

УДК 531.3

К. В. Аврамов, д-р техн. наук, Б. В. Успенский

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ ВЫНУЖДЕННЫХ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫМИ УПРУГИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Рассматривается диссипативная динамическая система с кусочно-линейной упругой характеристикой. Такая система описывает вынужденные крутильные колебания силовой передачи трехцилиндрового транспортного двигателя. Численно исследованы свойства нелинейных нормальных форм и других траекторий в этой системе.

Ключевые слова: нелинейные нормальные формы, крутильные колебания, силовые передачи, кусочно-линейная упругая характеристика.

Введение. Теория нелинейных нормальных форм в нелинейных динамических системах рассматривается в монографиях [1, 3, 9]. Подробный обзор литературы, посвященный нелинейным нормальным формам, опубликован в статьях [6, 8].

В этой статье предпринимается попытка исследования нелинейных нормальных форм в сложной нелинейной механической системе, которая описывает вынужденные колебания силовой передачи трехцилиндрового транспортного двигателя. Целью этой статьи является исследование нелинейных нормальных форм Каудерера – Розенберга в моделях вынужденных крутильных колебаний силовых передач двигателей внутреннего сгорания, которые описываются диссипативными динамическими системами с кусочно-линейными упругими характеристиками.

Постановка задачи и модель механической системы. Численный анализ нелинейных нормальных форм производится в модели крутильных колебаний силовой передачи трехцилиндрового двигателя внутреннего сгорания с противоположно движущимися поршнями. Кинематическая схема силовой передачи представлена на рис. 1, а. Силовая передача состоит из двух коленчатых валов. Каждый из этих валов имеет три колена. Эти два коленчатых вала связываются между собой главной передачей, которая состоит из пяти шестерен. Упругая муфта устанавливается на шестерню, которая показывается на рис. 1, а двумя черными кругами. Она используется для уменьшения крутящих моментов в главной передаче при запуске двигателя. Эскиз упругой муфты представлен на рис. 1, б. Эта муфта состоит из двух полумуфт. В муфте находится 6 окон. В каждом окне размещается по две пружины. В каждой пружине находятся два пальца, как показано на рис. 1, б. Пока два пальца не упираются друг в друга пружина сжимается. Если пальцы упираются друг в друга, то муфта работает как жесткая шестерня. Пружины монтируются в окна с начальным поджатием. Конструкция и свойства таких муфт обсуждаются в монографии [5].

Периодические во времени моменты действуют на каждое колено вала. Их можно представить в виде укороченного ряда Фурье:

$$\tilde{M}(t) = \sum_{i=1}^{N_G} \left(M_i^{(s)} \sin(i\Omega t) + M_i^{(c)} \cos(i\Omega t) \right),$$

где Ω – угловая скорость вращения коленчатого вала.

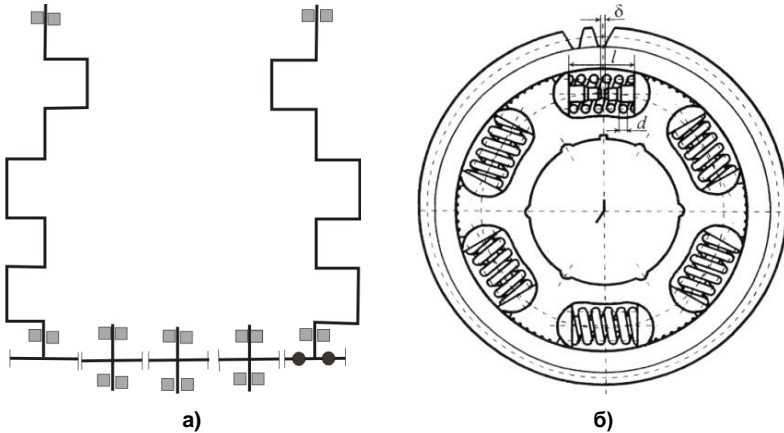


Рис. 1 – Схема силовой передачи двигателя внутреннего сгорания:
а) кинематическая схема; б) эскиз упругой муфты

Так как нами рассматривается вал с тремя коленами, то третья гармоника ряда Фурье является наиболее опасной [2]. Поэтому достаточно исследовать крутильные колебания только под действием одной (третьей) гармоники ряда Фурье. Возмущающие моменты можно представить так:

$$\tilde{M}(t) = M_3^{(s)} \sin(3\Omega t) + M_3^{(c)} \cos(3\Omega t).$$

Простой метод расчета возмущающих моментов $\tilde{M}(t)$ опубликован в [7]. Эти возмущающие моменты возбуждают крутильные колебания силовой передачи. Как следует из экспериментальных исследований [4], крутильные колебания всех элементов силовой передачи достаточно точно представляются одной третьей гармоникой ряда Фурье $\sin(3\Omega t + \vartheta)$.

Теперь рассмотрим модель крутильных колебаний. Крутильные колебания континуальной нелинейной системы моделируются нелинейной моделью с конечным числом степеней свободы. Такая модель состоит из набора жестких дисков, которые связываются между собой упругими валами. Модель исследуемой силовой передачи представлена на рис. 2, а. Каждое колено вала моделируется одним диском. Поэтому каждый коленчатый вал описывается тремя дисками. Диски 1, 2, 3, 9, 10, 11 описывают крутильные колебания двух коленчатых валов.

Эти диски связаны между собой валами, которые характеризуются крутильными жесткостями $c_{12}, c_{23}, c_{34}, c_{10,11}, c_{9,10}, c_{8,9}$.

Теперь рассмотрим модель главной передачи, которая связывает два коленчатых вала. Как видно из рис. 1, а главная передача состоит из пяти шестерен, которые находятся в зацеплении. Каждая шестерня описывается абсолютно жестким диском. Эти диски связываются валами, которые описывают крутильную жесткость зубчатой пары. Жесткость зубчатой передачи состоит из изгибной жесткости зубьев и их контактной жесткости. Движения дисков 4, ..., 8 (рис. 2, а) описывают крутильные колебания шестерен главной передачи. Эти диски связаны между собой валами, массы которых не учитываются. Жесткости этих валов обозначаются через $c_{4,5}, c_{5,6}, c_{6,7}$.

