

УДК 539.3

К. І. Шумельчик, В. І. Кузьменко, д-р фіз.-мат. наук

ЗВ'ЯЗАНА ЗАДАЧА ВЗАЄМОДІЇ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОГО ТІЛА ТА РІДИНИ ВИСОКОГО ТИСКУ

Розглядається задача про дію штампу на пружно-пластичне тіло, що містить щілину, заповнену стисливою рідиною. Взаємодія між деформівним тілом та рідиною формулюється у вигляді варіаційної задачі. Запропоновано алгоритм числового розв'язання, що ґрунтується на методі скінченних елементів. Досліджено характер впливу штампу на тіло в залежності від його розташування та глибини залягання щілини.

Ключові слова: пружно-пластичне тіло, рідина високого тиску, варіаційна задача, метод скінченних елементів.

Вступ. Дослідження пружно-пластичного деформування твердих тіл з концентраторами напружень залишається важливою задачею механіки. Значна кількість робіт присвячена дослідженню напружено-деформівного стану та розвитку пластичних деформацій в околі тріщиноподібних дефектів та достатньо тонких включень [6]. Значно слабше вивченими залишалися пружно-пластичні поля в околі включень та вирізів, далеких за формою від математичних розрізів, чи безмежно тонких включень, наприклад, включень прямокутної форми [1] та прямокутних щілин [2, 3].

Оскільки рідина знаходиться під дією значного тиску, то припущення про нестисливість рідини є неприйнятним. Тиск, який чинить рідина або газ, що знаходиться у порожнинах твердого тіла, залежать від деформування тіла. У свою чергу, деформація спричиняється тиском всередині порожнини, тому розглядається зв'язана задача взаємодії пружно-пластичного тіла та стислової рідини, причому зв'язок між тиском та густиною рідини вважається нелінійним.

Досить часто для задач, у яких розглядається контактна взаємодія деформівного тіла та рідини, обирається лінійний зв'язок між тиском та густиною речовини, що дозволяє звести задачу до розв'язання інтегральних рівнянь. У даній роботі зазначене припущення не використовується, а розв'язання ґрунтується на числових методах.

Робота має на меті побудову математичної моделі взаємодії пружно-пластичного тіла із рідиною високого тиску, що знаходиться в щілинах всередині тіла, розробку методики числового розв'язання задачі та аналіз характерних особливостей сумісного деформування рідини та пружного тіла. Запропоновано ітераційний процес розщеплення зв'язаної задачі та алгоритм числового розв'язання, що ґрунтується

на варіаційному підході та методі скінченних елементів. На основі створеного алгоритму розроблене програмне забезпечення, що дозволяє вивчати напружено-деформований стан пружно-пластичного тіла.

Постановка задачі. Розглядається процес деформування пружно-пластичного тіла. Тіло знаходиться під дією твердого штампа. Всередині тіла міститься щілина, заповнена ідеальною стисливою рідиною. Ширина щілини $\Delta(x)$ є змінна і вважається набагато меншою за розміри щілини.

Берега щілини можуть вступати у контакт на деяких ділянках. Число площінок контакту та їх розміри заздалегідь невідомі. На кожній площинці контакту припускається можливість вільного проковзування.

У недеформованому стані тіло займає область Ω , обмежену поверхнею Γ , а рідина – область Ω_0 , обмежену поверхнею Γ_0 (рис. 1).

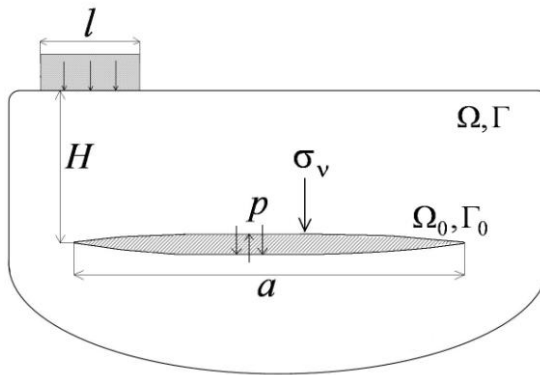


Рис. 1 – Взаємодія пружно-пластичного тіла та рідини

Введемо декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ і позначимо через $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ радіус-вектор довільної точки області Ω . Під $u_i(\bar{x}), \varepsilon_{ij}(\bar{x}), \sigma_{ij}(\bar{x})$ будемо розуміти компоненти вектора переміщень \bar{u} , тензора малих деформацій $\hat{\varepsilon}$ та тензора напружень $\hat{\sigma}$ у точці $\bar{x} \in \Omega$.

