

УДК 539.3

Е. Л. Гарт, канд. фіз.-мат. наук, К. О. Василевський

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕДІНКИ ПОЛОГОЇ ОБОЛОНКИ З КРУГОВИМИ ОТВОРАМИ ПРИ РОЗТЯГУ

Проведено комп'ютерне моделювання поведінки пологої циліндричної оболонки з одним та двома круговими отворами. Досліджено вплив близько розташованих отворів на напружено-деформований стан оболонки, знайдено найбільш небезпечні конфігурації їх розташування з точки зору впливу на несучу здатність оболонки.

Ключові слова: полога циліндрична оболонка з отворами, метод скінченних елементів, комп'ютерне моделювання, напружено-деформований стан, коефіцієнт концентрації напружень.

Вступ. Пологі оболонки знайшли широке застосування в різних галузях техніки – будівництві, авіаційній промисловості, суднобудуванні, ракетобудуванні, машинобудуванні та ін. Це пояснюється тим, що властиві тонкостінним конструкціям легкість і ергономічність сполучаються з їх високою несучою здатністю та економічністю. У сучасній промисловості широко застосовують пологі циліндричні оболонки, що мають вирізи (отвори). При навантаженні таких оболонок поблизу отворів виникає концентрація напружень, яка може несприятливо позначитися на їх міцності. Знаходження точного розв'язку виникаючих крайових задач в аналітичному вигляді можливе лише в деяких окремих випадках навантаження тіл та при окремих умовах їх закріплення [1, 2, 4–6]. Тому для інженерної практики особливо важливе значення мають наближені, але досить загальні, методи розв'язування задач прикладної теорії пружності, а саме, числові методи, які дозволяють проводити комп'ютерне моделювання механічних процесів на основі широкомасштабних обчислювальних експериментів [3, 7, 8].

Застосування стандартних пакетів прикладних програм, заснованих на методі скінченних елементів [7], значно спрощує розв'язування задач теорії пружності і пластичності: в середовищі пакета стає можливим моделювання поведінки тіл складної геометрії і різних властивостей (в межах розвинення сучасних чисельних методів розрахунку). Відомі з літератури [2, 4] розв'язки задач знайдені для замкнутих оболонок, сферичних та ін., але розгляду поведінки саме пологих оболонок з різними отворами приділено не достатньо уваги.

У даній роботі досліджується поведінка пологої циліндричної оболонки з одним та двома круговими отворами, проводиться порівняння напружено-деформованого стану (НДС) оболонки і пластинки з круговим

отвором, розглянуте питання про вплив близько розташованих отворів на НДС пологої оболонки та визначення найбільш небезпечних конфігурацій розташування отворів з точки зору впливу на її несучу здатність.

Постановка задачі. а) *Оболонка з одним отвором.* Задана однорідна пружна полого циліндрична оболонка зі сторонами площини спираючя a і b , стрілою підйому f та отвором радіуса r (рис. 1, 2). На внутрішній частині границі Γ_1 оболонки нормальні і дотичні напруження дорівнюють нулю, а на зовнішній границі Γ_2 задані напруження

$$q = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix}; \quad q_x = q = \text{const}, \quad q_y = 0, \quad q_z = 0. \quad (1)$$

На зовнішній границі Γ_3 задані граничні умови в переміщеннях:

$$u = v = w = 0. \quad (2)$$

Необхідно визначити поля переміщень і напружень в оболонці; провести аналіз її поведінки при різних значеннях радіуса отвору; визначити умови, при яких полого оболонку можна ототожнити з пластиною.