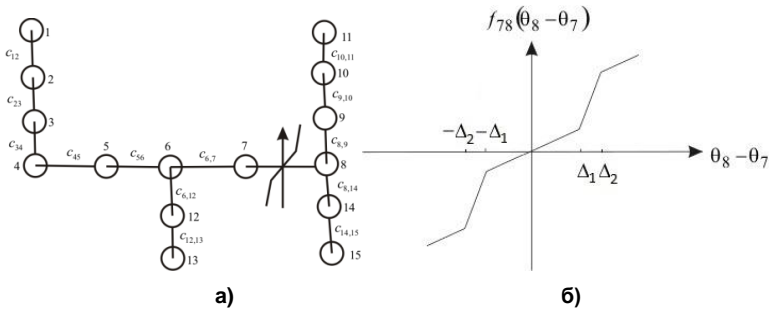


Рис. 2 – Модель крутильных колебаний с конечным числом степеней свободы

Моменты инерции колен валов и шестерен главной передачи определяются расчетом. Жесткости участков коленчатых валов и зубчатого зацепления определяются экспериментально. Эти численные расчеты и эксперименты по определению жесткостей элементов главной передачи подробно описаны в отчете [6].

Диски 12 и 13 (рис. 2, а) описывают турбо наддув. Диск 14 характеризует крутильные колебания маховика, а диск 15 описывает колебания потребителя мощности.

Момент инерции диска с номером i обозначим через I_i , а крутильные колебания этого диска охарактеризуем обобщенной координатой θ_i . Жесткость вала между дисками i и j обозначим через c_{ij} (рис. 2, а).

Муфту опишем зависимостью крутящего момента от угла закручивания. Эта зависимость является кусочно-линейной и она показывается на рис. 2, б. Как следует из экспериментального анализа крутильных колебаний, амплитуды колебаний упругой муфты удовлетворяют следующему соотношению: $-\Delta_2 < \theta_8 - \theta_7 < \Delta_2$. Тогда нелинейный крутящий момент описывается следующей кусочно-линейной функцией:

$$f_{78}(\theta_8 - \theta_7) = \begin{cases} c_{78}(\theta_8 - \theta_7), & -\Delta_1 \leq (\theta_8 - \theta_7) \leq \Delta_1; \\ \tilde{c}_{78}(\theta_8 - \theta_7) + (c_{78} - \tilde{c}_{78})\Delta_1, & \Delta_1 < (\theta_8 - \theta_7); \\ \tilde{c}_{78}(\theta_8 - \theta_7) - (c_{78} - \tilde{c}_{78})\Delta_1, & (\theta_8 - \theta_7) < -\Delta_1. \end{cases}$$

Эта зависимость крутящего момента от угла закручивания упругой муфты представлена на рис. 2, б.

Крутильные колебания системы, представленной на рис. 2, а, описываются следующей нелинейной динамической системой с пятнадцатью степенями свободы:

$$\begin{aligned}
 I_i \ddot{\theta}_i - c_{12}(\theta_2 - \theta_1) - \beta_{12}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) &= A \cos(\omega t); \\
 I_i \ddot{\theta}_i + c_{i-1,i}(\theta_i - \theta_{i-1}) - c_{i,i+1}(\theta_{i+1} - \theta_i) + \beta_{i-1,i}(\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_{i-1}) - \beta_{i,i+1}(\dot{\theta}_{i+1} - \dot{\theta}_i) &= 0, \quad i = 2, \dots, 5; \\
 I_6 \ddot{\theta}_6 + c_{56}(\theta_6 - \theta_5) - c_{67}(\theta_7 - \theta_6) - c_{6,12}(\theta_{12} - \theta_6) + \beta_{56}(\dot{\theta}_6 - \dot{\theta}_5) - \beta_{67}(\dot{\theta}_7 - \dot{\theta}_6) - \beta_{6,12}(\dot{\theta}_{12} - \dot{\theta}_6) &= 0; \\
 I_7 \ddot{\theta}_7 + c_{67}(\theta_7 - \theta_6) - f_{78}(\theta_8 - \theta_7) + \beta_{67}(\dot{\theta}_7 - \dot{\theta}_6) - \beta_{78}(\dot{\theta}_8 - \dot{\theta}_7) &= 0; \\
 I_8 \ddot{\theta}_8 + f_{78}(\theta_8 - \theta_7) - c_{89}(\theta_9 - \theta_8) - c_{6,14}(\theta_{14} - \theta_8) + \beta_{78}(\dot{\theta}_8 - \dot{\theta}_7) - \beta_{89}(\dot{\theta}_9 - \dot{\theta}_8) - \beta_{6,14}(\dot{\theta}_{14} - \dot{\theta}_8) &= 0; \quad (1) \\
 I_i \ddot{\theta}_i + c_{i-1,i}(\theta_i - \theta_{i-1}) - c_{i,i+1}(\theta_{i+1} - \theta_i) + \beta_{i-1,i}(\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_{i-1}) - \beta_{i,i+1}(\dot{\theta}_{i+1} - \dot{\theta}_i) &= 0, \quad i = 9, 10; \\
 I_{11} \ddot{\theta}_{11} + c_{10,11}(\theta_{11} - \theta_{10}) + \beta_{10,11}(\dot{\theta}_{11} - \dot{\theta}_{10}) &= 0; \\
 I_{12} \ddot{\theta}_{12} + c_{6,12}(\theta_{12} - \theta_6) - c_{12,13}(\theta_{13} - \theta_{12}) + \beta_{6,12}(\dot{\theta}_{12} - \dot{\theta}_6) - \beta_{12,13}(\dot{\theta}_{13} - \dot{\theta}_{12}) &= 0; \\
 I_{13} \ddot{\theta}_{13} + c_{12,13}(\theta_{13} - \theta_{12}) + \beta_{12,13}(\dot{\theta}_{13} - \dot{\theta}_{12}) &= 0; \\
 I_{14} \ddot{\theta}_{14} + c_{8,14}(\theta_{14} - \theta_8) - c_{14,15}(\theta_{15} - \theta_{14}) + \beta_{8,14}(\dot{\theta}_{14} - \dot{\theta}_8) - \beta_{14,15}(\dot{\theta}_{15} - \dot{\theta}_{14}) &= 0; \\
 I_{15} \ddot{\theta}_{15} + c_{14,15}(\theta_{15} - \theta_{14}) + \beta_{14,15}(\dot{\theta}_{15} - \dot{\theta}_{14}) &= 0.
 \end{aligned}$$

В системе (1) учтены моменты сил сопротивлений, которые описываются выражениями $\beta_{i-1,i}(\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_{i-1})$. Динамическая система (1) является диссипативной; в ней наблюдаются установившиеся периодические движения. Они являются предметом исследования настоящей статьи.

