ISSN 2079–1836
2014, вип. 22

УДК 539.3

Д. В. Бабич, д-р техн. наук, Т. И. Дородных, канд. физ.-мат. наук

НЕОДНОЗНАЧНОСТЬ КРИТИЧЕСКИХ НАГРУЗОК ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ СЖАТИИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН ИЗ ПОВРЕЖДАЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ

На основе структурно-вероятностного подхода к моделированию совместного процесса трещинообразования и деформирования материалов разработана методика решения задач бифуркационной устойчивости тонкостенных пластин из повреждающихся материалов при циклическом нагружении. На примере одноосно сжимаемой пластины показано, что тонкостенным элементам конструкций из повреждающихся материалов сдвигом присуща многозначность критических нагрузок, которая связана с зависимостью процесса накопления микроповрежденности от уровня и характера приложения нагрузки.

Ключевые слова: *трещинообразование, циклическое нагружение, бифуркационная устойчивость, пластина.*

Введение. Известно [1, 10, 12–17], что конструкционные материалы в процессе нагружения повреждаются путем образования рассеянных по объему микротрещин и других нарушений сплошности. Повреждаемость приводит к изменению деформационных и прочностных свойств материала. Учет таких изменений при расчете несущей способности инженерных конструкций по условиям нарушения целостности либо потери устойчивости основной формы равновесия является практически важной и актуальной задачей в различных областях техники.

Целью настоящей работы является изучение явления бифуркационной устойчивости в упругой области деформирования тонкостенных конструкций из повреждающихся материалов при повторяющемся (циклическом) нагружении силами, меньшими по значениям соответствующих статических критических усилий. Необходимость в рассмотрении такой задачи связана с тем, что потеря устойчивости конструкции из повреждающегося материала возможна при повторяющихся нагрузках, меньших статических критических, вследствие деградации материала в виде рассеянного прогрессирующего растрескивания структурных элементов, приводящего к уменьшению жесткости материала. Такое явление может иметь место при всех возможных уровнях нагружения, превосходящих уровень, до которого не происходит микроразрушение в материале.

Рассматриваемая задача аналогична задаче об усталостной прочности конструкций с той разницей, что в одном случае потеря несущей способности связана с изменением расчетной (эксплуатационной) геометрической формы конструкции, в другом – с потерей целостности конструкции, т. е. с разрушением материала.

В [7, 8] рассматривалась задача об усталостной прочности материала с использованием статистического критерия прочности, формулируемого в мерах поврежденности материала. В частности, при повторяющемся растяжении напряжениями, меньшими предела прочности материала, в качестве критерия разрушения материала принималось достижение в нем критического значения плотности микротрещин, отождествляемого с таковой при статическом разрушении образца, т. е. при напряжении, равном временному сопротивлению.

Подобный критерий можно ввести и для описания потери устойчивости тонкостенных конструкций из повреждающихся материалов, которые подвергаются воздействию одинаковой повторяющейся нагрузки. В этом случае потеря устойчивости конкретной конструкции возможна при различных, но вполне определенных комбинациях критических значений нагрузки и плотностей микротрещин в материале. Меньшим значениям критической нагрузки будут соответствовать большие значения плотности микродефектов, которые достигаются за счет повторяющегося воздействия этой нагрузкой.

Таким образом, потеря устойчивости тонкостенной конструкции из повреждающегося материала зависит от характера нагружения (однократное статическое либо повторяющееся меньшего уровня), и в связи с этим статическое критическое усилие может быть критерием несущей способности конструкций одноразового использования. Для сжимаемых конструкций многоразового использования возникает необходимость в исследованиях указанного характера.

Основной целью решения подобных задач является определение предельного количества воздействий заданной нагрузкой (долговечность по условиям устойчивости), при котором конструкция потеряет устойчивость. Необходимо отметить, что возможность потери устойчивости тонкостенных конструкций при нагрузках, меньших критических статических, связана с характером разрушения структурных элементов материала – отрывом или сдвигом. В случае образования микротрещин отрывом, параллельных (при сжатии) к направлению действия напряжений, обсуждаемый вариант потери устойчивости конструкций не возможен, поскольку при микроразрушении отрывом при повторном сжатии материал ведет себя как сплошной, и плотность микродефектов не будет увеличиваться при повторных нагружениях. Указанное явление имеет место в тонкостенных конструкциях из материалов, повреждающихся путем образования микротрещин сдвига по наклонным площадкам к направлению действия нагрузки. При таком виде микроразрушений уменьшается эффективная площадь сечений, что приводит к повышению истинных касательных напряжений в материале при постоянных условных напряжениях повторяющегося нагружения.

Для построения методики решения обсуждаемой задачи необходимо объединить в единый комплекс предложенные ранее способы решения задачи о построении уравнений состояния для повреждающихся материалов [2, 3, 6, 9, 18], задачи о накоплении повреждений в материале при соответствующем виде повторяющегося нагружения [7, 8], а также задач о бифуркационной устойчивости тонкостенных конструкций из повреждающихся материалов при статическом нагружении [4, 5].

Моделирование связанного процесса деформирования и трещинообразования при сложном напряженном состоянии. В работах [2, 3, 6, 9, 18] с использованием энергетического метода [15] разработана методика построения уравнений состояния для трещиноватого материала с постоянной и прогрессирующей концентрацией плоских микродефектов при сложном напряженном состоянии, сопровождающемся растяжением либо сжатием.

Связь между макронапряжениями и макродеформациями для среды, моделирующей изотропный трещиноватый материал, в общем случае имеет вид

$$\varepsilon_{ij} = a_{ijkl}\,\sigma_{kl} \quad (\ i, j, k, l = 1,2,3\ ), \tag{1}$$

где напряжения σ_{kl} считаются заданными в лабораторной системе координат $Ox_1x_2x_3$, связанной с представительным объемом, а деформации ε_{ij} подлежат осреднению. Эффективные податливости a_{ijkl} поврежденной среды определяются энергетическим методом [15], основанным на принципе эквивалентности энергии поврежденной среды и сплошной среды, моделирующей первую.