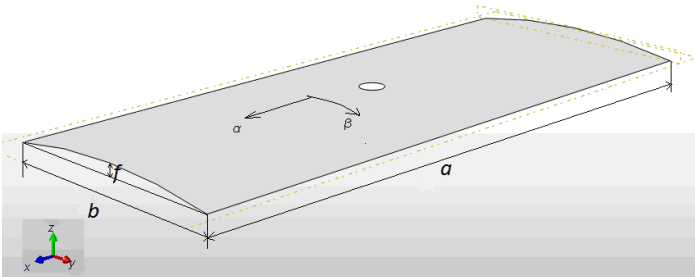


Рис. 1 – Полога оболонка з одним отвором

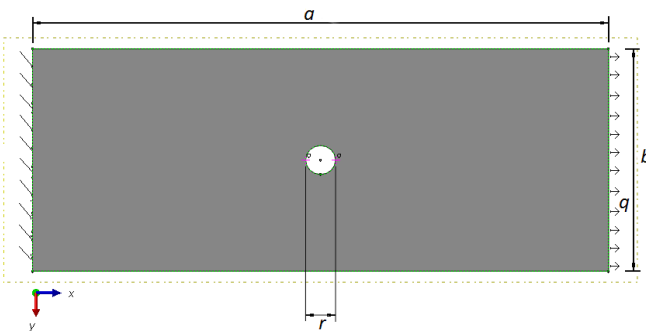


Рис. 2 – Схема навантаження оболонки

б) Оболонка з двома отворами. Задана однорідна пружна полога циліндрична оболонка зі сторонами площини спирання a і b , стрілою підйому f та отворами радіусів r та R ($R = 2r$) (рис. 3). Відстань між центрами отворів – l ; кут φ характеризує взаємне розташування отворів. Оболонка з двома отворами навантажена так само, як і в задачі а) (рис. 2). Необхідно визначити поля переміщень і напружень в оболонці та провести аналіз її поведінки при різних значеннях l та φ .

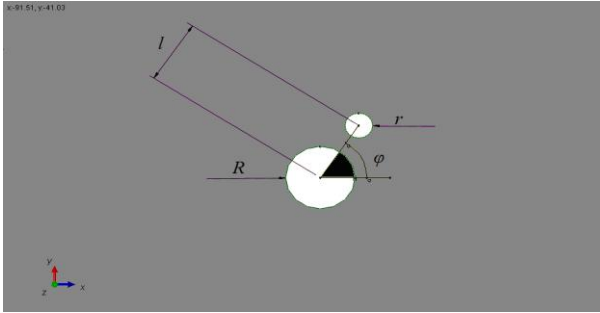


Рис. 3 – Схема розташування отворів

Математична модель задачі. Функціонал повної потенціальної енергії пологої оболонки має вигляд [1]

$$\begin{aligned}
 U = h \int_{\Omega} \left\{ \frac{G}{1-\nu} \left[u_{,\alpha}^2 + 2\nu u_{,\alpha} (v_{,\beta} + w/R) + (v_{,\beta} + w/R)^2 \right] + G(u_{,\beta} + v_{,\alpha})^2 / 2 \right\} dad\beta + \\
 + \frac{h^3}{12} \int_{\Omega} \left[\frac{G}{1-\nu} (w_{,\alpha\alpha}^2 + 2\nu w_{,\alpha\alpha} w_{,\beta\beta} + w_{,\beta\beta}^2) + 2Gw_{,\alpha\beta}^2 \right] dad\beta - \\
 - \int_{\Gamma_2} (q_1 u + S_1 v + Q_1 w + M_1 \varphi_1) d\beta, \quad (3)
 \end{aligned}$$

де G – модуль зсуву; ν – коефіцієнт Пуассона; q_1 , S_1 , Q_1 , M_1 – поздовжні, дотичні, поперечні зусилля і згинаючий момент відповідно, прикладені на краях оболонки Γ ; h – товщина оболонки.