Компоненти тензора напружень задовольняють рівняння рівноваги

$$\sigma_{ij,j} = 0, \forall x \in \Omega, \quad (1)$$

а компоненти тензора деформацій та вектора переміщень пов'язані співвідношеннями Коші:

$$\varepsilon_{ij}(\bar{x}) = \frac{1}{2} [u_{i,j}(\bar{x}) + u_{j,i}(\bar{x})]. \quad (2)$$

Середній гідростатичний тиск та середня деформація визначаються наступними співвідношеннями:

$$\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij}, \quad (3)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \varepsilon_{ij} \delta_{ij}. \quad (4)$$

Введемо девіатор напружень s_{ij} та девіатор деформацій e_{ij} :

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}, \\ e_{ij} &= \varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (5)$$

Через $T = \left(\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{1/2}$ позначимо інтенсивність дотичних напружень, а через $\Gamma = \left(2e_{ij} e_{ij} \right)^{1/2}$ – інтенсивність деформацій зсуву.

Для характеристики властивостей матеріалу тіла використовуються співвідношення теорії малих пружно-пластичних деформацій у вигляді:

$$s_{ij} = g(\Gamma) e_{ij}, \quad \sigma = 3k\varepsilon.$$

Позначимо через G та τ_s модуль пружності на зсув та модуль пружності матеріалу. Функцію $g(\Gamma)$ обираємо у вигляді

$$g(\Gamma) = \begin{cases} G, & \Gamma \leq \Gamma_s \\ G - G \cdot \alpha \cdot \frac{(\Gamma/\Gamma_s - 1)^\beta}{\Gamma/\Gamma_s}, & \Gamma > \Gamma_s \end{cases},$$

де $\Gamma_s = \frac{\tau_s}{G}$. Безрозмірні параметри α, β задовольняють умови: $\beta \geq 1$,

$$0 \leq \alpha \leq 1.$$

Через $W(\varepsilon_{ij})$ позначимо густину енергії деформації

$$W(\varepsilon_{ij}) = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}) d\varepsilon_{ij}. \quad (6)$$

Тоді співвідношення теорії малих пружно-пластичних деформацій за активного навантаження можна подати у вигляді

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}.$$

Рідина вважається стисливою. Механічні властивості такої рідини описуються визначальними співвідношеннями, що пов'язують середній гідростатичний тиск та середню деформацію і мають вигляд

$$\sigma_{ij} = \varphi_0(\varepsilon)\delta_{ij}. \quad (7)$$

Функція $W(\varepsilon_{ij})$ в області Ω_0 має вигляд

$$W(\varepsilon_{ij}) = \int_0^{\varepsilon\delta_{ij}} \sigma(\varepsilon)\delta_{ij}d(\varepsilon\delta_{ij}).$$

Застосуємо теорему про середнє значення і подамо $W(\varepsilon_{ij})$ у такому вигляді

$$W(\varepsilon_{ij}) = \sigma_*\delta_{ij} \int_0^{\varepsilon\delta_{ij}} d(\varepsilon\delta_{ij}) = \sigma_*\delta_{ij}\varepsilon\delta_{ij} = 3\sigma_*\varepsilon,$$

де σ_* – середнє значення σ в сенсі теореми про середнє.

Тоді

$$\int_{\Omega_0} W(\varepsilon_{ij}) = \int_{\Omega_0} 3\sigma_*\varepsilon d\Omega = 3\sigma_*\varepsilon V_0,$$

де V_0 – об'єм області Ω_0 .

Зауважимо, що $3\varepsilon = \theta$ є відносна зміна об'єму рідини. З іншого боку, $\theta = \frac{\Delta V}{V_0}$. Обчислимо зміну об'єму рідини ΔV внаслідок деформування

$$\Delta V = \int_{\Gamma_0} u_\nu d\Gamma.$$

Тоді

$$\int_{\Omega} W_{ij}(\varepsilon_{ij})d\Omega = \sigma_*\theta V_0 = \sigma_* \frac{\Delta V}{V_0} V_0 = \sigma_* \int_{\Gamma_0} u_\nu d\Gamma. \quad (8)$$

Сформулюємо крайові умови. Подамо поверхню Γ області Ω у такому вигляді

$$\Gamma = \Gamma^u \cup \Gamma^\sigma \cup \Gamma^c.$$

На частині Γ^u задані переміщення

$$\bar{u}(x) = \bar{U}(x), \forall x \in \Gamma^u, \quad (9)$$

а на частині Γ^σ – напруження

$$\bar{\sigma}_{ij}(x)v_j(x) = S_i(x), \forall x \in \Gamma^\sigma. \quad (10)$$

Розглядається квазістатичний процес деформування, тому в'язкість рідини враховувати не будемо, тобто

$$\bar{\sigma}_\tau(x) = \bar{0}, \forall x \in \Gamma_0.$$

На частині Γ^c тіло взаємодіє із рідиною. Вважаємо, що при переході через спільну межу деформівних тіл та рідини залишаються неперервними нормальні компоненти векторів переміщень та напружень.

