи рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами, і для знаходження її розв'язку використовують різні варіанти методу збурень чи зводять до розв'язання певних інтегральних рівнянь [2, 5, 8, 11].

© В. С. Попович, В. В. Янішевський, 2014

В даній праці розглядається задача термопружності для тонкої смуги за конвективного теплообміну на бокових поверхнях з середовищами сталих температур. Для знаходження температурного поля в ній апробується один із варіантів методу ЛП[2]. Знаходиться і досліджується відповідний термопружний стан.

Аналітико-числовий розв'язок задачі теплопровідності. Розглянемо, віднесену до декартової прямокутної системи координат $O\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$ смугу $|\bar{x}| \le l,\ |\bar{y}| \le \infty,\ |\bar{z}| \le \delta$. Її теплові та механічні характеристики залежать від температури, а товщина 2δ істотно менша за інші розміри (тонка смуга). Через поверхні $\bar{x} = \pm l$ смуга конвективно нагрівається середовищами сталих температур t_1 та t_2 відповідно. На бокових поверхнях $z = \pm\delta$ – конвективно взаємодіє з середовищем сталої температури, з якою співпадає початковий її розподіл.

За таких дій математична модель для визначення нестаціонарного температурного поля смуги має вигляд [2]:

$$\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left(\lambda_t(t)\frac{\partial t}{\partial\bar{x}}\right)+\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\lambda_t(t)\frac{\partial t}{\partial\bar{z}}\right)=c_v(t)\frac{\partial t}{\partial\tau}; \tag{1}$$

$$\left[\lambda_t(t)\frac{\partial t}{\partial\bar{x}}+\alpha_1(t-t_1)\right]_{\bar{x}=l}=0; \tag{2}$$

$$\left[\lambda_t(t)\frac{\partial t}{\partial\bar{x}}-\alpha_2(t-t_2)\right]_{\bar{x}=-l}=0; \tag{3}$$

$$\left[\lambda_t(t)\frac{\partial t}{\partial\bar{z}}\pm\alpha_z(t-t_p)\right]_{\bar{z}=\pm\delta}=0; \tag{4}$$

$$t\big|_{\tau=0}=t_p. \tag{5}$$

Тут $\lambda_t(t)=\lambda_{t0}\lambda_t^*(T)$, $c_v(t)=c_{v0}c_v^*(T)$, де λ_{t0} і c_{vo} – опорні значення коефіцієнта теплопровідності та об'ємної теплоємності відповідно, $\lambda_t^*(T)$, $c_v^*(T)$ – функції, що описують залежність цих характеристик від безрозмірної температури $T = t/t_0$, причому $\lambda_t^*(T_p)=c_v^*(T_p)=1$, t_0 – вибрана нами відлікова температура.

Оберемо за t_0, більшу з температур t_p, t_1 та t_2, а за характерний розмір півтовщину смуги δ та введемо безрозмірні температури $(T_p, T_1, T_2) = (t_p, t_1, t_2)/t_0$ і координати $(x, z) = (\bar{x}, \bar{z})/\delta$. У введених величинах задача (1)–(5) набуває вигляду:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_t^*(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_t^*(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right)=c_v^*(T)\frac{\partial T}{\partial Fo}; \tag{6}$$

$$\left[\lambda_t^*(T)\frac{\partial T}{\partial x}+Bi_1(T-T_1)\right]_{x=L}=0; \tag{7}$$

$$\left[\lambda_t^*(T)\frac{\partial T}{\partial x} - Bi_2(T-T_2)\right]_{x=-L} = 0\,; \tag{8}$$

$$\left[\lambda_t^*(T)\frac{\partial T}{\partial z} \pm Bi_z(T-T_p)\right]_{z=\pm 1} = 0\,; \tag{9}$$

$$T\big|_{Fo=0} = T_p\,. \tag{10}$$

Тут $L = l/\delta$, $Fo = a_0\tau/\delta^2$ – час Фур'є, $Bi_1 = \alpha_1\delta/\lambda_{t0}$, $Bi_2 = \alpha_2\delta/\lambda_{t0}$, $Bi_z = \alpha_z\delta/\lambda_{t0}$ – критерії Біо. Вважаємо, що коефіцієнт температуропровідності незначно залежить від температури $\lambda_t(T)/c_v(T) = [\lambda_{t0}/c_{v0}][\lambda_t^*(T)/c_v^*(T)] \approx \lambda_{t0}/c_{v0} = a_0$, тобто дорівнює його опорному значенню. Якщо ввести змінну Кірхгофа [5, 6, 10, 11] $\theta = \int_{T_p}^{T} \lambda_t^*(T)\,dT$, то з задачі (6)–(10) отримаємо таку крайову задачу на змінну Кірхгофа θ:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = \frac{\partial\theta}{\partial Fo}\,;$$

$$\left[\frac{\partial\theta}{\partial x} + Bi_1(T(\theta)-T_1)\right]_{x=L} = 0\,;$$

$$\left[\frac{\partial\theta}{\partial x} - Bi_2(T(\theta)-T_2)\right]_{x=-L} = 0\,;$$

$$\left[\frac{\partial\theta}{\partial z} \pm Bi_z(T(\theta)-T_p)\right]_{z=\pm 1} = 0\,,$$

де $T(\theta)$ – вираз температури через змінну Кірхгофа.