Деформації і напруження визначаються співвідношеннями:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\alpha} = u_{,\alpha}; \quad \varepsilon_{\beta} = v_{,\beta} + w/R; \quad \omega = u_{,\beta} + v_{,\alpha}; \\
 \chi_{\alpha} = -w_{,\alpha\alpha}; \quad \chi_{\beta} = -w_{,\beta\beta}; \quad \chi_{\alpha\beta} = -w_{,\alpha\beta}; \quad (4) \\
 \sigma_{\alpha} = 2G(\varepsilon_{\alpha} + \nu\varepsilon_{\beta})/(1-\nu); \quad \sigma_{\beta} = 2G(\varepsilon_{\beta} + \nu\varepsilon_{\alpha})/(1-\nu); \quad \tau = G\omega.
 \end{aligned}$$

У (3), (4) кома означає диференціювання по координаті, величини G і E пов'язані залежністю $E = 2(1 - \nu)G$.

На основі варіаційного принципу механіки виникає задача відшукування мінімуму функціонала (3) при умовах (2).

Результати числового аналізу. Числові результати для розглянутих задач отримані на персональному комп'ютері Intel® Celeron® D CPU 220 @ 1,2GHz 1,5GHz з 2Gb оперативної пам'яті. Матеріал оболонки – легована сталь (модуль пружності $E = 205 ГПа$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,27$).

Моделювання проведено для пологої циліндричної оболонки: 1) з одним отвором змінного радіусу r ; 2) двома отворами радіусів r і $R = 2r$ ($R = 5 мм$, $r = 2,5 мм$); 3) двома отворами радіусів r і $R = r$ ($R = r = 3 мм$). Розміри оболонки: $a = 500 мм$, $b = 200 мм$, $f = 10 мм$. Напруження на границі оболонки задавались рівними $q = 15 МПа$.

При дослідженні пологої оболонки з одним круговим отвором радіусу r (задача а) розглядалась також пластина розмірами $a \times b$ і отвором такого ж радіусу. Дослідження проводилося з метою визначення можливої межі ототожнення оболонки з пластиною (задача Кірша) [3].

З рис. 4 видно, що при збільшенні радіуса отвору збільшується максимальне напруження і відповідно до нього – коефіцієнт концентрації напружень (ККН) k . До тих пір, поки $r < 0,03b$ для пологої оболонки можна застосовувати одні й ті самі методи знаходження полів напружень, що й для пластин. Якщо ж продовжувати збільшувати радіус отвору, то ототожнення пластини і оболонки стає неможливим, оскільки за рахунок того, що оболонка має ненульову кривину, то при збільшенні радіуса в концентраторах виникатимуть згинаючі моменти, що й зумовлює стрімкий ріст напружень.

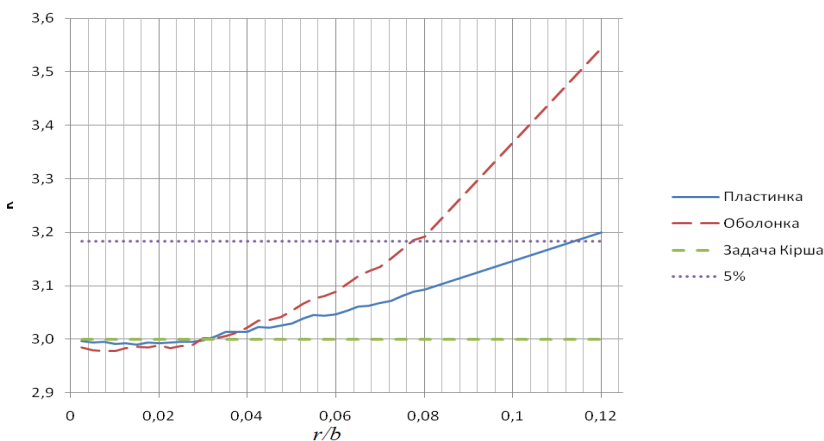


Рис. 4 – Залежність ККН k від радіусу r

При дослідженні оболонки з двома отворами різних радіусів введено характеристику взаємного розташування отворів φ (рис. 3). Для визначення такого взаємного розташування отворів, яке даватиме найбільші напруження, будемо варіювати кут φ та відстань між центрами отворів l (рис. 5). Для кута φ , що належить діапазону від 50° до 70° , ККН приймає максимальне значення.