Позначимо через V зовнішню по відношенню до $\Omega - \Omega_0$ нормаль до поверхні Γ_0 , а через $u_V^B(x)$ та $u_V^H(x)$ $\forall(x) \in \Gamma_0$ – переміщення відповідно верхнього і нижнього берегів щілини у деякий момент часу. Для ділянок щілини, берега яких можуть вступати в контакт, повинна виконуватись умова

$$u_V^B(x) \geq u_V^H(x) - \Delta(x). \quad (11)$$

На ділянках, де береги щілини не дотикаються, виконується умова

$$\sigma_V(x) = -p, \quad (12)$$

а на ділянках дотику берегів щілини – умова

$$\sigma_V(x) < -p. \quad (13)$$

При деформації тіла змінюється об'єм порожнини, що спричиняє зміну тиску рідини. Через p позначимо тиск рідини у щілині, через θ – об'ємну деформацію рідини

$$\theta = \frac{\Delta V}{V}, \quad (14)$$

де ΔV – абсолютна зміна об'єму порожнини; V – її початковий об'єм.

У відповідності з експериментальними даними вважаємо, що між тиском у рідині та об'ємною деформацією існує однозначний зв'язок [7]

$$p = \begin{cases} f(\theta), & \theta < 0 \\ 0, & \theta \geq 0 \end{cases}. \quad (15)$$

Для досить широкого кола рідин експериментальні залежності можна наблизити за допомогою аналітичного виразу

$$f(\theta) = b \cdot \left(e^{\frac{\theta}{a}} - 1 \right). \quad (16)$$

Сталі a та b характеризують певну рідину.

Об'ємна деформація рідини обчислюється за відомими переміщеннями берегів щілини

$$\theta = \frac{1}{V_0} \int_{\Gamma_0} \Delta u_V(x) d\Gamma, \quad (17)$$

де $\Delta u_V(x) = u_V^H(x) - u_V^B(x)$.

Сформулюємо задачу визначення у області Ω векторів переміщень $\bar{u}(\bar{x})$, тензорів деформацій $\hat{\varepsilon}(\bar{x})$ та напружень $\hat{\sigma}(\bar{x})$, які задовольняють рівняння рівноваги (1), співвідношення Коші (2), визначальні співвідношення теорії малих пружно-пластичних деформацій (5), визначають співвідношення (7), крайові умови (9)–(13) та умови взаємодії деформівних тіл з рідиною (14)–(17).

Варіаційне формулювання задачі. Схема побудови варіаційного формулювання запозичена із [4]. Введемо простір С.Л. Соболева $W_2^{(1)}(\Omega_0) \times W_2^{(1)}(\Omega)$ і виділимо у цьому просторі множину V допустимих переміщень. Включимо до множини V всі вектор-функції $\bar{v} \in W_2^{(1)}(\Omega)$, які задовольняють крайові умови у переміщеннях, а також умови неперервності нормальних переміщень на Γ^c . Позначимо через $\bar{u} \in V$ дійсні переміщення точок області Ω , через $\bar{v} \in V$ – довільний елемент множини V .

Під $\varepsilon_{ij}(\bar{u})$ розуміємо компоненти дійсного тензора деформацій, а під $\xi_{ij}(\bar{v})$ – компоненти тензора можливих деформацій

$$\xi_{ij}(\bar{v}) = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}).$$

Нехай σ_{ij} – компоненти дійсного тензора напружень, тоді

$$-\sigma_{ij,j}(\bar{x}) \equiv 0, \forall \bar{x} \in \Omega. \quad (18)$$

Помножимо обидві частини тотожності на $v_i - u_i$ і проінтегруємо по кожній із областей Ω та Ω_0 окремо. Подальші перетворення розглянемо на прикладі області Ω . Отже, помножимо обидві частини на $v_i - u_i$ і інтегруємо по області Ω

$$-\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} (v_i - u_i) d\Omega = 0. \quad (19)$$

Застосуємо формулу диференціювання добутку до виразу $\sigma_{ij} (v_i - u_i)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} [\sigma_{ij} (v_i - u_i)] &= \sigma_{ij,j} (v_i - u_i) + \sigma_{ij} (v_{i,j} - u_{i,j}) = \\ &= \sigma_{ij,j} (v_i - u_i) + \sigma_{ij} \left[\frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) - \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] = \\ &= \sigma_{ij,j} (v_i - u_i) + \sigma_{ij} (\xi_{ij} - \varepsilon_{ij}). \end{aligned}$$

Тоді рівність (19) набуває вигляду

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} (\xi_{ij} - \varepsilon_{ij}) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} [\sigma_{ij} (v_i - u_i)] d\Omega = 0.$$

Застосуємо до другого інтеграла формулу Остроградського-Гауса

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} (\xi_{ij} - \varepsilon_{ij}) d\Omega - \int_{\Gamma} \sigma_{ij} \cdot v_j (v_i - u_i) d\Gamma = 0, \forall v \in V.$$

Інтеграл по Γ подамо у вигляді суми інтегралів по $\Gamma^c, \Gamma^u, \Gamma^\sigma$.