Плотность энергии деформирования моделирующей среды записывается в виде

$$W = 1/2a_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = W^{\circ} + W'; \quad W^{\circ} = 1/2a^{\circ}_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}, \tag{2}$$

где W° – плотность энергии сплошной среды; W' – приращение плотности освобожденной энергии деформирования поврежденной среды, связанное с освобождением внутренней энергии вследствие нарушения связей при нормальном отрыве и сдвиге поверхностей микротрещин.

Плотность освобожденной энергии поврежденного материала определяется в соответствии с принципом Эшелби [9] в виде работы взаимного смещения поверхностей трещин, вызванного напряжениями, которые имели бы место при заданном нагружении в сплошной среде в местах, занимаемых трещинами [15].

В [9, 18] изложена процедура построения соотношений для плотности освобожденной внутренней энергии при трещинообразовании в материале путем отрыва. В основу этой процедуры положена структурная модель накопления повреждений Даниэлса [10], вытекающая из 1-го силового критерия разрушения структурных элементов материала и двухпараметрического степенного закона [10] распределения пределов прочности кристаллитов и зерен различной ориентации при отрыве σ, являющихся случайными величинами для микронеоднородных сред.

В случае микроразрушений сдвигом при сжатии используются критерии, формулируемые относительно полных истинных (истинные напряжения $\bar{\sigma}_{k3}$ отличаются от условных σ'_{k3} тем, что первые относятся к площадкам поврежденной микротрещинами среды, вторые – к площадкам сплошной среды) максимальных либо октаэдрических, а также относительно касательных напряжений $\bar{\tau}_3$ в случайных сечениях структурных элементов

$$\bar{\tau}_3 = \sqrt{(\bar{\sigma}_{13})^2 + (\bar{\sigma}_{23})^2} \geq \tau, \tag{3}$$

где τ – обозначает случайные значения пределов сдвиговой прочности в структурных элементах.

Соответствующее выражение для плотности освобожденной энергии имеет вид

$$W' = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{k=1}^{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P\left(\bar{\tau}_3\right) B'_k \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\psi \, d\phi. \tag{4}$$

В (3), (4) обозначено [9]

$$B'_k = A'_k \left(\sigma'_{k3}\right)^2 \ (k = 1,2,3); \ A'_k = \left(\frac{1-\nu_0{}^2}{E_0}\right) Q'_k \ (k = 1,2,3);$$

$$Q'_1 = k'^2 \left[\left(k'^2 - \nu_0\right) E\left(k'\right) + \nu_0 k'^2_1 K\left(k'\right)\right]^{-1}; \ Q'_3 = 1/E\left(k'\right);$$

$$Q'_2 = k'^2 \left[\left(k'^2 + \nu_0 k'^2_1\right) E\left(k'\right) - \nu_0 k'^2_1 K\left(k'\right)\right]^{-1};$$

$$k'^2 = 1 - b'^2/a'^2; \ k'^2_1 = 1 - k'^2;$$

$$A'_1 = A'_2 = \frac{4\left(1-\nu_0{}^2\right)}{\pi\left(2-\nu_0\right)E_0}; \ A'_3 = \frac{2\left(1-\nu_0{}^2\right)}{\pi E_0} \quad \text{при } a' = b', \tag{5}$$

где $K\left(k'\right)$, $E\left(k'\right)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода; E_0, ν_0 – модуль Юнга и коэффициент Пуассона неповрежденной среды; a', b' – большая и меньшая полуоси образующихся эллиптических трещин, с которыми связаны оси локальной системы координат $0x'_i \ (i = 1,2)$, ось $0x'_3$ направлена по нормали к поверхностям микротрещин; $\sigma'_{k3} \ (k = 1,2,3)$ – компоненты тензора локальных условных напряжений в собственной системе координат образующейся трещины $0x'_1x'_2x'_3$.

Условные локальные напряжения σ'_{k3} и заданные в теле средние напряжения σ_{kl} связаны преобразованием

$$\sigma'_{i3} = \sigma_{kl}\alpha_{ik}\alpha_{3l}, \tag{6}$$

где α_{ik}, α_{3l} – определяемые углами Эйлера ($0 \le \vartheta \le \pi$ – угол нутации, $0 \le \psi \le 2\pi$ – угол прецессии, $0 \le \phi \le 2\pi$ – угол собственного вращения) направляющие косинусы собственной системы координат некоторой трещины по отношению к лабораторной системе координат. Направляющие косинусы представляются соотношениями [11]

$$\begin{gathered}\alpha_{11} = \cos\phi\,\cos\psi - \sin\phi\sin\psi\cos\vartheta; \quad \alpha_{13} = \sin\phi\sin\vartheta; \\ \alpha_{32} = -\cos\psi\sin\vartheta; \quad \alpha_{33} = \cos\vartheta; \quad \alpha_{31} = \sin\psi\sin\vartheta; \quad \alpha_{23} = \cos\varphi\sin\vartheta; \\ \alpha_{12} = \cos\phi\,\sin\psi + \sin\phi\cos\psi\cos\vartheta; \quad \alpha_{21} = -\sin\phi\cos\psi - \cos\phi\sin\psi\cos\vartheta; \\ \alpha_{22} = -\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\psi\cos\vartheta.\end{gathered} \tag{7}$$

Символом $P(\overline{\tau}_3)$ в (4) обозначена относительная доля разрушенных сдвигом структурных элементов материала в единице объема. Хрупкие и упругопластические материалы при сжатии могут растрескиваться путем отрыва и путем сдвига. Конкретный вид микроразрушений учитывается при определении плотности микроразрушений в материале на этапе определения параметров функции распределения микропрочности по стандартным данным механических свойств материала.

В предположении возможности микроразрушений в материале при нагружениях любого уровня распределение случайных значений пределов сдвиговой микропрочности структурных элементов τ на некотором конечном интервале их изменения можно описать двухпараметрическим степенным законом в виде [10]

$$F(\tau) = (\tau/\tau_3)^{\alpha}. \tag{8}$$

В формуле (8) введены обозначения: τ – случайные значения пределов прочности структурных элементов при сдвиге; τ_3, α – соответственно максимальное значение указанных величин и коэффициент рассеивания пределов прочности в рассматриваемой области нагружения.