Система (1) допускает вращение как абсолютно твердого тела. Для того чтобы исключить эту зависимость, воспользуемся следующей заменой переменных:

$$\begin{aligned}
 x_{1,2} &= \theta_2 - \theta_1; \quad x_{2,3} = \theta_3 - \theta_2; \quad x_{3,4} = \theta_4 - \theta_3; \quad x_{4,5} = \theta_5 - \theta_4; \quad x_{5,6} = \theta_6 - \theta_5; \\
 x_{6,7} &= \theta_7 - \theta_6; \quad x_{7,8} = \theta_8 - \theta_7; \quad x_{8,9} = \theta_8 - \theta_9; \quad x_{9,10} = \theta_9 - \theta_{10}; \quad x_{10,11} = \theta_{10} - \theta_{11}; \quad (2) \\
 x_{8,14} &= \theta_8 - \theta_{14}; \quad x_{14,15} = \theta_{14} - \theta_{15}; \quad x_{6,12} = \theta_6 - \theta_{12}; \quad x_{12,13} = \theta_{12} - \theta_{13}.
 \end{aligned}$$

Динамическую систему (1) представим относительно переменных (2).

Значения крутильных жесткостей валов в $H \cdot m$ таковы:

$$\begin{aligned}
 c_{12} = c_{23} &= 2 \cdot 10^6; \quad c_{34} = 3 \cdot 10^6; \quad c_{45} = 2,8 \cdot 10^6; \quad c_{56} = 1,5 \cdot 10^6; \quad c_{67} = 6,5 \cdot 10^5; \\
 c_{78} &= 8,4 \cdot 10^5; \quad \tilde{c}_{78} = 5,04 \cdot 10^5; \quad c_{89} = 2,6 \cdot 10^6; \quad c_{9,10} = c_{10,11} = 2 \cdot 10^6; \\
 c_{6,12} &= 1,9 \cdot 10^4; \quad c_{12,13} = 2,7 \cdot 10^4; \quad c_{8,14} = 3,1 \cdot 10^6; \quad c_{14,15} = 3,3 \cdot 10^4.
 \end{aligned}$$

Численные значения моментов инерции дисков в $кг \cdot м^2$:

$$I_1 = I_2 = I_3 = 7,7 \cdot 10^{-2}; \quad I_4 = 6,5 \cdot 10^{-2}; \quad I_5 = 8,5 \cdot 10^{-2}; \quad I_6 = 3,6 \cdot 10^{-2};$$

$$I_7 = 4,9 \cdot 10^{-2}; I_8 = 3,8 \cdot 10^{-2}; I_9 = I_{10} = I_{11} = 7,7 \cdot 10^{-2}; I_{12} = 1,7;$$

$$I_{13} = 1; I_{14} = 2,6; I_{15} = 3.$$

Значение зазора в главной передаче: $\Delta_1 = 9,5 \cdot 10^{-2}$. Заметим, что значения жесткостей упругой муфты $c_{7,8}$ и $\tilde{c}_{7,8}$ существенно разнятся. Поэтому динамическая система (1) является существенно нелинейной. Амплитуда внешнего воздействия принималась следующей: $A = 60 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Свойства нелинейных нормальных форм крутильных колебаний. Для численного исследования нелинейных нормальных форм в диссипативной динамической системе (1) используется прямое численное интегрирование этой системы. В данной работе переходной процесс не исследуется, анализу подвергаются только установившиеся периодические движения. Исследуются вынужденные колебания в следующем диапазоне частоты возмущающего воздействия $\omega \in [1000; 4500] \text{ рад/с}$.

Прежде всего, изучалось: какие из обобщенных координат преобладают на установившемся периодическом движении системы. Для этого исследовалось распределение амплитуд по обобщенным координатам. Характерное распределение амплитуд представлено на рис. 3, где показывается зависимость номера обобщенной координаты от ее амплитуды. Номер обобщенной координаты соответствует ее номеру в соотношениях (2). Наиболее активными являются обобщенные координаты с номерами 6, 7, 13. Эти номера соответствуют обобщенным координатам $x_{6,7}, x_{7,8}, x_{6,12}$. Отметим, что эти координаты преобладают в периодических движениях во всем исследуемом частотном диапазоне.

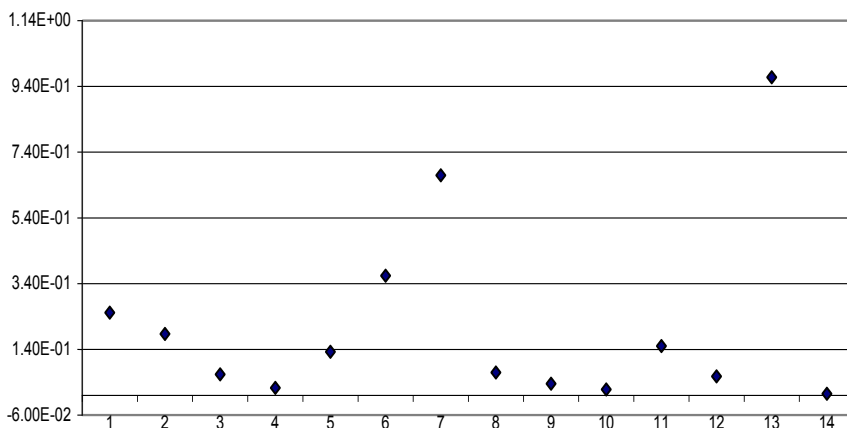


Рис. 3 – Распределение амплитуд колебаний по координатам при частоте вынуждающей силы $\omega = 1500 \text{ рад/с}$

В результате численного анализа можно сделать следующие выводы:

1) движения по нелинейным нормальным формам (ННФ) происходит в резонансных областях. Вдали от резонансов движения могут проис-

ходить как по нормальным формам, так и существенно отличаться от нелинейных нормальных форм;

2) нелинейные нормальные формы вынужденных колебаний систем с диссипацией близки к нелинейным нормальным формам систем без диссипации. Диссипация практически не влияет на вид нелинейных нормальных форм.