Інтеграл по Γ^u дорівнює нулю, оскільки $\bar{u} = \bar{v}$ на Γ^u . Інтеграл по Γ^σ з використанням крайових умов (7) зводиться до інтегралу

$$\int_{\Gamma^\sigma} S_i (v_i - u_i) d\Gamma.$$

Інтеграл по Γ^c подамо у вигляді

$$\int_{\Gamma} [\sigma_\nu (v_\nu - u_\nu) + \bar{\sigma}_\tau (\bar{v}_\tau - \bar{u}_\tau)] d\Gamma.$$

Аналогічні перетворення можна виконати і у разі області Ω_0 і отримати аналогічну інтегральну рівність. Додаємо дві рівності типу (18) для областей Ω та Ω_0 . Звернемо увагу на те, що інтеграли по Γ^c обчислюються двічі і мають протилежні знаки, тобто суми інтегралів по Γ^c дорівнюють нулю. У результаті отримуємо так зване варіаційне рівняння

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij})(\xi_{ij} - \varepsilon_{ij})d\Omega - \int_{\Gamma^\sigma} S_i(v_i - u_i)d\Gamma = 0, \forall \bar{v} \in V.$$

Перейдемо від варіаційного рівняння до відповідної екстремальної варіаційної задачі. Виразимо компоненти тензора напружень через густину енергії деформації

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W(\hat{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_{ij}}.$$

Тоді варіаційне рівняння набуває вигляду

$$\int_{\Omega} \frac{\partial W(\hat{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_{ij}}(\xi_{ij} - \varepsilon_{ij})d\Omega - \int_{\Gamma^\sigma} S_i(v_i - u_i)d\Gamma = 0, \forall \bar{v} \in V. \quad (20)$$

Для реальних матеріалів та стисливих рідин густина енергії деформації $W(\hat{\varepsilon})$ є опукла функція. Skorистаємось відомою нерівністю

$$\frac{\partial W(\hat{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_{ij}}(\xi_{ij} - \varepsilon_{ij}) \leq W(\xi_{ij}) - W(\varepsilon_{ij}).$$

і перетворимо варіаційне рівняння (20) до такої нерівності

$$\int_{\Omega} W(\hat{\varepsilon})d\Omega - \int_{\Gamma^\sigma} \bar{S} \cdot \bar{u} d\Gamma \leq \int_{\Omega} W(\hat{\xi})d\Omega - \int_{\Gamma^\sigma} \bar{S} \cdot \bar{v} d\Gamma, \forall \bar{v} \in V. \quad (21)$$

Введемо функціонал

$$I(v) = \int_{\Omega} W(\hat{\xi})d\Omega - \int_{\Gamma^\sigma} \bar{S} \cdot \bar{v} d\Gamma.$$

Нерівність (21) означає, що функціонал $I(\bar{v})$ досягає найменшого значення на множині V саме на розв'язку сформульованої задачі. Аналогічно [5], можна довести еквівалентність задач розв'язання варіаційного рівняння (19) та екстремальної задачі

$$\inf_{v \in V} I(v),$$

а також показати, що за додаткового припущення про існування других частинних похідних розв'язок варіаційних задач є розв'язком задачі у вихідній постановці.

Алгоритм числового розв'язання. Числове розв'язання ґрунтується на скінченноелементній дискретизації. Розбиття області Ω_0 на скінченні елементи видається неефективним, оскільки всередині рідини напружено-деформований стан є однорідним. Справді, рівняння рівноваги всередині Ω_0 має вигляд

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma \delta_{ij}) = \frac{\partial \sigma}{\partial x_j} \delta_{ij} = 0; \quad j = 1, 2, 3.$$

Звідси випливає, що $\sigma = const$, а отже, $\varepsilon = const$ в області Ω_0 . Тому більш ефективним видається підхід, що використовує зазначену однорідність напружено-деформованого стану.

Повернемось до співвідношення (8). Оскільки значення σ_* фактично невідоме, то пропонується ітераційний процес послідовного розв'язання задачі для фіксованих значень середнього гідростатичного тиску σ_* , більш детально який викладено у [8].

Лінеаризація задачі пружно-пластичного деформування ґрунтується на методі січного модуля і зводиться до розв'язання задач теорії пружності для неоднорідного тіла [5].

Побудуємо ітераційний процес змінного січного модуля, на кожному кроці якого розв'язується задача теорії пружності. У нульовому наближенні функція $g(\Gamma) = G_0$, де G_0 – модуль пружності (рис. 2).