Разрушение отдельных структурных элементов образует совокупность независимых случайных событий. Взаимодействие элементов между собой состоит лишь в том, что после разрушения части из них происходит перераспределение напряжений между оставшимися целыми элементами.

Вследствие перераспределения локальные истинные касательные напряжения представляются соотношением

$$\overline{\tau}_3 = \tau_3' / \left[1 - p(\overline{\tau}_3)\right]. \tag{9}$$

Здесь $p(\overline{\tau}_3) = F(\overline{\tau}_3)$ – суммарные относительные доли площади пересечения разрушенных структурных элементов путем сдвига напряжениями $\overline{\tau}_3$ в сечениях представительного объема. Отметим, что поверхностная $p(\bar{\tau}_3)$ и объемная плотности $P(\bar{\tau}_3) = N_0 / N$, где N_0, N – количество разрушенных и общее количество структурных элементов в единице объема, совпадают [6, 9, 18].

Таким образом, с учетом (8), (9) плотность микродефектов, образующихся сдвигом при действующем касательном напряжении $\bar{\tau}_3$, будет определяться соотношением

$$p(\bar{\tau}_3) = \left(\frac{\bar{\tau}_3}{\tau_3} \right)^{\alpha}. \tag{10}$$

Локальные истинные касательные напряжения $\bar{\tau}_3 = \sqrt{\bar{\sigma}_{13}^2 + \bar{\sigma}_{23}^2}$, вызывающие сдвиговые микроразрушения, через соответствующие условные напряжения представляются формулой

$$\bar{\tau}_3 = \frac{\sqrt{\sigma_{13}'^2 + \sigma_{23}'^2}}{1 - p(\bar{\tau}_3)}. \tag{11}$$

Для определения плотностей микродефектов при прогрессирующей повреждаемости сдвигом требуются параметры функции распределения микропрочности $\tau_3, \ \alpha$.

Указанные параметры можно было бы определить методом моментов при известных значениях экспериментальных выборочных моментов, определяющих статистически среднее значение пределов прочности и соответствующую дисперсию для структурных элементов материала. Однако, в силу малости размеров структурных элементов, прямое определение указанных параметров неосуществимо.

В [7, 8] предложена процедура определения параметров функции распределения пределов микропрочности отрывом для хрупкого материала с использованием значений временного сопротивления σ_b и соответствующей дисперсии w_b.

В случае упругопластических материалов при одноосном сжатии образцов механизмы трещинообразования в структурных элементах в различных диапазонах нагружения отличаются, и вследствие этого соответствующие функции распределения микропрочности будут отличаться параметрами распределения пределов прочности структурных элементов. В частности, в диапазоне изменения напряжений $0 < \sigma' < \sigma_{0,02}$ в структурных элементах может происходить непосредственно образование микротрещин сдвига при достижении касательным напряжением предельного значения либо трещинообразование, согласно [1, 17], связанное с локальными микропластическими деформациями, которые приводят к появлению множества субмикротрещин скольжения, сливающихся в процессе повторяющегося нагружения в микротрещину. В диапазоне нагружения $\sigma_{0,02} \le \sigma' \le \sigma_b$ трещинообразование в структурных элементах связано с переходом структурных элементов в состояние текучести. При этом максимальные значения плотности микродефектов на каждом интервале нагружения будут достигаться, соответственно, при значениях нормальных напряжений $\sigma' = \sigma'_{0,02}$ и $\sigma' = \sigma'_b$. Поэтому соответствующие истинные напряжения в структурных элементах также принимают максимальные значения, что является основанием для использования изложенной в [7, 8] процедуры определения параметров функции распределения (8). Если ограничиться рассмотрением потери устойчивости пластин в упругой области деформирования, то для определения параметров функции распределения сдвиговой микропрочности в интервале действующих напряжений $0 < \sigma'_{33} \le \sigma'_{0,02}$ потребуются лишь значения предела пропорциональности $\tau'_{0,02}$ и соответствующий коэффициент вариации $w_{0,02}$ [8]. Тогда в интервале значений действующих напряжений, меньших предела пропорциональности материала $(\sigma' \le \sigma'_{0,02})$, параметры функции распределения сдвиговой микропрочности структурных элементов согласно [7, 8] будут определяться выражениями вида:

$$\alpha = -1 + \frac{1}{w_{0,02}} \sqrt{1 + w_{0,02}^2}; \tag{12}$$

$$\tau_3 = \tau'_{0,02} \frac{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}+1}}{\alpha}. \tag{13}$$

Аналогично определяются параметры функций распределения и для других интервалов нагружения.

Необходимо отметить, что достоверность параметров функции распределения сдвиговых пределов прочности структурных элементов, определяемых по указанной схеме, имеет место в случае, когда различие в рассеивании последних небольшое, т. е. коэффициенты вариации пределов прочности ($w_{\tau_{..}}$) в диапазоне изменения касательных напряжений $\left(0, \tau_{0,02}\right)$ близки. Отметим также, что функции распределения микропрочности при одноосном сжатии, построенные с использованием критериев Сен-Венана, Губера – Мизеса – Генки, максимальных касательных и нормальных напряжений, будут эквивалентны в связи с тем, что соответствующие указанным критериям необходимые данные по механическим свойствам пересчитываются известным способом по имеющимся справочным данным для нормальных напряжений.