Враховуючи тонкість смуги, усереднимо розподіл змінної Кірхгофа по її товщині $\theta = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\theta\,dz$, як це зроблено в праці [6] для змінної Кірхгофа, а у [7] для температури. Врахувавши симетричність задачі по координаті z (для усередненого значення зберігаємо позначення θ), матимемо:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - Bi_z\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}T(\theta)\,dz - T_p\right) = \frac{\partial\theta}{\partial Fo}\,; \tag{11}$$

$$\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}+Bi_1\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}T(\theta)dz-T_1\right)\right]_{x=L}=0; \tag{12}$$

$$\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}-Bi_2\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}T(\theta)dz-T_2\right)\right]_{x=-L}=0. \tag{13}$$

$$\theta\big|_{Fo=0}=0. \tag{14}$$

Відповідно до методу лінеаризувальних параметрів [2] подамо нелінійні вирази $T(\theta)$ у вигляді $T(\theta)=(1+\kappa)\theta+T_p$. В результаті матимемо:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-Bi_z(1+\kappa_z)\theta=\frac{\partial\theta}{\partial Fo}; \tag{15}$$

$$\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}+Bi_1\left((1+\kappa_1)\theta-(T_1-T_p)\right)\right]_{x=L}=0; \tag{16}$$

$$\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}-Bi_2\left((1+\kappa_2)\theta-(T_2-T_p)\right)\right]_{x=-L}=0; \tag{17}$$

$$\theta\big|_{Fo=0}=0, \tag{18}$$

де $\kappa_z,\kappa_1,\kappa_2$ — введені, поки що невідомі лінеаризувальні параметри.

Для побудови розв'язку лінійної крайової задачі (15)–(18) скористаємось перетворенням Лапласа [13] по часу Fo. В результаті отримаємо задачу:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}-Bi_z^*\theta=s\theta; \tag{19}$$

$$\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}+Bi_1^*\left(\theta-(T_1-T_p)/[s(1+\kappa_1)]\right)\right]_{x=L}=0; \tag{20}$$

$$\left[\frac{d\theta}{dx}-Bi_2^*\left(\theta-(T_2-T_p)/[s(1+\kappa_2)]\right)\right]_{x=-L}=0, \tag{21}$$

де $\theta=\int_0^\infty\theta e^{-sFo}dFo$, $Bi_z^*=Bi_z(1+\kappa_z)$, $Bi_1^*=Bi_1(1+\kappa_1)$, $Bi_2^*=Bi_2(1+\kappa_2)$.

Загальний розв'язок рівняння (19) має вигляд

$$\theta=A\,\mathrm{ch}(x\sqrt{s^*})+B\,\mathrm{sh}(x\sqrt{s^*}),$$

де $s^*=Bi_z^*+s$, а A і B — сталі інтегрування.

З умов (19), (21) отримуємо таку систему алгебричних рівнянь:

$$\begin{cases} A\cdot a_1(s)+B\cdot a_2(s)-a_3(s)=0 \\ A\cdot b_1(s)+B\cdot b_2(s)+b_3(s)=0, \end{cases} \tag{22}$$

де

$$a_1(s)=\sqrt{s^*}\,\mathrm{sh}(L\sqrt{s^*})+Bi_1^*\,\mathrm{ch}(L\sqrt{s^*})\,;\ a_2(s)=\sqrt{s^*}\,\mathrm{ch}(L\sqrt{s^*})+Bi_1^*\,\mathrm{sh}(L\sqrt{s^*})\,;$$

$$a_3(s)=\frac{Bi_1}{s}(T_1-T_p)\,;$$

$$b_1(s)=-\sqrt{s^*}\,\mathrm{sh}(L\sqrt{s^*})-Bi_2^*\,\mathrm{ch}(L\sqrt{s^*})\,;\ b_2(s)=\sqrt{s^*}\,\mathrm{ch}(L\sqrt{s^*})+Bi_2^*\,\mathrm{sh}(L\sqrt{s^*})$$

$$b_3(s)=\frac{Bi_2}{s}(T_2-T_p)\,.$$

З системи (22) знаходимо такі вирази для сталих A і B:

$$A=(a_2(s)b_3(s)+a_3(s)b_2(s))/\psi(s),\ B=(-a_3(s)b_1(s)-a_1(s)b_3(s))/\psi(s),$$

де

$$\psi(s)=s\varphi(s)\,;\ \varphi(s)=\sqrt{s^*}(Bi_1^*+Bi_2^*)\left[\mathrm{ch}^2(L\sqrt{s^*})+\mathrm{sh}^2(L\sqrt{s^*})\right]+$$

$$+2\,\mathrm{sh}(L\sqrt{s^*})\,\mathrm{ch}(L\sqrt{s^*})\left[s^*+Bi_1^*Bi_2^*\right].$$

В результаті зображення Лапласа змінної Кірхгофа набуває вигляду:

$$\theta=\frac{\Phi(s,x)}{\psi(s)},$$

де

$$\Phi(s,x)=\mathrm{ch}(x\sqrt{s^*})\left(\sqrt{s^*}\,\mathrm{ch}(L\sqrt{s^*})\left[Bi_2(T_2-T_p)-Bi_1(T_1-T_p)\right]+\right.$$

$$\left.+\mathrm{sh}(L\sqrt{s^*})\left[Bi_2Bi_1^*(T_2-T_p)-Bi_1Bi_2^*(T_1-T_p)\right]\right)-$$

$$-\mathrm{sh}(x\sqrt{s^*})\left(\sqrt{s^*}\,\mathrm{sh}(L\sqrt{s^*})\left[Bi_2(T_2-T_p)+Bi_1(T_1-T_p)\right]+\right.$$

$$\left.+\mathrm{ch}(L\sqrt{s^*})\left[Bi_2Bi_1^*(T_2-T_p)+Bi_1Bi_2^*(T_1-T_p)\right]\right).$$

Згідно з формулою оберненого перетворення Лапласа [14]

$$\theta=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Phi(s,x)}{\psi(s)}e^{sFo}ds\,. \tag{23}$$

Перейдемо в інтегралі формули (23) до змінної інтегрування $s^* = s + Bi_z^*$. Тоді $s = s^* - Bi_z^*$, $ds^* = ds$, а межі інтегрування не зміняться. В результаті

$$\theta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} R(s^*, x)e^{\left(s^* - Bi_z^*\right)Fo} ds^* = e^{-Bi_z^* Fo}\Im(r, Fo),$$

де

$$\Im(r, Fo) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} R(s, x)e^{sFo} ds$$ (тут змінна інтегрування s^* позначена s),

$$R(s, x) = \frac{\Phi(s, r)}{\psi(s)},\ \psi(s) = (s - Bi_z^*)\varphi(s).$$

Як бачимо $\Im(r, Fo)$ є оригіналом зображення Лапласа функції $R(s, x)$, яка є відношенням узагальнених поліномів, причому характеристичний поліном $\psi(s)$ не містить сталої, а тому умови теореми розкладу Ващенко – Захарченко виконуються.