Розв'язуючи задачу теорії пружності на першому кроці, можна визначити значення інтенсивності деформацій зсуву у всіх точках тіла

$$\Gamma_1(x) = \left(2e_{ij}^{(1)}(x)e_{ij}^{(1)}(x) \right)^{1/2}.$$

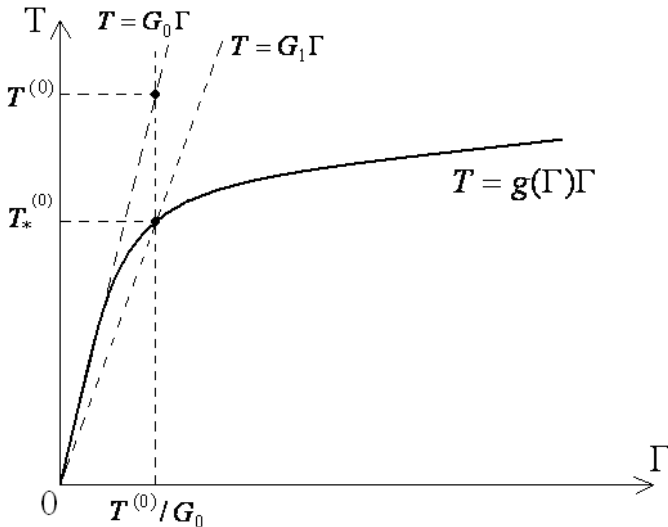


Рис. 2 – Схема методу змінного січного модуля

Тоді за перше наближення функції $g(\Gamma_1)$ візьмемо функцію

$$G_2(x, y) = g(\Gamma_1),$$

яка вже є заздалегідь відомою функцією координат має сенс січного модуля діаграми $T-\Gamma$ (рис. 2).

Аналогічно на n -у кроці ітераційного процесу розв'язується задача теорії пружності та визначення у всіх точках тіла значень:

$$\Gamma_n(x) = \left(2e_{ij}^{(n)}(x)e_{ij}^{(n)}(x) \right)^{1/2};$$

$$G_{n+1}(x, y) = g(\Gamma_n).$$

Ітераційний процес методу січного модуля припиняється, якщо на двох послідовних ітераціях січні модулі будуть відрізнятись у межах заданого параметру похибки.

Дискретизація варіаційної задачі здійснюється за допомогою методу скінченних елементів, а розв'язання задач мінімізації – за допомогою узагальненого методу верхньої релаксації.

Приклад числового розв'язання. Розглядається плоска деформація пружно-пластичного тіла. Тіло прямокутної форми (рис. 3) вважаємо закріпленим знизу та з боків, верхня частина знаходиться під дією важкого твердого штамп. Початкові переміщення нижньої границі штамп вважаємо відомими. Всередині тіла міститься щілина, вщерть заповнена ідеальною стисливою рідиною.

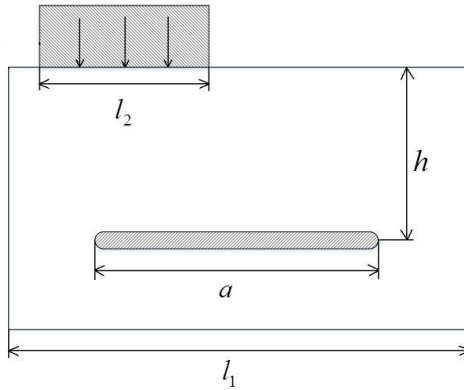


Рис. 3 – Пружно-пластичне тіло зі щілиною під дією твердого штампу

Задача зведена для зручності до безрозмірного вигляду. Нехай l_1 – довжина області, l_2 – довжина штамп, a – довжина щілини, h – глибина залягання щілини, ρ – густина матеріалу тіла, g – прискорення вільного падіння.

Співвідношення між безрозмірними та розмірними величинами мають вигляд:

$$x_i = x'_i \cdot l_1, \quad u_i = u'_i \cdot \frac{\rho \cdot g \cdot l_1^2}{\mu},$$

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} \cdot \rho \cdot g \cdot l_1, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} \cdot \frac{\rho \cdot g \cdot l_1}{\mu}, \quad \Pi = \Pi' \cdot \frac{\rho^2 \cdot g^2 \cdot l_1^5}{\mu}.$$

Для розбиття області використані прямокутні елементи з білінійною функцією форми. Розв'язання задачі для пружно-пластичного тіла здійснюється за допомогою методу січного модуля, а задач умовної оптимізації – за допомогою узагальненого методу послідовної верхньої релаксації. Числовий алгоритм визначення напруженого стану реалізований у вигляді програмного комплексу.

Розглянемо приклад числового розв'язання контактної задачі для пружно-пластичного тіла, яке містить щілину з рідиною, та знаходиться під дією гравітаційного поля. Використовуємо схему лінійного зміцнення з дотичним модулем G_t при $G_t/G_0 = 0,01$. Коефіцієнт Пуассона ν дорівнює 0,3. Розглянемо щілину сталої ширини $\Delta = \rho \cdot g \cdot l_1^2 / \mu$. Розрахунки виконані для таких параметрів рідини, що відповідає типовим нафтопродуктам.