Известно, что накопление микроповреждений в материале зависит от характера и истории нагружения тел. Предположим, что до начала деформирования в материале существовала начальная сдвиговая микроповрежденность плотностью p_0. Функция распределения $F(\overline{\tau}_3)$ в (8) в этом случае будет определять относительную долю оставшихся в относительном объеме $(1 - p_0)$ неразрушенных упругих структурных элементов, в которых предел прочности или текучести равен или меньше некоторого значения τ. Поэтому, если в сечении материала локальные условные напряжения равны τ_3', то функция $F\left(\bar{\tau}_3\right)$ будет определять относительное содержание потерявших несущую способность микроэлементов в оставшейся относительной части единичного объема $(1-p_0)$. Тогда при монотонном (статическом) повышении напряжений до значений τ_3' приращение концентрации микродефектов в случайном объеме тела будет определяться выражением

$$p = p_0 + \left(1-p\right)F(\bar{\tau}_3). \tag{14}$$

В развернутом виде это соотношение с учетом (10), (11) принимает вид

$$\left(p-p_0\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(1-p\right)^{1-\frac{1}{\alpha}} = \frac{\tau_3'}{\tau_1}. \tag{15}$$

Уравнения состояния для поврежденной среды в виде (1) получаются из равенства (2). Для этой цели составляющие равенства (2) записываются в компонентах тензора задаваемых средних напряжений σ_{ij} в теле. Приравнивание коэффициентов при одинаковых выражениях относительно напряжений σ_{ij} в (1) дает выражение для определения податливостей среды a_{ijkl}, моделирующей поврежденный материал

$$a_{ijkl} = a_{ijkl}^0 + \bar{a}_{ijkl}. \tag{16}$$

Здесь a_{ijkl}^0 – податливости неповрежденной среды; $\bar{a}_{ijkl}$ – приращения податливостей за счет плотности освобожденной энергии W', которая в зависимости от характера нагружения тела определяется выражением (4).

Технические постоянные поврежденного материала через податливости определяются соотношениями [8]

$$\frac{1}{E_{ii}} = a_{iiii}; \quad -\frac{\nu_{ij}}{E_{ii}} = a_{jjii}, \quad \frac{1}{G_{ij}} = a_{ijij} \quad (i, j = 1,2,3), \tag{17}$$

где E_{ii}, G_{ij}, ν_{ij} – модули упругости, сдвига и коэффициенты Пуассона.

Выше изложена процедура построения уравнений состояния для материалов, повреждающихся путем образования микротрещин сдвига при сложном напряженном состоянии. Область применимости указанной методики ограничивается хрупкими материалами либо областью упругого деформирования пластических материалов ($\sigma_{ii} < \sigma_T$) в связи с использованием для определения деформационных характеристик повреждающегося материала соотношений (5), полученных методами линейной механики разрушения [7, 15].

Деформационные параметры уравнений состояния для повреждающегося изотропного материала при одноосном напряженном состоянии. В дальнейшем понадобятся секущие характеристики $E = E_{11} = E_{22}, \quad \nu = \nu_{12} = \nu_{21}$ из (17) для изотропного повреждающегося материала при одноосном сжатии напряжениями σ_{33}. Значения таких параметров зависят от характера сдвигового разрушения в материале, который описывается соответствующим критерием разрушения. Многим конструкционным материалам при сжатии присущи микроразрушения сдвигом, происходящие в сечениях структурных элементов, ориентированных под углом $\theta = \pi / 4$ к направлению действия сжимающего напряжения σ_{33}. В этих сечениях устанавливаются максимальные касательные напряжения $\tau'_{3\max} = \tau'_{\theta=\pi/4} = \sigma_{33} / 2$. Плотность освобожденной энергии при образовании на указанных площадках структурных элементов, например, круговых микротрещин, в соответствии с соотношениями (4)–(7) представляется в виде

$$W' = \frac{\left(1-\nu_0^2\right)}{\pi E_0 \left(2-\nu_0\right)} P\left(\bar{\tau}_3\right) \sigma_{33}^2. \tag{18}$$

На основании (2), (16), (17) с учетом (18) модуль упругости и коэффициент поперечного расширения повреждающегося материала сдвигом будут определяться формулами

$$E = E_0 \left[1 + 2\frac{(1-\nu_0^2)}{\pi\left(2-\nu_0\right)} P\left(\bar{\tau}_3\right)\right]^{-1}; \quad \nu = \frac{E\nu_0}{E_0}. \tag{19}$$

Соотношение для объемной плотности микроразрушений $P\left(\bar{\tau}_3\right)$ в (19) имеет вид (15).

Уравнения бифуркационной устойчивости для прямоугольных пластин из повреждающихся материалов. В работах [3–5] рассматривались постановки и методы решения задач бифуркационной устойчивости пластин и оболочек из повреждающихся материалов с использованием гипотез Кирхгофа – Лява и концепции продолжающегося нагружения. При выводе уравнений нейтрального равновесия применялся подход, основанный на варьировании обобщенных нелинейных уравнений состояния, связывающих интенсивности напряжений и деформаций. Ниже приводится способ вывода уравнений устойчивости пластин с использованием прямого варьирования нелинейных уравнений состояния для повреждающегося материала в плоском напряженном состоянии

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}); \ \sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}; \ \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}). \tag{20}$$

Нелинейность уравнений (20) обусловлена определяемой соотношениями (19), (15) зависимостью секущих параметров E, ν от действующих напряжений.

В рамках гипотез Кирхгофа – Лява в возмущенном состоянии пластины, отнесенной к прямоугольной системе координат $0x_1x_2x_3$, деформации будут определяться соотношениями

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij}^{\ 0} + x_3\chi_{ij} \ (i, j = 1, 2), \tag{21}$$

где выражения для кривизн и кручения срединной поверхности имеют вид

$$\chi_{11} = -w_{,11};\ \chi_{12} = -w_{,12};\ \chi_{22} = -w_{,22}, \tag{22}$$

e_{ij}^0 — деформации пластины в плоском основном деформированном состоянии; w — прогибы пластины в возмущенном состоянии, отсчитываемые в направлении нормальной к срединной плоскости пластины оси $0x_3$.

Уравнение устойчивости для пластины, отнесенной к прямоугольной системе координат $0x_1x_2x_3$, связанной со срединной плоскостью, и осями $0x_1, 0x_2$, совмещенными со сторонами пластины, в приращениях моментов имеет вид

$$M_{11,11} + 2M_{12,12} + M_{22,22} - \left(\sigma_{11}^0\chi_{11} + \sigma_{12}^0\chi_{21}\sigma_{22}^0\chi_{22}\right) h = 0. \tag{23}$$

Здесь $M_{ij} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} x_3\bar{\sigma}_{ij}dx_3; \bar{\sigma}_{ij}$ обозначают приращения моментов и напряжений в пластине вследствие перехода из плоского состояния в изогнутое; σ_{ij}^0 – напряжения в основном безмоментном напряженном состоянии.