Прирівнявши до нуля $\psi(s)$, отримаємо корінь $s = Bi_z^*$ та безліч коренів $s_n = -\mu_n^2$ виразу $\varphi(s) = 0$, де $\mu_n = i\sqrt{s_n}$ і визначаються з рівняння $\varphi(-\mu^2) = 0$.

Похідна характеристичного многочлена $\psi'(s) = \varphi(s) + s\varphi'(s)$. При $s = Bi_z^*$ її значення $\psi'(Bi_z^*) = \varphi(Bi_z^*) = \sqrt{Bi_z^*}(Bi_1^* + Bi_2^*)\left[\mathrm{ch}^2(L\sqrt{Bi_z^*}) + \right.$

$\left. + \mathrm{sh}^2(L\sqrt{Bi_z^*})\right] + 2\,\mathrm{sh}(L\sqrt{Bi_z^*})\,\mathrm{ch}(L\sqrt{Bi_z^*})\left[Bi_z^* + Bi_1^* Bi_2^*\right]$, а при $s_n = -\mu_n^2$ вона обчислюється за формулою $\psi'(s_n) = \psi'(-\mu_n^2) = -\mu_n^2\varphi(-\mu_n^2)$. Тоді, згідно теореми розкладу значення $\Im(Fo, x)$ є наступним

$$\Im(Fo, x) = \frac{\Phi(Bi_z^*, x)}{\varphi(Bi_z^*)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi(-\mu_n^2, x)}{-\mu_n^2\varphi'(-\mu_n^2)}e^{-\mu_n^2 Fo},\qquad (24)$$

де штрихом позначена похідна по s.

Корені трансцендентного рівняння $\varphi(-\mu_n^2) = 0$ знаходимо методом Ньютона.

Якщо, наприклад, $\lambda_t^*(T)=1+k(T-T_p)$, то з виразу для змінної Кірхгофа матимемо, що температура T через змінну Кірхгофа виражається таким чином

$$T\equiv T(Fo,x)=k^{-1}\left(\sqrt{1+2k\theta(Fo,x)}-1\right)+Tp\ .$$

Параметри $\kappa_1,\kappa_2,\kappa_z$ підбираємо так, щоб з заданою точністю вираз змінної Кірхгофа (24) задовольняв рівняння (11) умови (12) і (13). В результаті для їх визначення отримаємо таку систему трансцендентних рівнянь ($\theta\equiv\theta(Fo,x,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_z)$)

$$\begin{cases} k^{-1}\left(\sqrt{1+2k\theta}-1\right)=(1+\kappa_z)\theta, \\ k^{-1}\left(\sqrt{1+2k\theta}-1\right)\Big|_{x=L}=(1+\kappa_1)\theta\big|_{x=L}, \\ k^{-1}\left(\sqrt{1+2k\theta}-1\right)\Big|_{x=-L}=(1+\kappa_2)\theta\big|_{x=-L}. \end{cases} \qquad (25)$$

Розв'язок даної системи рівнянь для кожного конкретного значення часу Fo та координати $\bar{x}$ знаходимо, використовуючи метод Ньютона, взявши за початкове наближення $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_z=0$.

Числовий розв'язок задачі теплопровідності. Для верифікації отриманого методом лінеаризувальних параметрів розв'язку задачі (11)–(14) знайдемо її розв'язок повздовжнім варіантом методу прямих. Розіб'ємо відрізок $[-L,L]$ на N частин з кроком $h=2L/N$. Запишемо різницеву схему для другої похідної рівняння (11)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)=\frac{1}{h}\left(\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]_{i+1}-\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]_{i}\right)=\frac{1}{h}\left(\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{h}-\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{h}\right)=\frac{1}{h^2}\left(\theta_{i+1}-2\theta_i+\theta_{i-1}\right).$$

Для граничних умов (12) та (13) використовуватимемо центральну різницеву похідну $\frac{\partial\theta}{\partial\bar{x}}\approx\frac{\theta_{i+1}-\theta_{i-1}}{2h}$. Таким чином, матимемо таку різницеву задачу:

$$\frac{1}{h^2}\left(\theta_{i+1}-2\theta_i+\theta_{i-1}\right)-Bi_z\left(T\left(\theta_i\right)-T_p\right)=\dot{\theta}_i\ ,\ i=\overline{0,N}\ ; \qquad (26)$$

$$\frac{1}{2h}\left(\theta_1-\theta_{-1}\right)+Bi_1\left(T\left(\theta_0\right)-T_1\right)=0\ ; \qquad (27)$$

$$\frac{1}{2h}\left(\theta_{N+1}-\theta_{N-1}\right)-Bi_2\left(T\left(\theta_N\right)-T_2\right)=0\ ; \qquad (28)$$

$$\theta_i\big|_{Fo=0} = 0,\ i = \overline{0, N}\,, \tag{29}$$

де $\theta_i \equiv \theta_i\left(Fo\right)$, а $\dot{\theta}_i$ – похідна за часом Fo.