Для отримання розв'язку із прийнятною точністю було використано розбиття на 1200 скінченних елементів. Для оцінки похибки отриманих результатів використано теорему Клапейрона. Встановлено, що при

збільшенні кількості елементів значення подвоєної потенціальної енергії та роботи прямують до одного значення.

Дослідимо вплив дії штампку на напружено-деформований стан тіла. На рис. 4, 5 показано деформовану скінченно-елементу сітку для пружно-пластичного тіла для щілини на різній глибині. На рис. 6 показано деформовану скінченно-елементу сітку для штампку більших розмірів. Переміщення збільшені в $0,25 \cdot l_1$ разів.

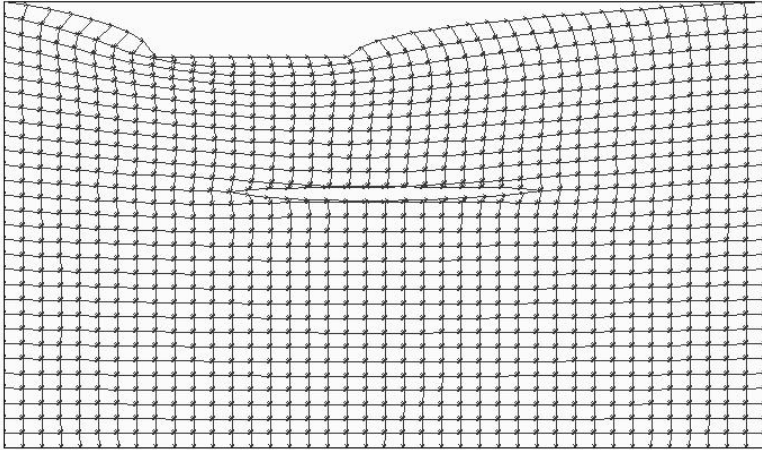


Рис. 4 – Деформована скінченно-елемента сітка, яка містить щілину на глибині h та знаходиться під дією штампку розміру l_2

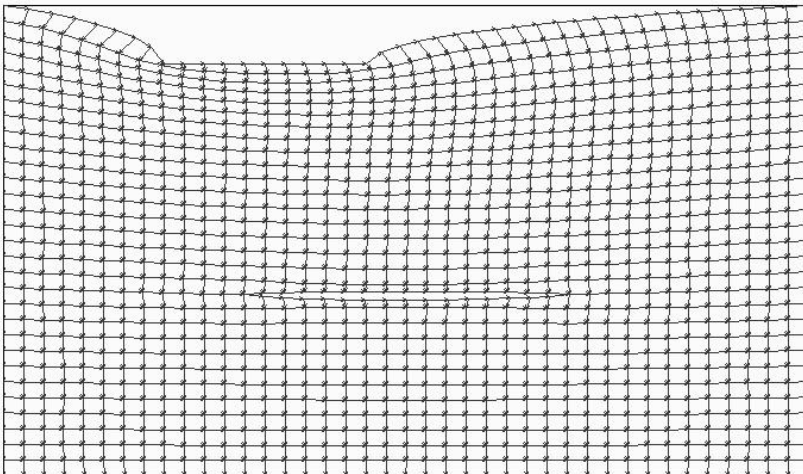


Рис. 5 – Деформована скінченно-елемента сітка, яка містить щілину на глибині $1,5h$ та знаходиться під дією штампку розміру l_2

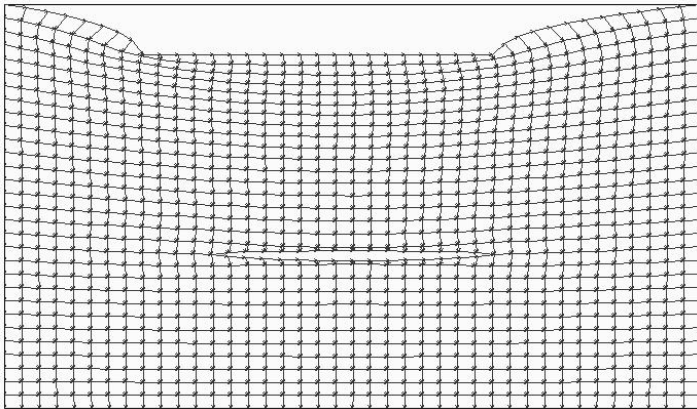


Рис. 6 – Деформована скінченно-елемента сітка, яка містить щілину на глибини $1,5h$ та знаходиться під дією штампку розміру $2l_2$

Дослідимо розподіл напружень під поверхнею штампку в залежності від розмірів штампку. На рис. 7, 8 показано розподіл напружень σ_y під твердим штампком для штампків різних розмірів.