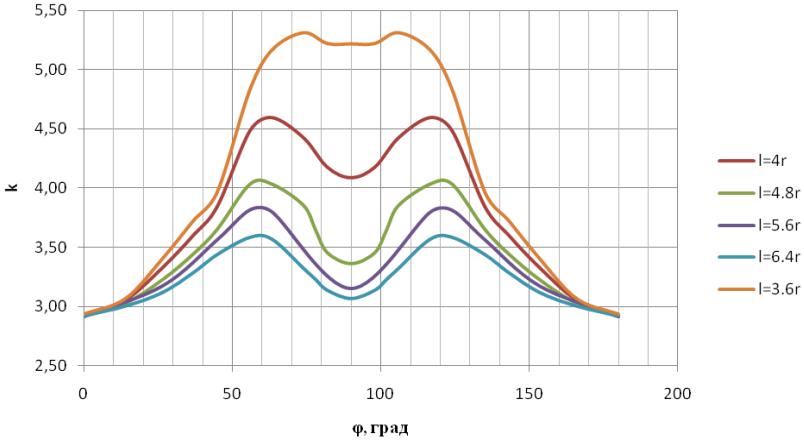


Рис. 5 – Залежність ККН k від кута φ

На рис. 6 приведена залежність ККН від співвідношення відстані між отворами до радіусу меншого отвору. Чим більше величина l/r (чим далі отвори розташовані один від одного), тим менше їх взаємний вплив, і ККН прямує до 3.

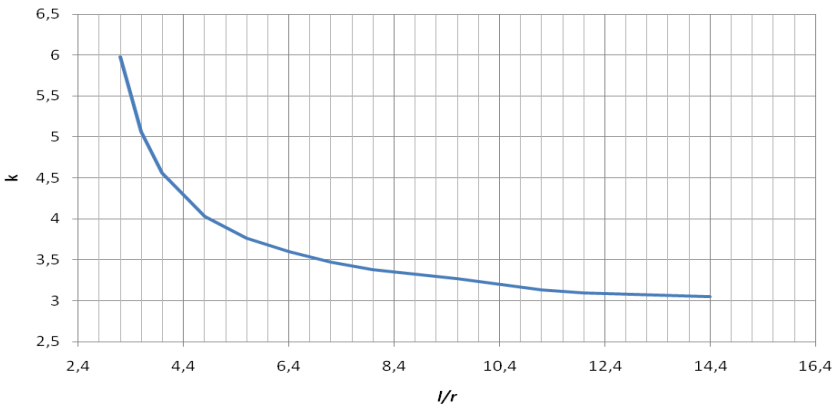


Рис. 6 – Залежність ККН від l

Для отворів, радіуси яких однакові, спостерігаються залежності, що зображені на рис. 7 – чим ближче отвори, тим більше ККН. Якщо в оболонці є два близько розташованих кругових отвори, то максимальні напруження в околі них зростають дуже швидко, що може бути небезпечним і привести до розвитку процесів руйнування, тому виникає питання про можливість заміни двох отворів одним. Якщо спроектувати оболонку на площину спірання, то проекція одного отвору буде дотикатися до проекцій двох отворів (описане коло). Тут можна вказати величину l/r , при якій ККН для одного великого кругового отвору буде меншим (менш небезпечним), ніж при наявності двох малих близько розташованих отворів (рис. 8).