Визначивши з (27), (28) θ_{N+1} та θ_{-1} і підставивши їх у (26) для $i = N$ та $i = 0$, отримаємо:

$$\frac{1}{h^2}\left(\theta_1 - 2\theta_0 + \theta_1 - 2hBi_1\left[T\left(\theta_0\right) - T_2\right]\right) - Bi_z\left(T\left(\theta_0\right) - T_p\right) = \dot{\theta}_0\,;$$

$$\frac{1}{h^2}\left(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}\right) - Bi_z\left(T\left(\theta_i\right) - T_p\right) = \dot{\theta}_i\ ,\ i = \overline{1, N-1}\,;$$

$$\frac{1}{h^2}\left(\theta_{N-1} - 2hBi_2\left[T\left(\theta_N\right) - T_1\right] - 2\theta_N + \theta_{N-1}\right) - Bi_z\left(T\left(\theta_N\right) - T_p\right) = \dot{\theta}_N\,.$$

Після упорядкування та спрощення, приходимо до такої напівдискретної моделі задачі на змінну Кірхгофа:

$$2h^{-2}\left(\theta_1 - \theta_0\right) - T\left(\theta_0\right)\left(2Bi_2h^{-1} + Bi_z\right) + 2Bi_2T_2h^{-1} + Bi_zT_p = \dot{\theta}_0\,;$$

$$h^{-2}\left(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}\right) - Bi_z\left(T\left(\theta_i\right) - T_p\right) = \dot{\theta}_i\ ,\ i = \overline{1, N-1}\,;$$

$$2h^{-2}2\left(\theta_{N-1} - \theta_N\right) - T\left(\theta_N\right)\left(2Bi_1h^{-1} + Bi_z\right) + 2Bi_1T_1h^{-1} + Bi_zT_p = \dot{\theta}_N\,;$$

$$\theta_i\big|_{Fo=0} = 0,\ i = \overline{0, N}\,,$$

яка є задачею Коші для системи N звичайних нелінійних диференціальних рівнянь. Її розв'язок знаходимо чисельно, використовуючи неявний метод Гіра другого порядку апроксимації за часом, вигляду

$$\frac{3\theta_i^j - 4\theta_i^{j-1} + \theta_i^{j-2}}{2w} = f_i\left(\theta_i^j\right),\ j = \overline{0, M}\,,$$

де w і M — крок та кількість точок розбиття за часом відповідно.

Визначення температурних напружень. Знайдений змінний з часом Fo та координатою $\bar{x}$ розподіл температури спричинить в смузі деформований стан, який визначається компонентою вектора переміщень u_0 в напрямку осі Ox. Його знаходимо з рівняння [2]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{G(t)}{1-\nu(t)}\frac{\partial u_0}{\partial \bar{x}} - G(t)\frac{1+\nu(t)}{1-\nu(t)}\Phi(t)\right) = 0, \tag{30}$$

де $\Phi\left(t\right) = \int\limits_{t_p}^{t} \alpha_t(\xi)d\xi$ — суто теплова деформація.

Модуль зсуву $G(t)$, коефіцієнт Пуассона $\nu(t)$ та температурний коефіцієнт лінійного розширення $\alpha_t(t)$ подамо у вигляді $\chi(t) \equiv \chi(T) = \chi_0 \chi^*(T)$, де $\chi_0 = \chi(T_p)$ – опорні значення характеристик, а функції $\chi^*(T)$ описують залежність характеристик від безрозмірної температури, а саме

$$\chi(t) = \chi_0 \chi^*(T) = \chi_0 \left(1 + k_{\mu 1}(T - T_p) + k_{\mu 2}(T - T_p)^2 + k_{\mu 3}(T - T_p)^3\right),$$

де $k_{\mu 1}, k_{\mu 2}, k_{\mu 3}$ сталі коефіцієнти $(\mu = \{\nu, E, \alpha\})$.

Вважаємо, що смуга вільна від зовнішніх навантажень, тому зусилля $N_x|_{\bar{x}\pm l} = 0$. Ця умова виражена через переміщення має такий вигляд

$$\left[J_1 \frac{\partial u_0}{\partial \bar{x}} + J_2 \frac{\partial u_0}{\partial \bar{x}} - J_3 \right]_{\bar{x}=\pm l} = 0, \tag{31}$$

де

$$J_1 = 2\delta \frac{\nu(t) G(t)}{1-\nu(t)};\ J_2 = 2\delta G(t);\ J_3 = 2\delta G(t) \frac{1+\nu(t)}{1-\nu(t)} \Phi(t).$$

Підставивши J_1, J_2, J_3 у (31), отримаємо

$$\left[\frac{G(t)}{1-\nu(t)} \frac{\partial u_0}{\partial \bar{x}} - G(t) \frac{1+\nu(t)}{1-\nu(t)} \Phi(t) \right]_{\bar{x}=\pm l} = 0. \tag{32}$$

Відповідні компоненти тензора напружень через переміщення u_0 обчислимо за формулами

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 2G(t)\left(\dfrac{\nu(t)}{1-\nu(t)} + 1\right)\dfrac{\partial u_0}{\partial \bar{x}} - 2G(t)\dfrac{1+\nu(t)}{1-\nu(t)}\Phi(t), \\ \sigma_{yy} = 2G(t)\left(\dfrac{\nu(t)}{1-\nu(t)}\right)\dfrac{\partial u_0}{\partial \bar{x}} - 2G(t)\dfrac{1+\nu(t)}{1-\nu(t)}\Phi(t), \\ \sigma_{xy} = 0. \end{cases} \tag{33}$$

а рівняння рівноваги мають такий вигляд:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \overline{x}} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \overline{y}} = 0, \ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \overline{x}} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial \overline{y}} = 0.$$

Проінтегрувавши рівняння (30), отримуємо

$$\frac{G(t)}{1-\nu(t)} \frac{\partial u_0}{\partial \overline{x}} - G(t) \frac{1+\nu(t)}{1-\nu(t)} \Phi(t) = C, \qquad (34)$$

де C – довільна стала.