В результате численного анализа были обнаружены различные виды периодических движений. Свойства этих движений классифицировались по виду траекторий в конфигурационных плоскостях. В результате численного интегрирования находились траектории, которые представлялись в конфигурационном пространстве. Движения в конфигурационном пространстве проектировались на плоскости, которые являются подпространствами конфигурационного пространства. Все полученные движения разделим на следующие виды:

1. Синфазные нормальные формы – это траектории в конфигурационной плоскости, которые располагаются в первом и третьем квадранте, близкие к прямой линии. Такие траектории являются однозначной функцией обобщенных координат.

2. Антифазные нормальные формы – это траектории близкие к прямым в конфигурационной плоскости, которые располагаются во втором и четвертом квадрантах.

3. Промежуточные траектории – это периодические движения, которые характеризуются эллиптическими траекториями в конфигурационных плоскостях. Такие траектории возникают при переходе синфазной ННФ в антифазную ННФ или наоборот. Эти явления наблюдаются при изменении частоты возмущающего воздействия ω .

4. Периодические траектории – это движения, которые не относятся ни к одному из описанных выше колебаний.

Рассмотрим свойства ННФ и промежуточных траекторий. Периодические моногармонические движения в двух наиболее активных координатах диссипативной системы (1) представим так:

$$x_{7,8} = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1);$$

$$x_{6,7} = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Периодические движения являются ННФ, если разность фаз $\varphi_1 - \varphi_2$ равняется 0 или π . Если разность фаз не удовлетворяет этим значениям, то в системе наблюдаются промежуточные траектории, или общий случай периодических движений.

Итак, в резонансе исследуемой системы разность фаз $\varphi_1 - \varphi_2$ равняется 0 или π . Вдали от резонанса разность фаз имеет промежуточное значение.

Численно исследовались периодические движения в конфигурационных плоскостях наиболее сильно изменяющихся обобщенных координат $(x_{7,8}; x_{6,7})$ и $(x_{7,8}; x_{6,12})$ в следующем частотном диапазоне

$\omega \in [1000; 4500] \text{ рад/с}$. Результаты такого анализа представлены в табл. 1. В этой таблице в первом столбце показаны диапазоны частоты возмущающего воздействия, а во втором и третьем столбцах вид установившихся периодических движений, который следует из анализа соответствующих конфигурационных плоскостей. В качестве примера, синфазная ННФ при $\omega = 2300 \text{ рад/с}$ показана на рис. 4 в конфигурационной плоскости $(x_{7,8}, x_{6,7})$. Антифазная ННФ при частоте возмущающего воздействия $\omega = 3600 \text{ рад/с}$ приводится на рис. 5. Промежуточная траектория при частоте возмущающей силы $\omega = 3060 \text{ рад/с}$ показывается в конфигурационной плоскости на рис. 6.

Таблица 1 – Свойства периодических траекторий при различных значениях частоты вынуждающей силы

Диапазон значений ω , рад/с	Вид траектории в конфигурационной плоскости $(x_{7,8}; x_{6,7})$	Вид траектории в конфигурационной плоскости $(x_{7,8}; x_{6,12})$
[1000;1400]	синфазные ННФ	синфазные ННФ
1500	периодическая траектория, расположенная в первом и третьем квадранте	периодическая траектория, расположенная в первом и третьем квадранте
1600	синфазная ННФ	синфазная ННФ
[1700;2000]	периодические траектории, расположенные в 1 и 3 квадрантах	периодические траектории, расположенные в 1 и 3 квадрантах
2100	периодическая траектория	периодическая траектория
[2200;2900]	синфазные ННФ	синфазные ННФ
[3000;3080]	промежуточные траектории, расположенные в 1 и 3 квадранте	синфазные ННФ
3080.5	промежуточная траектория	синфазные ННФ
[3090;3200]	промежуточные траектории, расположенные во втором и четвертом квадранте	синфазные ННФ
[3300;4400]	антифазные ННФ	синфазные ННФ

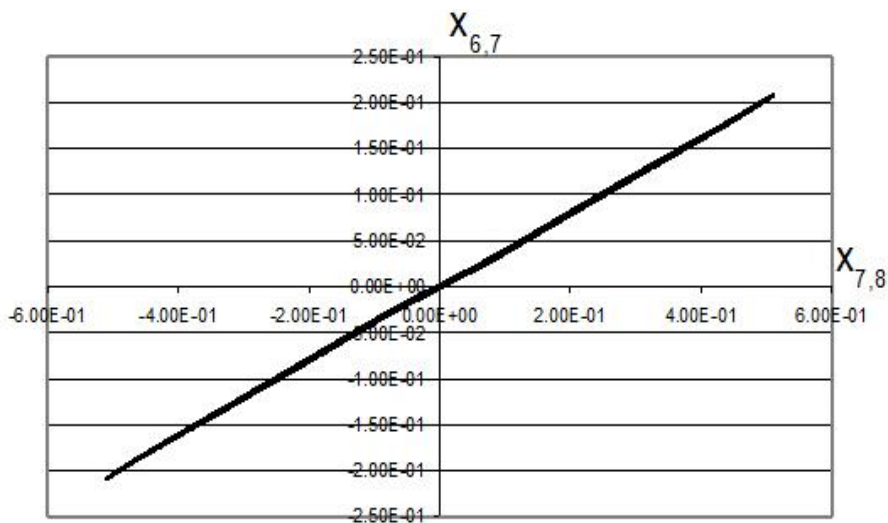


Рис. 4 – Синфазная форма при частоте вынуждающей силы $\omega = 2300 \text{ рад/с}$