Приращения напряжений $\bar{\sigma}_{ij}$ определяются разностью таковых в возмущенном и основном напряженных состояниях и находятся путем варьирования соотношений (20) с учетом зависимости деформационных постоянных от плотности микротрещин p в материале пластины, зависящей от компонент основного напряженного состояния σ_{ij}^0 в силу исчезающих малых, как это следует из постановки задачи о бифуркационной устойчивости, возмущений докритического напряженного состояния при переходе в бесконечно близкое равновесное состояние. Приращения напряжений представляются в виде:

$$\begin{gathered}\bar{\sigma}_{11} = \alpha_{11}\bar{\varepsilon}_{11} + \alpha_{12}\bar{\varepsilon}_{22} + \alpha_{13}\bar{\varepsilon}_{12}; \quad \bar{\sigma}_{22} = \alpha_{21}\bar{\varepsilon}_{11} + \alpha_{22}\bar{\varepsilon}_{22} + \alpha_{23}\bar{\varepsilon}_{12}; \\ \bar{\sigma}_{12} = \alpha_{31}\bar{\varepsilon}_{11} + \alpha_{32}\bar{\varepsilon}_{22} + \alpha_{33}\bar{\varepsilon}_{12}.\end{gathered} \tag{24}$$

Здесь $\bar{\varepsilon}_{ij} = -x_3 w,_{ij}$. Коэффициенты α_{ij} определяются соотношениями:

$$\alpha_{11} = \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{11}};\ \alpha_{12} = \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{22}};\ \alpha_{13} = \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{12}};..\alpha_{33} = \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\varepsilon_{12}}. \qquad (25)$$

В развернутом виде, с использованием (20), коэффициенты α_{ij} записываются так:

$$\alpha_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} + \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial e_{11}^0}\sigma_{11}{}^0;\ \alpha_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} + \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial e_{22}^0}\sigma_{11}{}^0;\ \alpha_{13} = \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial e_{12}^0}\sigma_{11}{}^0;$$

$$\alpha_{23} = \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial e_{12}^0}\sigma_{22}{}^0;\ \alpha_{31} = 2\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial e_{11}^0}\sigma_{12}{}^0;\ \alpha_{21} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} + \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial e_{11}^0}\sigma_{22}{}^0; \qquad (26)$$

$$\alpha_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} + \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial e_{22}^0}\sigma_{22}{}^0;\ \alpha_{32} = 2\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial e_{22}^0}\sigma_{12}{}^0;\ \alpha_{33} = 2\mu + 2\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial e_{12}^0}\sigma_{12}{}^0.$$

С учетом (24)–(26) уравнение (23) принимает вид

$$\begin{aligned} &D_0\left[a_1 w,_{1111} + a_2 w,_{1122} + a_3 w,_{2222} + 2a_4 w,_{1112} + 2a_5 w,_{1222}\right] + \\ &+T_{11}{}^0 w,_{11} + T_{22}{}^0 w,_{22} + 2T_{12}{}^0 w,_{12} = 0, \end{aligned} \qquad (27)$$

где $a_1 = \bar{\alpha}_{11};\ a_2 = \bar{\alpha}_{12} + \bar{\alpha}_{21} + 2\bar{\alpha}_{33};\ a_3 = \bar{\alpha}_{22};\ a_4 = \bar{\alpha}_{13} + \bar{\alpha}_{31};\ \bar{a}_5 = \bar{\alpha}_{23} + \bar{\alpha}.$

В (27) обозначено: $\bar{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} / E_0;\ D_0 = E_0 h^3 / 12;\ E_0$ – модуль упругости неповрежденного сплошного материала; $T_{ij}{}^0 = \sigma_{ij}{}^0 h$ – погонные тангенциальные усилия в докритическом напряженном состоянии пластины. К уравнению (27) присоединяются краевые условия, соответствующие закреплению торцов пластины.

Устойчивость прямоугольной пластины при одноосном сжатии. В качестве примера рассматривается задача о потере устойчивости длинной пластины из повреждающегося материала. Пластина подвергается одноосному сжатию напряжениями σ_{11} вдоль короткой стороны длиной b в направлении оси $0x_1$ $\left(T_{11} \neq 0\right)$. Уравнение (27) в этом случае принимает вид

$$D_0 a_1 w,_{1111} + T_{11}{}^0 w,_{11} = 0. \qquad (28)$$

При шарнирном опирании длинных сторон пластины решение уравнения (28) имеет вид

$$w = A\sin\frac{m\pi x_1}{b}, \qquad (29)$$

где m – количество полуволн формы потери устойчивости пластины в направлении сжатия. Критические напряжения, согласно (28), (29), определяются соотношением

$$\sigma_{11}{}^{0} = \frac{\pi^2 h^2 a_1 E_0}{12 b^2}, \tag{30}$$

здесь

$$a_1 = \frac{\alpha_{11}}{E_0},\ \alpha_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} + \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial e_{11}^0}\sigma_{11}^0. \tag{31}$$

Для рассматриваемого варианта нагружения пластины на основании соотношений (15), (19) при $\tau_3' = \sigma_{11}^0 / 2$ выражение для $\partial E / \partial e_{11}^0$ имеет вид

$$\partial E / \partial e_{11}^0 = \frac{E^2 / 2\tau_1}{\dfrac{\sigma_{11}^0}{2\tau_1} + \dfrac{\pi E_0 \left(2-\nu_0\right)}{2E\left(1-\nu_0^2\right)}\left[\dfrac{\left(1-P\right)}{\alpha P} - \dfrac{\alpha - 1}{\alpha}\right]\left(\dfrac{P}{1-P}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

На основании приведенных соотношений при заданных механических характеристиках для материала и геометрических параметрах пластины критические напряжения пластины с учетом микроразрушений находятся путем решения нелинейного уравнения (30) с использованием соотношений (19), (15). Выражение для критических напряжений (30) в связи с зависимостью соотношений (31), (19), (15) от σ_{11}^0 является нелинейным уравнением и не дает явной информации о влиянии повреждаемости материала на устойчивость пластины. Прямое решение нелинейных уравнений (30), (31), (19), (15) по определению критических значений напряжения для пластин заданных геометрических размеров можно осуществить с помощью итерационных методов. Исследование влияния микроповреждаемости материала на устойчивость пластин при одноосном сжатии и других видах нагружения можно проводить также посредством обратного метода, задаваясь, в зависимости от цели исследования, значениями концентрации микродефектов либо критических напряжений с последовательным вычислением необходимых параметров.