З граничної умови (32) випливає, що стала $C = 0$. З рівності (34) отримаємо, що

$$\frac{\partial u_0}{\partial \overline{x}} = \left(1+\nu(t)\right) \Phi(t). \qquad (35)$$

Підставивши вираз (35) у формули для напружень (33), знаходимо:

$$\sigma_{yy} = -2G(t)\left(1+\nu(t)\right)\Phi(t), \ \sigma_{xx} = 0, \ \sigma_{xy} = 0.$$

Вводячи безрозмірне напруження $\sigma_y = \dfrac{\sigma_{yy}}{2G_0 \alpha_{t0} t_0}$, для його обчислення маємо

$$\sigma_y = -G^*(T)\left(1+\nu_0 \nu^*(T)\right)\Phi^*(T),$$

де

$$\Phi^*(T) = \int_{T_p}^{T} \alpha_t^*(\xi) d\xi .$$

Числовий аналіз термопружного стану. При обчисленні температурного поля та напружень, використовувались такі вхідні дані: $t_p = 293K$, $t_2 = 873K$, $t_1 = 473K$. За відлікову температуру t_0 вибрали t_2. Таким чином $T_p = t_p / t_0 = 0,3356$, $T_1 = t_1 / t_0 = 0,5418$, $T_2 = 1$. Прийняли $l = 0,1$ *м*, $\delta = 0,01$ *м*, $L = l/\delta = 10$, $Bi_z = 0,05$, $Bi_1 = Bi_2 = 5,5$, $k = -0,5253$, $\lambda_{t0} = 47,7636 \ \dfrac{Bm}{мК}$. Обчислене середньо-інтегральне значення коефіцієнта теплопровідності (на проміжку температур $293K - 873K$)

$\lambda_{av} = 39{,}4285\ \frac{Bm}{мК}$. Вирази неперервних залежностей термомеханічних характеристик матеріалу сталі У12, для діапазону температур $293K - 873K$, отримано методом найменших квадратів. Дискретні значення характеристик взяті з таблиць [5]. Зважаючи на формулу (30) маємо, що для модуля зсуву $G_0 = 74{,}9 \cdot 10^9\ Па$, $k_{G1} = -0{,}27,\ k_{G2} = 0{,}21,\ k_{G3} = 0{,}59$, для коефіцієнта Пуассона $\nu_0 = 0{,}282,\ k_{\nu 1} = 0{,}199,\ k_{\nu 2} = -1{,}291,\ k_{\nu 3} = 2{,}36$, для коефіцієнта теплового лінійного розширення $\alpha_{t0} = 11{,}68 \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$, $k_{\alpha 1} = 1{,}33$, $k_{\alpha 2} = -0{,}65, k_{\alpha 3} = 0$. При цьому, значення суто теплової деформації

$$\Phi(t) = t_0 \cdot 11{,}68 \cdot 10^{-6}\left((T - T_p) + 1{,}33(T - T_p)^2 \big/ 2 - 0{,}65(T - T_p)^3 \big/ 3\right).$$

На рис. 1. наведено графіки розподілу температури по ширині смуги для різних моментів безрозмірного часу Fo. Суцільні лінії стосуються розподілів температури обчисленої з використанням трьох ЛП, значення яких знаходили з системи (25), штрихові лінії – розподілів температури обчисленої з використанням двох ЛП, значення яких знаходили з першого і третього рівняння системи (25), пунктирні – використання одного ЛП, значення якого знаходилось з третього рівняння системи (25). Відмінності розподілів останніх двох від розподілу отриманого з використанням 3-х ЛП не перевищують 2%.

На рис. 2 подано графіки розподілу температури, де суцільними лініями позначено розподіли температури обчисленої з використанням трьох ЛП, штриховими – розподіли температури в нетермочутливому тілі за опорного значення КТ, пунктирними – в нетермочутливому тілі за середньо-інтегрального значення КТ. Відмінності розподілів останніх двох від розподілу отриманого з використанням 3-х ЛП складають $2–4{,}5\%$ та $4–10\%$ відповідно. На рис. 3 подано аналогічні графіки, які відповідають такій самій задачі теплопровідності зі збільшеною в 20 разів інтенсивністю нагріву на поверхнях $x = \pm L$. В такому випадку відмінності розподілів температури в термочутливому тілі та нетермочутливих тілах з опорним та середньо-інтегральним значенням КТ становить $4–7\%$ та $6–12\%$ відповідно. Таким чином, з даних на рис. 2, 3 можна стверджувати, що нехтування температурною залежністю КТ (його значення дорівнює опорному значенню термочутливого) краще відображає динаміку температурного поля в тілі ніж заміна КТ на середньо-інтегральне його значення.