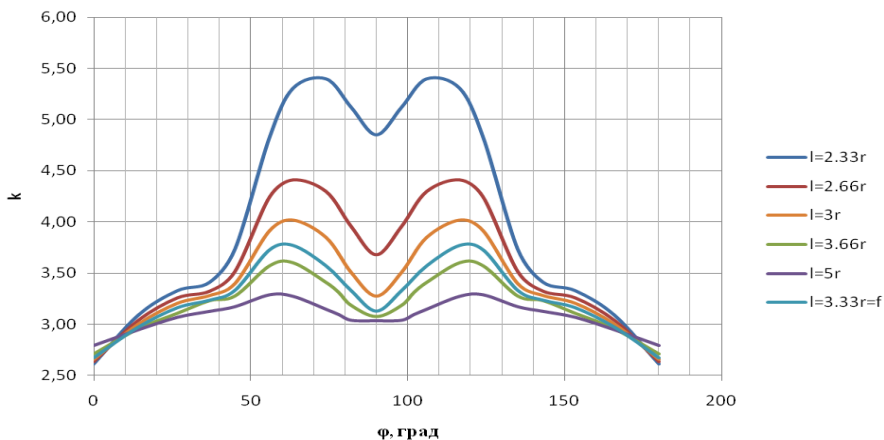


Рис. 7 – Залежність ККН k від взаємного розташування отворів при різних відстанях l

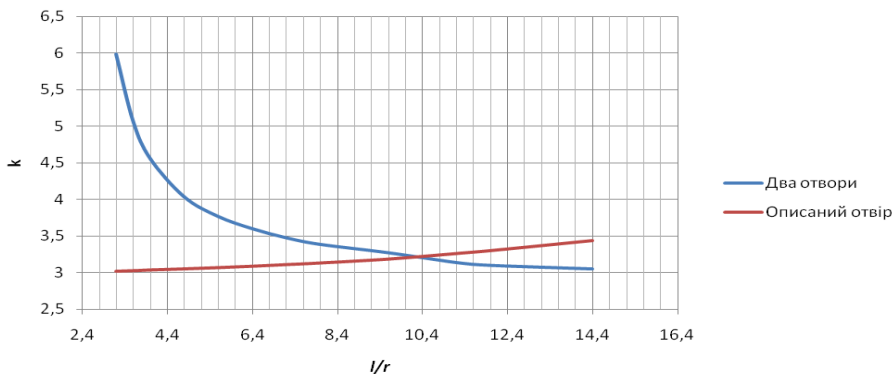


Рис. 8 – Порівняння ККН k при зміні відстані l між двома отворами з k в оболонці з одним отвором (колом, описаним навколо двох отворів)

Висновки. При дослідженні поведінки пологої циліндричної оболонки з одним отвором і порівнянні розв'язку з відповідним для пластини з одним отвором, для якої існує аналітичний розв'язок (задача Кірша), встановлено, що до тих пір, поки $r < 0,03b$ оболонку можна ототожнити з пластиною і ККН $k = 3$.

При зближенні отворів ККН зростає. Так, наприклад, при $l/r = 3,2$ коефіцієнт концентрації сягає значення $k = 6$ (збільшується вдвічі у порівнянні з ККН для оболонки з одним отвором).

Для кожної відстані між центрами l існує свій власний кут φ , що характеризує положення центра одного отвору відносно іншого. Якщо отвори розташовані дуже близько один від одного ($l = 3,2r$), то найнебезпечнішим значенням буде $\varphi^* = 90^\circ$; якщо відстань між отворами збільшувати, то найнебезпечніші конфігурації будуть у межах від 50° до 70° .

За рахунок симетрії задачі отримані результати можна використувати для повного спектру значень кута $\varphi \in (0^\circ, 360^\circ)$. Найбільший ККН для розглянутих задач отриманий при $l = 3,2r$, $\varphi = 90^\circ$ і дорівнює $k = 6$. При цьому, ККН для оболонки з двома близько розташованими отворами виявляється вдвічі більшим ніж для оболонки з одним отвором.

Досліджено вплив відстані і взаємного розташування отворів з однаковими радіусами. Найбільший ККН спостерігається при $l = 2,33r$ і $\varphi = 63^\circ$. Порівнюючи розподіл напружень для оболонки з отворами різних та однакових радіусів, можна бачити, що коли радіуси отворів різні, то при однакових l та φ ККН в оболонці з різними отворами більший ніж для оболонки з однаковими отворами в 1,2 рази.