Анализ соотношения (30) показывает, что пластина заданных размеров $\left(h/b = const\right)$ может терять устойчивость при различных значениях сжимающих напряжений σ_{11}^0, т. е. явление обусловлено зависимостью критического напряжения σ_{11}^0 от плотности микроразрушений в материале p, с повышением которой понижается жесткость пластины.

Меньшим значениям критического напряжения σ_{11}^{0} соответствуют большие значения p. Неоднозначность явления потери устойчивости пластины вытекает из существования различных комбинаций значений критического напряжения σ_{11}^{0} и соответствующей плотности микродефектов p.

Наличие различных комбинаций сжимающих напряжений и плотностей микроразрушений, определяющих потерю устойчивости, связано с зависимостью процесса накопления микродефектов от вида и уровня нагружения тела (статическое, повторяющееся и др.).

Процедура описания явления накопления микродефектов при повторяющемся сжатии пластины напряжением σ_{11}^{0}, которое при достижении плотностью микродефектов некоторого критического значения p_{cr} вызывает потерю устойчивости пластины с заданной относительной толщиной h/b, сводится к следующему.

При заданных параметрах σ_{11}^{0}, h/b значение p_{cr}, определяемое совокупностью соотношений (30), (31), (19), (15), может достигаться как при однократном статическом нагружении напряжениями σ_{11}^{0}, так и при повторяющихся нагружениях. В случае, когда значение p_{cr} не достигается при однократном нагружении, требуется определить количество сжатий, необходимое для достижения плотностью микродефектов значения p_{cr}.

Предположим, что пластина из сплошного $(p_0 = 0)$ материала подвергается одноосному кратному статическому сжатию условным напряжением σ_{11}^{0}. В этом случае $\tau_3' = \sigma_{11}^{0}/2$ и, согласно (15), в результате первого $(n=1)$ сжатия пластины в материале образуется поврежденность, концентрация которой будет определяться соотношением

$$p_1 = (1 - p_1)^{1-\alpha} \left(\frac{\sigma_{11}^{0}}{2\tau_1} \right)^{\alpha}. \qquad (32)$$

В результате n-го сжатия в сечениях образца появятся разрушенные структурные элементы, плотность которых будет определяться соотношением

$$p_n = p_{n-1} + (1 - p_n)^{1-\alpha} \left(\frac{\sigma_{11}^{0}}{2\tau_1} \right)^{\alpha}. \qquad (33)$$

Здесь p_{n-1} – концентрация микродефектов, образовавшихся вследствие предшествующего ($n-1$)-го сжатия пластины. Потеря устойчивости пластины наступит при N-ом сжатии, когда прогрессирующая концентрация микротрещин достигнет критического значения $p_N = p_{cr}$, определяемого соотношением

$$p_{cr} = p_{N-1} + \left(1 - p_{cr}\right)^{1-\alpha} \left(\frac{\sigma_{11}^0}{2\tau_1}\right)^{\alpha}. \qquad (34)$$

Указанным количеством растяжений N характеризуется долговечность пластины по условию потери устойчивости. Долговечность N можно определять путем прямого хода, решая уравнения (33) либо с помощью обратного хода вычислений с использованием соотношения (34). Последний вариант более предпочтителен в связи с отсутствием необходимости решения уравнений (33) высокой степени, определяемой значением α

Числовой пример. Возможность многозначности критических напряжений при трещинообразовании сдвигом в тонкостенных элементах конструкций заданных размеров иллюстрируется примером пластины из стали 15Х2МФА. Значения стандартных характеристик механических свойств стали, необходимых для расчета, составляли: $E_0 = 0,2 \times 10^{12}\,Па$; $\nu_0 = 0,3$; $\sigma'_{0,02} = 0,288 \times 10^9\,Па$; $\tau'_{0,02} = \sigma'_{0,02}/2 = 0,144 \times 10^9\,Па$; $w_{0,02} = 0,146$. При потере устойчивости пластины в упругой области деформирования критические значения напряжений не превосходят предел пропорциональности ($\sigma_{11}^0 \le \sigma'_{0,02}$).

Согласно формулам (12), (13), параметры функции распределения сдвиговой микропрочности (10) в интервале изменения максимальных касательных напряжений $0 \le \tau'_3 \le \dfrac{\sigma_{11}^0}{2} = \dfrac{\sigma_{0,02}}{2}$ имеют значения $\alpha = 5,922$; $\tau_1 = 0,233 \times 10^9\,Па.$ Концентрация микротрещин, соответствующая пределу пропорциональности $\tau'_{0,02} = \sigma'_{0,02}/2$, согласно (15), равняется $p_{0,02} = 0,0925$.

Максимальная относительная толщина пластины, теряющей устойчивость в упругой области, составляет $h/b = 0,0467$. Это имеет место при $\sigma_{11}^0 = \sigma_{0,02}$; $p_{0,02} = 0,0925$. Для пластины из сплошного материала $h/b = 0,0397$.

Явление многозначности сжимающих критических напряжений иллюстрируется на примере пластины с относительной толщиной $h/b = 0,0425$. При статическом нагружении такая пластина теряет устойчивость при $\sigma_{11}^0 = 0,275 \times 10^9\,Па$ и $p = 0,06$. При статическом нагружении напряжением $\sigma_{11}^0 = 0,259 \times 10^9\,Па$ пластина потеряет устойчивость при накоплении микродефектов до плотности $p = 0,08$. Такая плотность микродефектов достигается при повторяющемся сжатии указанным напряжением на этапе нагружения $N = 2$. Приведенные результаты получены на основании соотношений (15), (19), (30), (31) полуобратным методом.