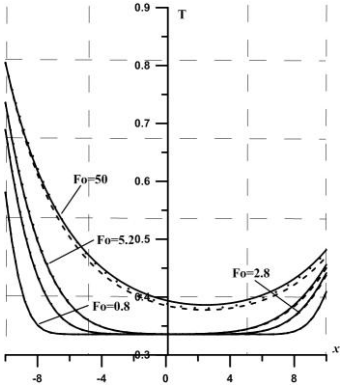

Рис. 1

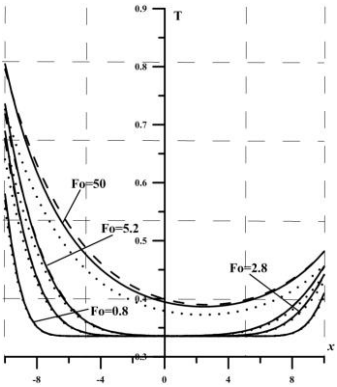

Рис. 2

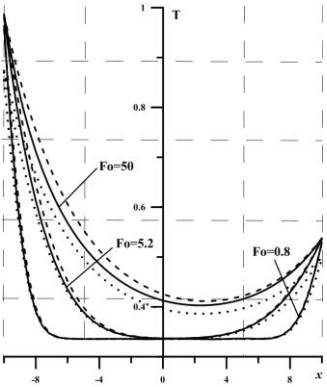

Рис. 3

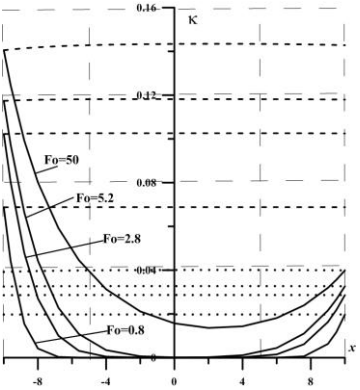

Рис. 4

Обчислюючи температурне поле методом ЛП бачимо (рис. 4), що для фіксованого часу по координаті істотно змінюється лише κ_z (суцільні лінії). Лінеаризувальні параметри κ_1 (пунктирні лінії) та κ_2 (штрихові лінії) є майже сталі по координаті. Тому на першому кроці, при знаходженні значень ЛП для конкретного часу Fo можна систему (25) розв'язати лише в одній точці по x, наприклад при $x=-L$ – де досягається максимальне значення температури і де система зводиться до двох рівнянь. У решті ж точок по координаті достатньо знаходити значення κ_z з першого рівняння системи (25), де замість κ_1 та κ_2 взяті їх значення з першого кроку. Максимальна відмінність температурного розподілу, знайденого з використанням такого спрощення, від температурного розподілу, знайденого з використанням двох ЛП, які визначались з системи (25), є менша $0{,}2\%$.

При обчисленні числового розв'язку задачі теплопровідності крок по часу склав $0{,}01$, а по координаті проміжок був розбитий на 100 частин. Відтак система у задача Коші містила 100 звичайних нелінійних диференціальних рівнянь. Відмінність числового розв'язку від отриманого з використанням трьох ЛП склала $0{,}65$ %.

На рис. 5 подано графіки температурних напружень у смузі з залежними від температури механічними характеристиками, де суцільними лініями позначено напруження у тілі температурний розподіл в якому був обчислений з використанням 3-х ЛП, штриховими – за урахування температури тіла з опорним КТ, пунктирними – з середньо-інтегральним значенням КТ. Відмінності при обчисленні термопружного стану у смузі зі сталим опорним чи середньо-інтегральним значенням КТ від напружень у термочутливому тілі лежать у межах 5–20% та 5–17% відповідно.

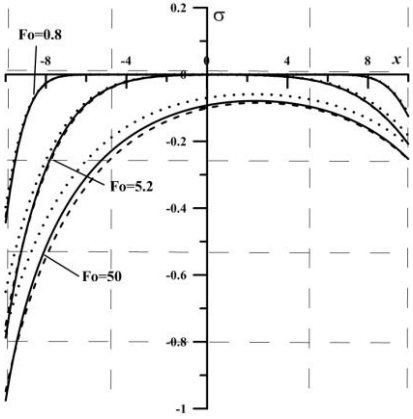

Рис. 5

На рис. 6 та 7 подано графіки напружень, де суцільними лініями зображено їх розподіли обчислені за всіх залежних від температури механічних характеристик. Штрихові лінії зображують розподіл напружень у випадку нехтування температурною залежністю коефіцієнта Пуассона, пунктирними – за нехтування температурною залежністю модуля зсуву; штрих-пунктирними – за нехтування температурною залежністю температурного коефіцієнта лінійного розширення(ТКЛР). За нехтування температурною залежністю механічних характеристик на рис. 6 вони замінялись на їх опорні значення, а на рис. 7 – на відповідні середньо-інтегральні значення. Зауважимо, що для обчислення напружень, зображених на цих рисунках, використовувався розподіл температури в термочутливому тілі, знайдений методом лінеаризувальних параметрів з використанням трьох ЛП.

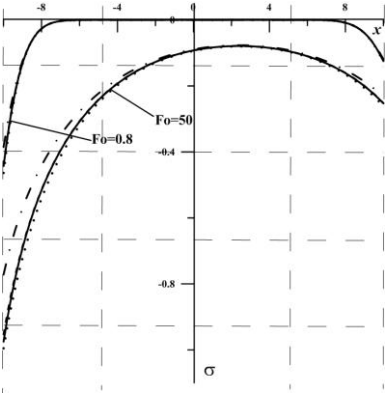

Рис. 6

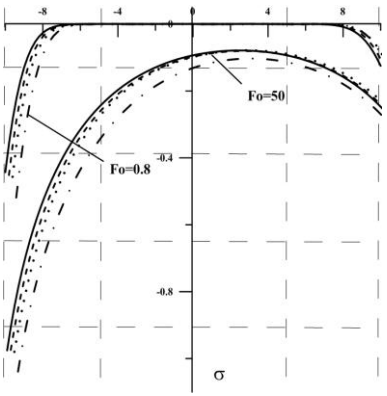

Рис. 7

Як бачимо з рис. 6 та 7 на напруження істотно впливає нехтування температурною залежністю ТКЛР. Максимальна абсолютна похибка між напруженнями в термочутливому тілі та напруженнями обчисленими за сталого ТКЛР складає -0,2 при заміні його на опорне і до 0,08 на середньо-інтегральне значення. При нехтуванні термочутливістю коефіцієнта Пуассона максимальна абсолютна похибка в напруженнях складала -0,02 при заміні його на опорне і 0,01 на середньо-інтегральне значення, а при нехтуванні температурною залежністю модуля зсуву вона становила 0,03 при заміні на опорне чи середньо-інтегральне значення.

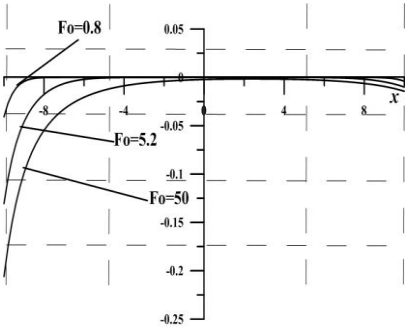

Рис. 8

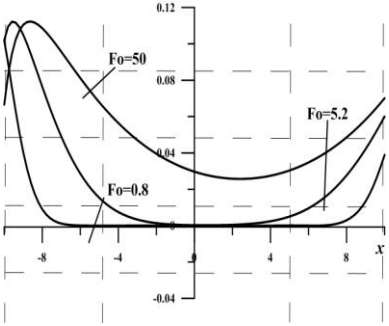

Рис. 9

На рис. 8 та 9 подано графіки абсолютних похибок напружень, обчислених за всіх залежних механічних характеристик, та напружень, обчислених за всіх опорних значень механічних характеристик (рис. 8) і середньо-інтегральних (рис. 9). Як бачимо нехтування температурною залежністю всіх механічних характеристик вносить істотні похибки в напружений стан, максимум яких досягає подекуди 20%.