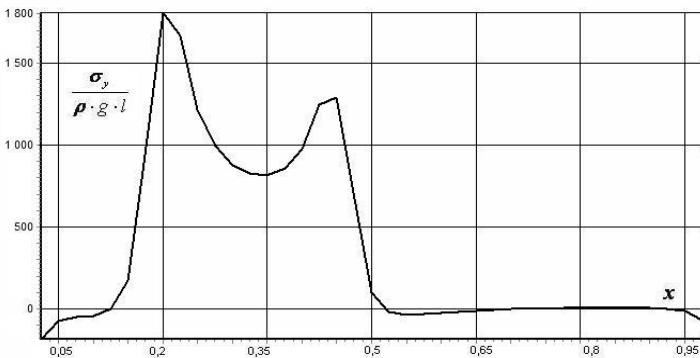


Рис. 7 – Розподіл напружень σ_y під твердим штампком розміру l_2

Розподіл контактних напружень σ_y на лінії щілини більш суттєво змінюється при збільшенні глибини залягання щілини. Розміри штампку також впливають на характер розподілу напружень, але не так сильно, і якщо щілина знаходиться у відносній близькості до поверхні тіла, на яку давить штамп. З іншого боку, збільшення глибини залягання щілини не призводить до якісних змін характеру розподілу напружень під твердим штампком. При збільшенні розмірів штампку значенням напружень σ_y на його кінцях трохи зменшується.

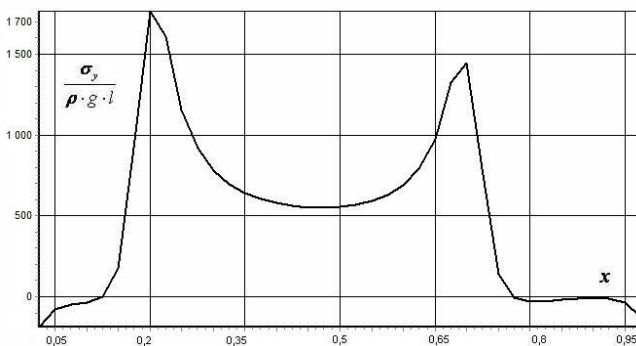


Рис. 8 – Розподіл напружень σ_y під твердим штампом розміру $2l_2$

Висновки. Запропонована постановка задачі про взаємодію пружно-пластичного тіла зі стисливою рідиною під високим тиском. Задача сформульована у вигляді варіаційної задачі та зведена до знаходження мінімуму функціоналу у просторі Соболева. Розроблений алгоритм числового розв'язання задачі, на його основі створений програмний комплекс, що дозволяє обчислювати напружено-деформований стан для деяких класів задач взаємодії пружно-пластичного тіла та стислої рідини. Запропоновані підходи до вивчення взаємодії пружно-пластичного тіла та рідини відкривають можливість математичного моделювання стану гірських порід в околі родовищ рідких та газоподібних корисних копалин.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Валяшек В.** Зсувне пружно-пластичне деформування тіла з прямокутним включенням за умов неповного контакту із середовищем / В. Валяшек // Вісник Тернопільського національного технічного університету, механіка та матеріалознавство. – 2013. – Т. 69. – № 1. – С. 63–70.
2. **Кривень В. А.** Розвиток пластичних зон у тілі з прямокутною щілиною за антиплоскої деформації / В. А. Кривень, В. Б. Валяшек, М. І. Яворська // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – Львів. – 2008. – Т. 44, № 4. – С. 13–20.
3. **Кривень В. А.** Моделювання пластичних зон під час зсувного деформування півшару з тріщиною / В. А. Кривень, А. Д. Іващук // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – Вип. 39, № 6. – С. 31–36.
4. **Кузьменко В. И.** О вариационном подходе в теории контактных задач для нелинейно-упругих слоистых тел / В. И. Кузьменко // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1979. – Т. 43, № 3. – С. 893–901.
5. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
6. **Сулим Г. Т.** Основы математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г. Т. Сулим. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
7. **Шумельчик К. І.** Деформування пружного тіла із щілинами, заповненими стисливою рідиною, у полі гравітаційних сил / К. І. Шумельчик, В. І. Кузьменко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка, 2013. – Вип. 17, т. 2. – С. 168–176.
8. **Shumelchuk K.** Modeling of the behavior of an elastic body with slim cavities filled with compressible liquid or gas / K. I. Shumelchuk // Recent advances in computational mechanics. – London: CRC Press, 2014. – P. 245–250.

К. И. Шумельчик, В. И. Кузьменко, д-р. физ.-мат. наук

СВЯЗАННАЯ ЗАДАЧА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА И ЖИДКОСТИ ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ

Рассматривается задача о действии штампа на упругопластическое тело с трещиной, заполненной сжимаемой жидкостью. Взаимодействие деформируемого тела и жидкости формулируется в виде вариационной задачи. Предложен алгоритм численного решения, который основывается на методе конечных элементов. Исследован характер действия штампа на тело в зависимости от его расположения и глубины залегания трещины.