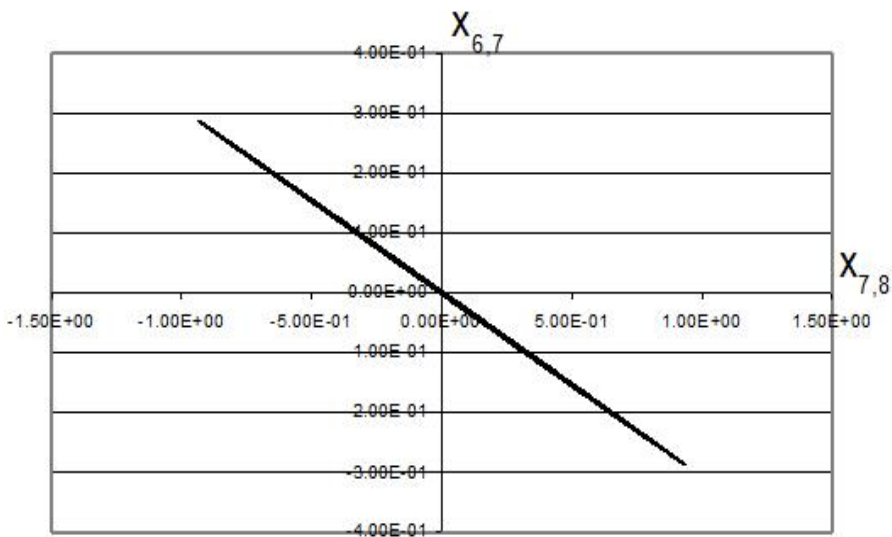


Рис. 5 – Антифазная форма при частоте вынуждающей силы $\omega = 3600 \text{ рад/с}$

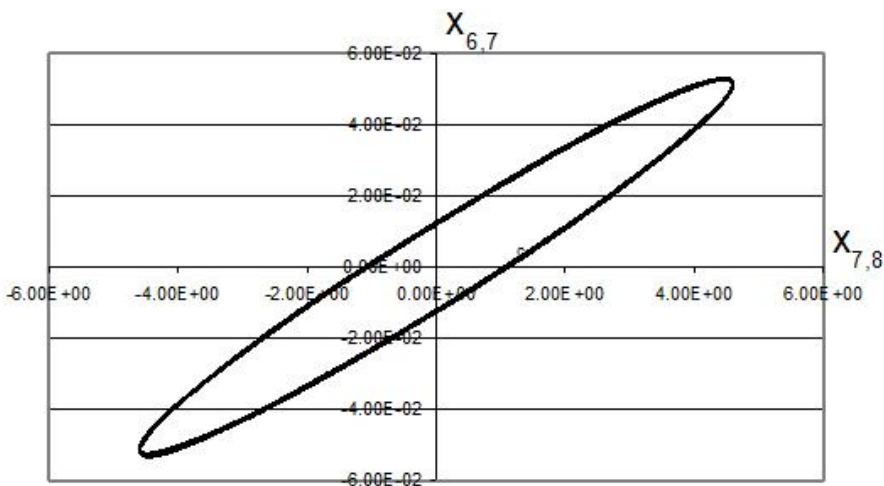


Рис. 6 – Промежуточная траектория при частоте вынуждающей силы $\omega = 3060 \text{ рад/с}$

Как было показано выше, разность фаз между двумя обобщенными координатами $\varphi_1 - \varphi_2$ указывает на нелинейную нормальную форму или промежуточную траекторию. Разность фаз исследовалась численно при изменении частоты возмущающего воздействия ω . Результаты такого расчета представлены на рис. 7. Для синфазной формы при $\omega = 2800 \text{ рад/с}$ присуща разность фаз около 0° , а антифазной ННФ при $\omega = 3500 \text{ рад/с}$ – 180° .

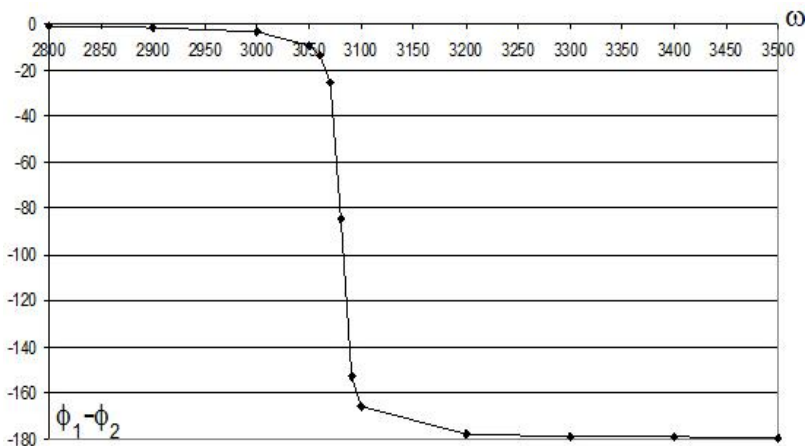


Рис. 7 – Зависимость разности фаз $\varphi_1 - \varphi_2$ от частоты возмущающего воздействия

Обобщенные координаты при движении по ННФ представляются одной синусной гармоникой, или одной косинусной гармоникой. Взаимодействие синусной и косинусной гармоники наблюдается в промежуточных траекториях.

Выводы. Исследованы нелинейные вынужденные крутильные колебания в системе с пятнадцатью степенями свободы и одним нелинейным упругим элементом. Эта система описывает колебания силовой передачи трехцилиндрового транспортного двигателя с противоположно движущимися поршнями.

Движения по нелинейным нормальным формам происходят в резонансных областях. Вдали от резонансов движения могут происходить как по нормальным формам, так и существенно отличаться от нелинейных нормальных форм.

Нелинейные нормальные формы вынужденных колебаний систем с диссипацией близки к нелинейным нормальным формам систем без диссипации. Диссипация практически не влияет на вид нелинейных нормальных форм.