Дослідження напружень при різних комбінаціях нехтування температурною залежністю механічних характеристик показали, якщо коефіцієнт

Пуассона замінити його опорним значенням, а модуль зсуву середньо-інтегральним, врахувавши при цьому залежність від температури ТКЛР, то абсолютна похибка напружень, обчислених за таких умов, та напружень, обчислених за всіх залежних від температури механічних характеристик, складе не більше ніж $\pm 0{,}02$, що можна побачити з рис. 10.

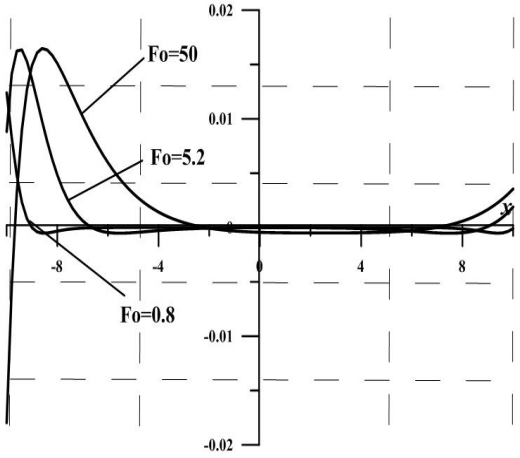

Рис. 10

Висновки. На основі сформульованої математичної моделі методом ЛП знайдено розв'язок задачі термопружності для тонкої термочутливої смуги за умов конвективного теплообміну з довкіллям через обмежуючі поверхні. Проведено верифікацію знайденого розв'язку задачі теплопровідності з суто числовим її розв'язком. Встановлено можливість певної оптимізації обчислень в методі ЛП, а саме: розв'язання системи (25) лише в одній точці по координаті. У решті ж точок можна знаходити лише ЛП κ_z з першого її рівняння, а значення параметрів κ_1 та κ_2 використовувати з попереднього кроку.

Порівнюючи термопружний стан у смузі з залежним від температури КТ та сталим, виявлено істотну розбіжність напружень, що свідчить про суттєвий вплив термочутливості КТ матеріалу при експлуатації в середовищах високих температур як на температурний розподіл, так і на напружений стан.

Досліджуючи вплив температурної залежності механічних характеристик на напружений стан бачимо, що істотний вплив на нього має температурна залежність ТКЛР. Залежністю ж решти механічних характеристик від температури можна знехтувати, використавши при обчисленнях опорне значення коефіцієнта Пуассона та середньо-інтегральне значення модуля зсуву, і таким чином істотно спростивши їх знаходження.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. ***Коляно Ю. М.*** Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно. – К. : Наук. думка, 1992. – 280 с.
2. ***Кушнір Р. М.*** Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Р. М. Кушнір, В. С. Попович //: Термопружність термочутливих тіл. Т. 3; під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра. – Львів: Сполом, 2009. – 412 с.
3. ***Ломакин В. А.*** Теория упругости неоднородных тел / В. А. Ломакин. – М. : Из-во МГУ, 1976. – 368 с.
4. ***Лыков А. В.*** Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М. : Высшая школа, 1967. – 600 с.
5. Марочник сталей и сплавов / под ред. В. Г. Сорокина. – М. : Машиностроение, 1989. – 640 с.
6. ***Подстригач Я. С.*** Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках/ Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно. – К. : Наук. думка, 1972. – 308 с.
7. ***Попович В. С.*** Моделирование тепловых полей в тонких термочуствтельных пластинах / В. С. Попович // Моделирование и оптимизация сложных механических систем : сб. науч. трудов. – К. : Изд-во ин-та кибернетики, 1991. – С. 70–75.
8. ***Попович В. С.*** О решении стационарных задач теплопроводности контактирующих термочувствительных тел / В. С. Попович // Мат. методы и физ.-мех. поля, 1989. – Вып. 29. – С. 51–55.
9. ***Попович В. С.*** Термопружний стан термочутливої порожнистої кулі за умов конвективно-променевого теплообміну з довкіллям / В. С. Попович, Г. Ю. Гарматій, О. М. Вовк // Фіз.- хім. механіка матеріалів, 2006. – 42, № 6. – С. 39–48.
10. ***Carslaw H. S.*** Conduction of heat in solids Clarendon / H. S. Carslaw, J. C. Jaeger // Oxford, 1959. – 430 p.
11. ***Noda N.*** Thermal Stresses in Materials with Temperature-Dependent Properties / N. Noda // Thermal Stresses I. – North-Holland, Amsterdam. – 1986. – P. 391–483.
12. ***Popovych V. S.*** The thermoelastic state of a thermosensitive sphere and space with a spherical cavity subject to complex heat exchange / V. S. Popovych, R. M. Kushnir, O. M. Vovk, // J. Engng Math. – 2008. – Is. 2–4. – P. 375–369.
13. ***Prudnikov A. V.*** Direct Laplace transforms / A. V. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev // Integrals and Series. – N.-Y. – 1992. – Vol. 4.– 331 p.
14. ***Prudnikov A. V.*** Inverse Laplace transforms. / A. V. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev // Integrals and Series.– N.-Y. – 1992. – Vol. 5. – 595 p.

В. С. Попович, д-р техн. наук, В. В. Янишевський

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКОЙ ПОЛОСЫ ПРИ СЛОЖНОМ ТЕПЛООБМЕНЕ

Сформулирована математическая модель для определения термоупругого состояния тонкой термочувствительной пластины при сложном теплообмене со средой. Адаптирован метод "линеаризующих параметров" для нахождения температурного распределения в данной пластине. Получено численное решение задачи теплопроводности и проведен его анализ относительно аналитико-численного решения, полученного методом "линеаризующих параметров". Определены компоненты напряженно-деформированного состояния, вызванного найденным распределением температуры. На основе проведенных численных исследований проанализировано влияние термочувствительности материала на температурное поле и напряжение.