Ключевые слова: упругопластическое тело, жидкость высокого давления, вариационная задача, метод конечных элементов.

K. I. Shumelchik, V. I. Kuzmenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.)

COUPLED PROBLEM OF INTERACTION THE PLASTIC BODY AND LIQUID OF HIGH PRESSURE

The problem of stamp action on the plastic body which contains cavities filled with compressible liquid is considered. The interaction of deformable body and liquid is formulated as a variational problem. The algorithm of numerical solving, that is proposed in paper, bases on finite element method. The character of stamp action on the body is investigated for different stamp location and depth of cavity.

Keywords: elastic-plastic body, liquid of high pressure, variational problem, finite element method.

The problems of interaction between solids and liquid under high and extremely high pressure are fairly relevant nowadays. Contemporary problems of geology, geophysics and engineering are often associated with interaction of different types of materials. Till now, there are no complex researches of the interaction of plastic bodies and liquid under high and extremely high pressure accounting for mass forces and nonlinear properties of the liquid. In this context it is necessary to solve series of boundary value problems using real dependencies between pressure and relative changes in liquid volume.

The main aims of presented research work are: creating the mathematical models and methods of investigation the interaction of bodies that include cavities filled with a compressible liquid or gas. The coupled problem of interaction of nonlinear elastic-plastic body and liquid of high pressure was considered. The pressure exerted by a liquid or gas that is in the cavities of solids depends on the deformation of the plastic body. In turn the deformation is caused by pressure inside the cavity. The interaction between a plastic body and liquid is presented as a variational problem.

The idea of solving the variational problem bases on interactive process of splitting the coupled problem into a sequence of two sub-problems—separately for the plastic body and the liquid.

The numerical research is based on the described iterative process of splitting. Solving boundary value problems for the deformable body is based on the representation in the form of variational inequalities.

Discretization is performed using the finite element method. Solving the constrained optimization problems is done by using the generalized method of upper relaxation. Rectangular elements with bilinear function were used for splitting initial region.

The iterative splitting process of the coupled problem as well as algorithm of numerical solving were implemented as a software product. The software allows calculating the stress state of plastic body for some classes of problems. Using created software the stress distribution to the plastic body with stamp action was investigated for different stamp locations.

Suggested approaches of studying the interaction of plastic body and liquid open up the possibility of mathematical modelling the rocks around the fields of liquid and gaseous mineral resources. Further research should focus on the analysis of specific events during mining process.

REFERENCES

1. **Valyashok V.** Landslides plastic deformation of the body with a rectangular inclusion in conditions of incomplete contact with the environment / V. Valyashok // Journal of Ternopil National Technical University, Mechanics and Materials. – 2013. – Vol. 69. – Is. 1. – P. 63–70 (in Ukrainian).
2. **Kryven V.** Development of plastic zones in the body with a rectangular cavity for nonplane deformation / V. Kryven, V. Valyashok, M. Yavorska // Physico-chemical mechanics of materials. – Lviv. – 2008. – Vol. 44, is. 4. – P. 13–20 (in Ukrainian).
3. **Kryven V.** Modelling plastic zones during shear deformation of half-sphere with crack / V. Kryven, A. Ivashchuk // Physical and Chemical Mechanics of Materials. – 2003. – Vol. 39. – Is. 6. – P. 31–36 (in Ukrainian).
4. **Kuzmenko V.** The variational approach to the theory of contact problems for nonlinear elastic layered bodies / V. Kuz'menko // USSR Academy of Sciences. Mechanics of Solids. – 1979. – Vol. 43, Is. 3. – P. 893–901 (in Russian).
5. **Kachanov L.** Fundamentals of the theory of plasticity / L. Kachanov. – M. : Nauka, 1969. – 420 p. (in Russian)
6. **Sulym G.** Mathematical theory bases of thermoelastic equilibrium of deformable bodies with thin inclusions / G. Sulym. – Lviv: Research Publishing Center Scientific Society, 2007. – 716 p. (in Ukrainian).
7. **Shumelchik K.** Deformation of an elastic body with cracks filled with a compressible liquid in a gravitational force field / K. Shumelchik, V. Kuz'menko // Vysnik of the Dnipropetrovsk University. Series "Mechanics". Series 2 – D. – 2013. – Vol 17. – P. 168–176 (in Ukrainian).
8. **Shumelchik K.** Modeling of the behavior of an elastic body with slim cavities filled with compressible liquid or gas / K. I. Shumelchik // Recent advances in computational mechanics. – London: CRC Press, 2014. – P. 245–250.

*Дніпропетровський національний
університет ім. Олесь Гончара,
Дніпропетровськ, Україна*

Надійшла до редколегії 13.03.2014