Обобщенные координаты при движении по ННФ с достаточной степенью точности представляются одной синусной гармоникой, или одной косинусной гармоникой. Взаимодействие синусной и косинусной гармоник наблюдается в промежуточных траекториях, которые существенно отличаются от нелинейных нормальных форм.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Аврамов К. В.** Нелинейная динамика упругих систем. Т. 1. Модели, методы, явления / К. В. Аврамов, Ю. В. Михлин. – М. : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ин-т компьютер. иссл., 2010. – 704 с.
2. **Вейц В. Л.** Динамика машинных агрегатов с двигателями внутреннего сгорания / В. Л. Вейц, А. Е. Кочура. – Л. : Машиностроение, 1976. – 384 с.
3. **Маневич Л. И.** Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем / Л. И. Маневич, Ю. В. Михлин, В. Н. Пилипчук. – М. : Наука, 1989. – 280 с.
4. Разработка способов уменьшения крутильных колебаний трехцилиндрового транспортного двигателя. Исследование вынужденных колебаний силовой передачи двигателя ЗТД: отчёт о НИР / Руководитель Карабан В. Н., отв. исп. Аврамов К. В. – Харьков, 1994. – 67 с.
5. **Шатохин В. М.** Анализ и параметрический синтез нелинейных силовых передач машин. / В. М. Шатохин. – Харьков: НТУ "ХПИ", 2008. – 456 с.
6. **Avramov K. V.** Review of applications of nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems / K. V. Avramov, Yu. V. Mikhlin // Applied Mechanical Reviewer. – 2013. – № 65. - doi:10.1115/1.4023533.
7. **Metallidis P.** Linear and nonlinear dynamics of reciprocating engines / P. Metallidis, S. Natsiavas // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2003. – № 38. – P. 723 – 738.
8. **Mikhlin Y.** Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments / Y. Mikhlin, K. V. Avramov // Applied Mechanics Reviews. – 2010. – № 63. – P. 4–20.
9. **Vakakis A.** Normal modes and localization in nonlinear systems / A. Vakakis, L. I. Manevich, Yu. V. Mikhlin [et al.]. – New York: Wiley Interscience, 1996. – 780 p.

К. В. Аврамов, д-р техн. наук, Б. В. Успенський

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ НЕЛІНІЙНИХ НОРМАЛЬНИХ ФОРМ ЗМУШЕНИХ КРУТИЛЬНИХ КОЛИВАНЬ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ З КУСКОВО-ЛІНІЙНИМИ ПРУЖНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Розглянуто дисипативну динамічну систему з кусково-лінійною пружною характеристикою. Така система описує вимушені крутильні коливання силової передачі трьохциліндрового транспортного двигуна. Чисельно досліджено властивості нелінійних нормальних форм та інших траєкторій в цій системі.

Ключові слова: нелінійні нормальні форми, крутильні коливання, силові передачі, кусково-лінійна пружна характеристика.

K. V. Avramov, Dr. Sci. (Tech.), B. V. Uspensky

NUMERICAL ANALYSIS OF NONLINEAR NORMAL MODES OF FORCED TORSIONAL VIBRATIONS IN PIECEWISE DYNAMICAL SYSTEMS

A dissipative piecewise dynamical system is considered. This system is a model for the torsional vibrations in a power transmission of a triplex transport engine. Properties of nonlinear normal modes and other motions of this system have been analyzed.

Keywords: nonlinear normal modes, torsional vibrations, power transmission, piecewise linear systems.

The general theory of nonlinear normal modes in nonlinear dynamical systems is considered in papers [1–3]. Articles [4], [5] contain detailed reviews of nonlinear normal modes theoretical approaches and applications of nonlinear normal modes for engineering.

Current paper contains results of an investigation of nonlinear normal modes of a complex mechanical system describing forced vibrations of a boxer internal combustion engine transmission. The subject of this investigation is Kauderer–Rosenberg nonlinear normal modes of models describing forced torsional vibrations in combustion engines transmissions. Such models correspond to dissipative dynamical systems with piecewise linear elastic responses.

A boxer internal combustion engine power transmission is considered. The main elements of the power transmission are shown in Fig. 1, a. It consists of two crankshafts and a gear train, with each crankshaft having three cranks. These crankshafts are connected by a gear train comprising five spur gears (Fig. 1a). A clutch is installed into one gear as denoted by two black circles in Fig. 1a. A sketch of this clutch is shown in Fig. 1b. The clutch consists of two half clutches with sectors. Two preloaded springs are installed within each sector. Design and properties of such clutches are considered in [1].

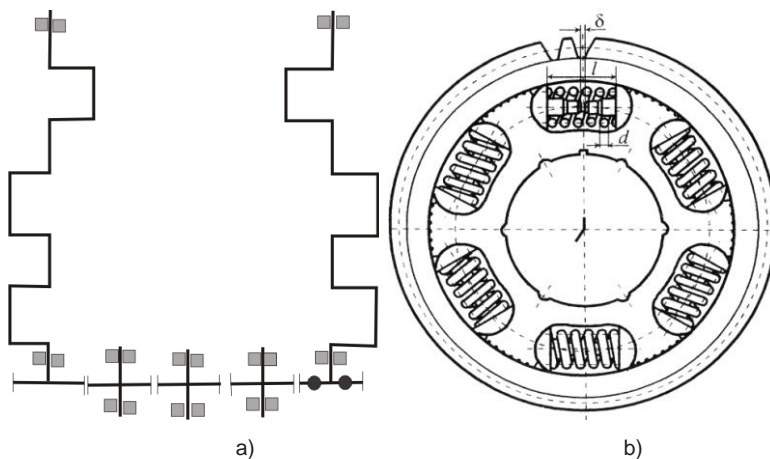


Fig. 1 – Sketch of the transmission:
a) kinematic structure; b) sketch of the clutch

Time-periodic moments act on each crank of the shaft. Disturbing moments, acting in each crankshaft can be presented in the form of a Fourier series:

$$\tilde{M}(t) = \sum_{i=1}^{N_G} \left(M_i^{(s)} \sin(i\Omega t) + M_i^{(c)} \cos(i\Omega t) \right),$$

where Ω is the crankshaft rotational frequency. It is known that the third harmonic of the Fourier series is predominant and the most dangerous in this engine [2]. Thus, the disturbing moments acting on the crank can be approximated by taking only the third harmonic of the Fourier series:

$$\tilde{M}(t) = M_3^{(s)} \sin(3\Omega t) + M_3^{(c)} \cos(3\Omega t).$$

Methods for calculation of the disturbing moments $\tilde{M}(t)$ are treated in [3]. Experimental researches described in [4] prove that the vibrations of all system elements are approximated by one harmonic of the Fourier series $\sin(3\Omega t + \vartheta)$.