Ключевые слова*: термочувствительное тело, тонкая пластинка, температурное поле, термонапряженное состояние.*

V. S. Popovych, Dr. Sci. (Tech.), V. V. Yanishevskyi

MATHEMATICAL MODELING AND DETERMINATION OF THERMOSTRESSED STATE OF A THIN STRIP PLATE SUBJECTED TO COMPLEX HEAT EXCHANGE

The mathematical model of determining thermoelasticity state in a thin thermosensitive strip plate subjected to complex heat exchange is formulated. The "linearized parameters" method was adapted in order to obtain temperature distribution of the strip plate. Numerical solution of heat conduction problem was found and analysis was carried out between numerical solution and one found with the "linearized parameters" approach. The stress-strain state caused by the found temperature distribution was determined. On the basis of carried out numerical studies an influence of thermosensitivity of a material of the strip plate on temperature field and stresses was analyzed.

Keywords*: thermosensitive body, thin plate, temperature field, thermostressed state.*

In the paper, by means of non-linear mathematical models a solution of thermoelastic boundary problem of a thin thermosensitive strip plate that is free from external loads is obtained. The strip plate convectively heated with an environment of constant temperature. Thermal and mechanical characteristics of the material depend on temperature. In order to obtain the solution of non-linear heat conduction boundary problem we linearize it. Applying Kirchoff transform linearizes its governor equation, however because of third order boundary conditions the nonlinear expressions of temperature in terms of Kirchoff variable $T(\theta)$ appear, as the result, in boundary conditions. To linearize these expressions the "linearized parameter" method is applied according to which $T(\theta)$ are replaced by linear ones:

$$T(\theta) = (1+\kappa)\theta + C\ ,$$

where κ – unknown linearizing parameter and C – constant.

The solution of the linear boundary problem in terms of Kirchoff variable θ is obtained by means of Laplace transform. An analytic-numerical solution is then obtained by applying inverse Kirchoff transform. In order to calculate values of linearized parameters for specific time and coordinate value we solve a system of nonlinear algebraic equations based on equality of respective boundary conditions before and after introduction of linearized parameters. For compare reasons of "linearized parameter" method a numerical solution of heat transfer boundary problem is obtained. The compare of results indicates matching within a percent. For the thermoelasticity problem formulation, an expression of stressed state was found analytically. An investigation of influence of thermosensitivity of a material of stripe plate on its thermal-stressed state was carried out.

REFERENCES

1. ***Koliano Yu. M.*** Heat conduction and thermoelasticity methods of heterogeneous body / Koliano Yu. M. – K. : Nauk. dumka. – 1992. – 280 p. (in Russian)

2. ***Kushnir R. M.*** Modelling and optimization in thermomechanics of conductive heterogeneous bodies / R. M. Kushnir V. S. Popovych // Thermoelasticity of Thermosensitive Solids. Vol. 3; ed. by Ya. J. Burak, R. M. Kushnir. – Lviv: Spolom, 2009. – 412 p. (in Ukrainian)

3. ***Lomakin V. A.*** Thermoelasticity theory of heterogeneous bodies / V. A. Lomakin – M. : Izd-vo MGU. – 1976. – 368 p. (in Russian)

4. ***Lykov A. V.*** Heat conduction theory / A. V. Lykov– M. : Vyshaja shkola. – 1967. – 600 p. (in Russian)

5. Steel and alloy handbook. / ed. by V. G. Sorokin. – M. : Mashynostroenie, – 1989. – 640 p. (in Russian)

6. ***Podstrigach Ya. S.*** Nonsteady Temperature Fields and Stresses in Thin Plates / Ya. S. Podstrigach, Yu. M. Kolyano. – K. : Nauk. dumka, 1972. – 308 p. (in Russian)

7. ***Popovych V. S.*** A Temperature Fields Modeling in Thermo-Sensitive Plates / V. S. Popovych // Modeling and Optimization of Complicated Mechanical Systems. Digest of Proceedings of the Institute of Cybernetics. – K. – 1991. – P. 70–75 (in Russian).

8. ***Popovych V. S.*** On the Solution of Stationary Problem for the Thermal Conductivity of Heat-Sensitive Bodies in Contact / V. S. Popovych // J. Sov. Math. – 1993. – Vol. 65, Is. 4. – P. 1762–1766 (in Russian).

9. ***Popovych V. S.*** Thermoelastic State of a Thermosensitive Hollow Sphere Under Convective-Radiant Heat Exchange with the Environment / V. S. Popovych, H. Yu. Garmatiy, O. M. Vovk // Materials Sci. – 2006. – Vol. 42, Is. 6. – P. 756–770 (in Ukrainian).

10. ***Carslaw H. S.*** Conduction of heat in solids Clarendon / H. S. Carslaw, J. C. Jaeger // Oxford, 1959. – 430 p.

11. ***Noda N.*** Thermal Stresses in Materials with Temperature-Dependent Properties / N. Noda // Thermal Stresses I. – North-Holland, Amsterdam,1986. – P. 391–483.

12. ***Popovych V. S.*** The thermoelastic state of a thermosensitive sphere and space with a spherical cavity subjected to complex heat exchange / V. S. Popovych, R. M. Kushnir, O. M. Vovk, // J. Engng Math. – 2008. – Is 2–4. – P. 375–369.

13. ***Prudnikov A. V.*** Direct Laplace transforms. Integrals and Series, Vol. 4 / A. V. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev. – N.-Y. – 1992. – 331 p.

14. ***Prudnikov A. V.*** Inverse Laplace transforms. Integrals and Series, Vol. 5 / A. V. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev. – N.-Y. – 1992. – 595 p.

Інститут прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
Львів, Україна

Надійшла до редколегії 18.12.2013