Заключение. На основе структурно-вероятностного подхода к моделированию совместного процесса трещинообразования и деформирования материалов разработана методика решения задач бифуркационной устойчивости тонкостенных пластин из повреждающихся материалов. На примере одноосно сжимаемой пластины показано, что тонкостенным элементам конструкций из повреждающихся материалов сдвигом присуща многозначность критических нагрузок, которая связана с зависимостью процесса накопления микроповрежденности от уровня и характера приложения нагрузки.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. ***Афанасьев Н.*** Статистическая теория усталостной прочности металлов / Н. Афанасьев.– К. : Изд. АН УССР, 1953. – 128 с.

2. ***Бабич Д. В****.* Про особливості деформування пошкоджуваних матеріалів / Д. В. Бабич // Доп. НАНУ. – 1994. – № 7. – С. 49–54.

3. ***Бабич Д. В.*** Приближенный учет поврежденности материала в задачах о равновесии упругих оболочек / Д. В. Бабич // Проблемы прочности. – 1996. – № 3. – С. 20–30.

4. ***Бабич Д. В.*** Устойчивость оболочек вращения при наличии микроразрушений / Д. В. Бабич // Прикладная математика и механика.– 2003.– Вып. 67, № 5 .– С. 885–895.

5. ***Бабич Д. В****.* О локальной устойчивости сжатых оболочек вращения при микроразрушениях в материале / Д. В. Бабич // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2003. – № 5. – С. 128–136.

6. ***Бабич Д. В.*** Моделирование связанного процесса деформирования и трещинообразования упругохрупких материалов / Д. В. Бабич // Проблемы прочности.– 2004. – № 2. – С. 96–105.

7. ***Бабич Д. В.*** Статистический критерий разрушения для хрупких материалов при статическом и повторяющихся нагружениях / Д. В. Бабич // Теоретическая и прикладная механика. – 2011. – №3 (49). – С. 16–27.

8. ***Бабич Д. В.*** Статистический критерий прочности для упруго-хрупких материалов / Д. В. Бабич // Проблемы прочности. – 2011. – № 5. – С. 26–37.

9. ***Бабич Д. В****.* Деформирование хрупких материалов при рассеянном трещинообразовании / Д. В. Бабич // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2012. – № 1. – С. 101–109.

10. ***Болотин В****.* Прогнозирование ресурса машин и конструкций / В. Болотин.– М. : Машиностроение, 1984. – 312 с.

11. ***Кильчевский Н****.* Курс теоретической механики. Т. 2. / Н. Кильчевский. – М. : Наука, 1977. – 479 с.

12. ***Лебедев А.*** Кинетика накопления рассеянных повреждений в поликристаллических материалах с разным размером зерна при малых деформациях / А. Лебедев, В. Ламашевский, Н. Музыка [и др.] // Проблемы прочности. – 2011. – № 5. – С. 32–44.

13. Статистические закономерности малоциклового нагружения / [Н. А. Махутов, В. В Зацаринный, Ж. М. Базарас]. – М. : Наука, 1989. – 252 с.

14. Микромеханизмы разрушения металлов / [И. И. Новиков, В. А. Ермишкин]. – М. : Наука, 1991. – 362 с.

15. ***Салганик Р. Л.*** Механика тел с большим числом трещин / Р. Л. Салганик // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 4. – С. 149–158.

16. Микромеханика разрушения полимерных материалов / [В. П. Тамуж, В. С. Куксенко]. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с.

17. ***Трощенко В. Т.*** Сопротивление усталости металлов и сплавов. Справочник в 2 частях. Часть 1. / В. Т. Трощенко, Л. А. Сосновский – К. : Наук. думка, 1987. – 510 с.

18. ***Babich D. V.*** On dispersed microdamageability of elastic-brittle materials under deformation / D. Babich, V. Bastun // J. Strain Analysis. – 2010. – Vol. 45, № 1. – P. 57–66.

Д. В. Бабич, д-р техн. наук, Т. І. Дородних, канд. физ.-мат. наук

НЕОДНОЗНАЧНІСТЬ КРИТИЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ ПРИ ЦИКЛІЧНОМУ СТИСНЕННІ ПРЯМОКУТНИХ ПЛАСТИН ІЗ ПОШКОДЖУВАНИХ МАТЕРІАЛІВ

На основі структурно-імовірнісного підходу до модулювання сумісного процесу тріщінотврорення і деформування матеріалів розроблено методику розв'язування задач біфуркаційної стійкості тонкостінних пластин із пошкоджуваних матеріалів при циклічному навантаженні. На прикладі одновісно стисненої пластини показано, що тонкостінним елементам конструкцій із пошкоджуваних матеріалів притаманна багатозначність критичних навантажень, яка пов'язана із залежністю процесу накопичення мікропошкоджень від рівня та характеру навантаження.

Ключові слова: *тріщінотворення, циклічне навантаження, біфуркаційна стійкість, пластина.*

D. V. Babich, Dr. Sci. (Tech.), T. I. Dorodnykh, PhD (Phys.-Math.)

CRITICAL LOAD AMBIGUITY OF RECTANGULAR PLATES OF DAMAGING MATERIALS UNDER CYCLIC COMPRESSION

A method for solution of the bifurcation stability of thin plates of damaging materials under cyclic loading is developed on the basis of structural andprobabilistic approach to modeling the joint process of cracking and deformation of materials. On the example of the plate under uniaxial compression it is shown that there is the ambiguity of the critical shear stress. This ambiguity is associated with the dependence of the accumulation of microdamage on the level and nature of the load application.

Keywords: *cracking, cyclic loading, bifurcation stability, plate*.