Torsional vibrations of the power transmission are described by model with final number of degrees of freedom (Fig. 2, a) that consists of rigid disks and massless shafts. Each crankshaft is described by three rigid disks and massless shafts attached to the disks. Disks 1–3 and 9–11 approximate the crankshaft torsional vibrations. The motions of the disks 4–8 describe the torsional vibrations of the gears. The disks 12 and 13 describe the vibrations of a turbo-charge, and disk 13 describes the torsional vibrations of the turbine. The engine flywheel is denoted by disk 14. The power consumer is described by disk 15.

The moment of inertia of the rigid disk i is denoted by I_i . The torsional vibrations of the disk i are described by the generalized coordinate θ_i . The stiffness of the shaft between the disks i and j is denoted by c_{ij} .

The clutch is described by the dependence of the torsional torque on the angle of torsion. This function is piecewise and is shown in Fig. 2, b. The nonlinear torsional torque of the clutch $f_{78}(\theta_8 - \theta_7)$ is described by the following function:

$$f_{78}(\theta_8 - \theta_7) = \begin{cases} c_{78}(\theta_8 - \theta_7), & -\Delta_1 \leq (\theta_8 - \theta_7) \leq \Delta_1; \\ \tilde{c}_{78}(\theta_8 - \theta_7) + (c_{78} - \tilde{c}_{78})\Delta_1, & \Delta_1 < (\theta_8 - \theta_7); \\ \tilde{c}_{78}(\theta_8 - \theta_7) - (c_{78} - \tilde{c}_{78})\Delta_1, & (\theta_8 - \theta_7) < -\Delta_1. \end{cases}$$

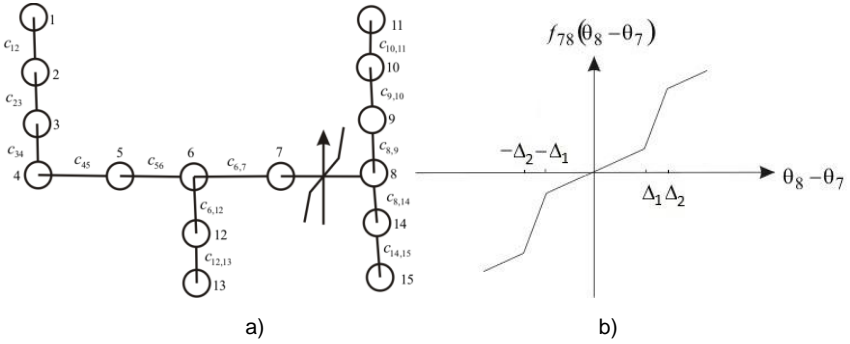


Fig. 2 – Finite-DOF model of the torsional vibrations

The torsional vibrations within the system are described by the following system of nonlinear ordinary differential equations:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\theta}_1 - c_{12}(\theta_2 - \theta_1) - \beta_{12}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) &= A \cos(\omega t); \\ I_i \ddot{\theta}_i + c_{i-1,i}(\theta_i - \theta_{i-1}) - c_{i,i+1}(\theta_{i+1} - \theta_i) + \beta_{i-1,i}(\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_{i-1}) - \beta_{i,i+1}(\dot{\theta}_{i+1} - \dot{\theta}_i) &= 0, \quad i = 2, \dots, 5; \\ I_6 \ddot{\theta}_6 + c_{56}(\theta_6 - \theta_5) - c_{67}(\theta_7 - \theta_6) - c_{6,12}(\theta_{12} - \theta_6) + \beta_{56}(\dot{\theta}_6 - \dot{\theta}_5) - \beta_{67}(\dot{\theta}_7 - \dot{\theta}_6) - \beta_{6,12}(\dot{\theta}_{12} - \dot{\theta}_6) &= 0; \\ I_7 \ddot{\theta}_7 + c_{67}(\theta_7 - \theta_6) - f_{78}(\theta_8 - \theta_7) + \beta_{67}(\dot{\theta}_7 - \dot{\theta}_6) - \beta_{78}(\dot{\theta}_8 - \dot{\theta}_7) &= 0; \\ I_8 \ddot{\theta}_8 + f_{78}(\theta_8 - \theta_7) - c_{89}(\theta_9 - \theta_8) - c_{6,14}(\theta_{14} - \theta_8) + \beta_{78}(\dot{\theta}_8 - \dot{\theta}_7) - \beta_{89}(\dot{\theta}_9 - \dot{\theta}_8) - \beta_{6,14}(\dot{\theta}_{14} - \dot{\theta}_8) &= 0; \\ I_i \ddot{\theta}_i + c_{i-1,i}(\theta_i - \theta_{i-1}) - c_{i,i+1}(\theta_{i+1} - \theta_i) + \beta_{i-1,i}(\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_{i-1}) - \beta_{i,i+1}(\dot{\theta}_{i+1} - \dot{\theta}_i) &= 0, \quad i = 9, 10; \\ I_{11} \ddot{\theta}_{11} + c_{10,11}(\theta_{11} - \theta_{10}) + \beta_{10,11}(\dot{\theta}_{11} - \dot{\theta}_{10}) &= 0; \\ I_{12} \ddot{\theta}_{12} + c_{6,12}(\theta_{12} - \theta_6) - c_{12,13}(\theta_{13} - \theta_{12}) + \beta_{6,12}(\dot{\theta}_{12} - \dot{\theta}_6) - \beta_{12,13}(\dot{\theta}_{13} - \dot{\theta}_{12}) &= 0; \\ I_{13} \ddot{\theta}_{13} + c_{12,13}(\theta_{13} - \theta_{12}) + \beta_{12,13}(\dot{\theta}_{13} - \dot{\theta}_{12}) &= 0; \\ I_{14} \ddot{\theta}_{14} + c_{8,14}(\theta_{14} - \theta_8) - c_{14,15}(\theta_{15} - \theta_{14}) + \beta_{8,14}(\dot{\theta}_{14} - \dot{\theta}_8) - \beta_{14,15}(\dot{\theta}_{15} - \dot{\theta}_{14}) &= 0; \\ I_{15} \ddot{\theta}_{15} + c_{14,15}(\theta_{15} - \theta_{14}) + \beta_{14,15}(\dot{\theta}_{15} - \dot{\theta}_{14}) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

The system (1) includes dissipative moments that can be described in the form $\beta_{i-1,i}(\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_{i-1})$. Thus, the system (1) is dissipative and has limit cycles. Such cycles are subject of the paper.

The system (1) accepts the rigid body rotations with constant angular velocity. In order to eliminate this type of motions the following change of variables is used:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \theta_2 - \theta_1; x_{2,3} = \theta_3 - \theta_2; x_{3,4} = \theta_4 - \theta_3; x_{4,5} = \theta_5 - \theta_4; x_{5,6} = \theta_6 - \theta_5; \\ x_{6,7} &= \theta_7 - \theta_6; x_{7,8} = \theta_8 - \theta_7; x_{8,9} = \theta_8 - \theta_9; x_{9,10} = \theta_9 - \theta_{10}; x_{10,11} = \theta_{10} - \theta_{11}; \\ x_{8,14} &= \theta_8 - \theta_{14}; x_{14,15} = \theta_{14} - \theta_{15}; x_{6,12} = \theta_6 - \theta_{12}; x_{12,13} = \theta_{12} - \theta_{13}. \end{aligned}$$

The stiffnesses of the shafts are the following $N \cdot m$:

$$\begin{aligned} c_{12} &= c_{23} = 2 \cdot 10^6; c_{34} = 3 \cdot 10^6; c_{45} = 2.8 \cdot 10^6; c_{56} = 1.5 \cdot 10^6; c_{67} = 6.5 \cdot 10^5; \\ c_{78} &= 8.4 \cdot 10^5; \tilde{c}_{78} = 5.04 \cdot 10^5; c_{89} = 2.6 \cdot 10^6; c_{9,10} = c_{10,11} = 2 \cdot 10^6; \\ c_{6,12} &= 1.9 \cdot 10^4; c_{12,13} = 2.7 \cdot 10^4; c_{8,14} = 3.1 \cdot 10^6; c_{14,15} = 3.3 \cdot 10^4. \end{aligned}$$

The numerical values of the disk moments of inertia are the following $kg \cdot m^2$:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 = I_3 = 7.7 \cdot 10^{-2}; I_4 = 6.5 \cdot 10^{-2}; I_5 = 8.5 \cdot 10^{-2}; I_6 = 3.6 \cdot 10^{-2}; \\ I_7 &= 4.9 \cdot 10^{-2}; I_8 = 3.8 \cdot 10^{-2}; I_9 = I_{10} = I_{11} = 7.7 \cdot 10^{-2}; I_{12} = 1.7; \\ I_{13} &= 1; I_{14} = 2.6; I_{15} = 3. \end{aligned}$$

The parameter Δ_1 has the value $\Delta_1 = 9.5 \cdot 10^{-2}$. Note that two stiffnesses of the clutch $c_{7,8}$ and $\tilde{c}_{7,8}$ essentially differ, therefore, the dynamical system (1) is considered to be essentially nonlinear. The driving force amplitude is considered as $A = 60 N \cdot m$.

Numerical investigation of the nonlinear normal modes of the system (1) was performed using a technique of direct numerical integration of the system. A transient process is not considered. Analysis includes exclusively periodical limit cycles in the range of the driving force frequency $\omega \in [1000; 4500] rad/s$.

Coordinates $x_{6,7}, x_{7,8}, x_{6,12}$ have the most significant vibration amplitudes among others in the concerned frequency range.

The following conclusions result from the analysis:

1) In the resonance regions dynamical behavior of the system matches the nonlinear normal modes. Out of the resonance regions the system behavior may differ from the nonlinear normal mode.

2) The nonlinear normal modes of forced vibrations of a dissipative system are close to the nonlinear normal modes of forced vibrations of a corresponding non-dissipative system. The Dissipation faintly affects on shape of the nonlinear normal mode.

REFERENCES

1. **Avramov K. V.** Nonlinear Dynamics of Elastic Systems. Vol. 1. Models, Methods and Approaches / K. V. Avramov, Yu. V. Mikhlin. – M.: Scientific Centre "Regular and Chaotic Dynamics", 2010. – 704 p. (in Russian)
2. **Veich V. L.** Dynamics of Internal Combustion Engines / V. L. Veich, A. E. Kochura. – Sankt Petersburg: Mashinostroenie, 1976. – 384 p. (in Russian)
3. **Manevich L. I.** Nonlinear Normal Oscillations for Essentially Nonlinear Systems / L. I. Manevich, Yu. V. Mikhlin, V. N. Pilipchuk. – M.: Nauka, - 1989. – 280 p. (in Russian)
4. Development of approaches to reduce torsional oscillations in a triplex transport engine. Analysis of forced oscillations in the power transmission of the "3ТД" engine: research effort report / Supervisor Karaban V. N., executor Avramov K. V. – Kharkov, 1994. – 67 p.
5. **Shatohin V. M.** Analysis and parametrical synthesis of nonlinear machinery power transmissions / V. M. Shatohin. – Kharkov: NTU "KhPI", 2008. – 456 p.
6. **Avramov K. V.** Review of applications of nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems / K. V. Avramov, Yu. V. Mikhlin // Applied Mechanical Reviewer. – 2013. – № 65. – doi:10.1115/1.4023533.
7. **Metallidis P.** Linear and nonlinear dynamics of reciprocating engines / P. Metallidis, S. Natsiavas // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2003. – № 38. – P. 723–738.
8. **Mikhlin Y.** Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments / Y. Mikhlin, K. V. Avramov // Applied Mechanics Reviews. – 2010. – № 63. – P. 4–20.
9. **Vakakis A.** Normal modes and localization in nonlinear systems / A. Vakakis, L. I. Manevich, Yu. V. Mikhlin [et al.]. – N.-Y.: Wiley Interscience, 1996. – 780 p.

*Національний технічний університет
"Харьковский политехнический институт",
Харьков, Украина
Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины,
Харьков, Украина*

Поступила в редколлегию 05.04.2014