Structural materials in the process of loading are damaged by the forming of scattered microcracks in the volume. The phenomenon of the bifurcation stability in elastic part of deformation of thin-walled structures of damaging materials under repeated (cyclic) loading by forces which values are less then corresponding static critical loads are considered. The main purpose of solving such problems is the determination of the limiting number of a given load at which the structure loses stability. The damage that is considered in this paper is caused by shear (sliding-mode II). The density of microdefects increases only in the materials damaged by shear, i.e. the formation of microcracks sliding-mode II in sloping areas of elements to the load direction. Using the energy method [15] the method of constructing equations of state for the fractured material with a constant and progressive concentration of flat microdefects at the complex stress state with tension or compression was developed and presented in [2, 3, 6, 9, 18]. Under compressed load, when there are shear microdestructions, it is used criteria that is bounded up with the full true (true stresses $\bar{\sigma}_{k3}$ are connected with areas damaged by microcracks, conventional stresses σ'_{k3} are connected with continuous areas) maximum octahedral stresses or the tangential stresses in random sections of the structural elements

$$\bar{\tau}_3 = \sqrt{(\bar{\sigma}_{13})^2 + (\bar{\sigma}_{23})^2} \geq \tau.$$

The distribution of random values τ – limits of the shear microstrength structural elements – on a finite interval of their changes is described by a two-parameter formula. $F(\tau) = (\tau/\tau_3)^{\alpha}$, where τ_3 – is the maximum value of limits of the shear microstrength, α – is dispersion factor of ultimate strength in the area of loading. Due to the redistribution stresses between undamaged elements the true local shear stresses are represented by the relation

$$\bar{\tau}_3 = \tau'_3 / \left[1 - p\left(\bar{\tau}_3\right)\right].$$

Here $p(\bar{\tau}_3) = F\left(\bar{\tau}_3\right)$ – the total relative parts of the intersection area of damaged structural elements by shear stresses in the cross-sections of the representative volume. The surface $p\left(\bar{\tau}_3\right)$ and the volume density $P\left(\bar{\tau}_3\right) = N_0 / N$ (N_0, N – the number of destroyed and the total number of structural elements per unit volume) coincide [6, 9, 18]. Using the equation for the stability of the plate, as an example, the problem of loss of stability of the plate of damaged material under uniaxial compressive stress σ_{11} along of the short side with the length *b* and $0x_1$ axis direction is considered. The expression for the critical stress is obtained

$$\sigma_{11}{}^{0} = \pi^2 h^2 a_1 E_0 \Big/ \left(12 b^2\right).$$

Analysis of (3) indicates that the given plate size $(h/b = const)$ can lose stability at different conditions of compressive stress. The ambiguity of the phenomenon of loss stability follows from the existence of different combinations of values of the critical stresses and corresponding density of microdefects. It’s shown on the example of a plate from the steel 15X2MFA.

REFERENCES

1. ***Afanasiev N***. Statistical theory of the fatigue strength of metals / N. Afanasiev. – K. : Izd. AN UkrSSR, 1953. – 128 p. (in Russian)
2. ***Babich D. V.*** About peculiarities of deformation of damage materials / D. V. Babich // Dop. NANU. – 1994. – № 7. – P. 49.–54 (in Russian).
3. ***Babich D. V.*** Approximate allowance for material damage in the problems of equilibrium of elastic shells / D. V. Babich // Problemy prochnosti. – 1996. – № 3. – P. 20–30 (in Russian).
4. ***Babich D. V.*** Stability shells of revolution with microfracture / D. V. Babich // Applied Mathematics and Mechanics. – 2003. – Is. 67, № 5 .– P. 885–895 (in Russian).
5. ***Babich D. V.*** About local stability of compressed shells of revolution with microfracture in the material / D. V. Babich // Izv. RAN, Mech. Tverdogo Tela, – 2003. – № 5. – P. 128–136 (in Russian).
6. ***Babich D. V.*** Simulation of the join process of deformation and fracture of elastic-brittle materials / D. V. Babich // Problemy prochnosti. – 2004. – № 2. – P. 96–105 (in Russian).
7. ***Babich D. V.*** Statistical fracture criterion for brittle materials under static and repeated loadings / D. V. Babich // Theoretical and Applied Mechanics. – 2011. – № 3 (49). – P 16–27 (in Russian).
8. ***Babich D. V.*** The statistical criterion of strength for the elastic-brittle materials / D. V. Babich // Problemy prochnosti. – 2011. – № 5. – P. 26–37 (in Russian).
9. ***Babich D. V.*** The deformation of brittle materials under dispersed cracking / D. V. Babich // Izv. RAN, Mech. Tverdogo Tela. – 2012. – № 1. – P. 101–109 (in Russian).
10. ***Bolotin V***. Prediction of service life of machines and structures / V. Bolotin. – M. : Mashinostroenie, 1984. – 312 p. (in Russian)
11. ***Kilchevsky N***. The course of theoretical mechanics / N. Kilchevsky. – M. : Nauka, 1977. – Vol. 2. – 479 p. (in Russian)
12. ***Lebedev A.*** The kinetics of accumulation of scattered damage in polycrystalline materials with different grain sizes for small deformations / A. Lebedev, V. Lamashevsky, N. Musycka [et al.] // Problemy prochnosti. – 2011. – № 5. – P. 32–44 (in Russian).
13. Statistical regularities of low-cycle loading / N. A. Makhutov, V. V. Zatsarinnyi, J. M. Bazaras. – M. : Nauka, 1989. – 252 p. (in Russian)
14. Micromechanisms of destruction of metals / I. I. Nonikov, V. A. Ermishkin. – M. : Nauka, 1991. – 362 p. (in Russian)
15. ***Salganik R.*** Mechanics of bodies with a large number of cracks / R. L. Salganik // Izv. AN SSSR, Mechanika. Tverdogo. Tela, – 1973. – № 4. – P 149–158 (in Russian).
16. Micromechanics of destruction of polymeric materials. / V. P. Tamuzh, V. S. Kuksenko. – Riga : Zinatne, 1978. – 294 p. (in Russian)
17. ***Troshchenko V.*** Fatigue resistance of metals and alloys. Reference book in 2 parts. Part 1. / V. T. Troshchenko, L. A. Sosnovskij. – K. : Nauk. dumka, 1987. – 510 p. (in Russian)
18. ***Babich D. V***. On dispersed microdamageability of elastic-brittle materials under deformation ./ D. Babich, V. Bastun // J.Strain Analysis. – 2010. – Vol. 45, № 1. – P.57–66.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины,
Киев, Украина

Поступила в редколлегию 01.12.2013