При наявності двох отворів різних радіусів при відстані між отворами $l < 10,2r$ доцільніше замість них розміщати один великий отвір, який їх описує, якщо це не суперечить конструктивним вимогам.

В оболонці з отворами при їх зближенні ККН суттєво збільшується, що може призвести до появи пластичних деформацій, тому для подальшого вивчення представляє інтерес розрахунок напружено-деформованого стану оболонки з урахуванням пластичних деформацій та вивчення появи і розвитку зон пластичних деформацій.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Васидзу К.** Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – М. : Мир, 1987. – 544 с.
2. **Григолюк Э. И.** Перфорированные пластины и оболочки / Э. И. Григолюк, Л. А. Фильштинский. – М. : Наука, 1970. – 556 с.
3. **Гудрамович В. С.** Взаимное влияние вырезов на прочность оболочечных конструкций при пластическом деформировании / В. С. Гудрамович, Э. Л. Гарт, Д. В. Клименко, С. А. Рябоконь // Проблемы прочности. – 2013. – № 1. – С. 5–16.
4. **Гузь А. Н.** Методика расчета упругих оболочек с отверстиями на ЭВМ / А. Н. Гузь, С. В. Загора, В. Н. Чехов и др. – К. : Наук. думка, 1982. – 295 с.

5. **Савин Г. Н.** Распределение напряжений около отверстий / Г. Н. Савин. – К. : Наук. думка, 1968. – 888 с.
6. **Чехов В. Н.** Концентрация напряжений в сферической оболочке с двумя близко расположенными круговыми отверстиями / В. Н. Чехов, С. В. Загора // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* – 2010. – Т. 53, № 3. – С. 93–98.
7. **Шайдуров В. В.** Многосеточные методы конечных элементов / В. В. Шайдуров. – М. : Мир, 1989. – 280 с.
8. **Hudramovich V. S.** Elastoplastic deformation of nonhomogeneous plates / V. S. Hudramovich, E. L. Hart, S. A. Rjabokon' // *J. of Eng. Math.* – 2013. – Vol. 78, Is. 1. – P. 181–197.

Э. Л. Гарт, канд. физ.-мат. наук, К. А. Василевский

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ С КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

Проведено компьютерное моделирование поведения пологой цилиндрической оболочки с одним и двумя круговыми отверстиями. Исследовано влияние близко расположенных отверстий на напряженно-деформированное состояние оболочки, найдены наиболее небезопасные конфигурации их расположения с точки зрения влияния на несущую способность оболочки.

Ключевые слова: полая цилиндрическая оболочка с отверстиями, метод конечных элементов, компьютерное моделирование, напряженно-деформированное состояние, коэффициент концентрации напряжений.

E. L. Hart, PhD (Phys.-Math.), K. O. Vasilevsky

COMPUTER SIMULATION OF THE BEHAVIOR OF A SHALLOW SHELL WITH A CIRCULAR HOLE AT A STRETCHING

Computer simulation of the behavior shallow cylindrical shell with one and two circular holes was made. The influence of holes' closeness on the stress-strain state of the shell were investigated. The most dangerous configurations their location from the point of view of influence on the carrying capacity of the shell were found.

Keywords: shallow cylindrical shell with holes, finite element method, computational modeling, stress-strain state, the stress concentration coefficient.

Elements in the form of a shallow cylindrical shells (details covering missiles, submarines, planes, various details which are used in construction and others) that have openings (holes) are widely used in modern industry and construction. Under the load of such shells near the borders of holes stress concentration arise, which may adversely affect on the structural strength.

An exact solution of boundary problems in an analytical form is possible only in specific cases and in the activity of bodies and under certain conditions of their pinning [2, 4–6]. So, for engineering practice approximate, but rather general, methods solving of applied theory of elasticity problems, are essential, namely numerical methods [1, 3, 7, 8]. In this paper, computer simulation of the behavior shallow cylindrical shell with one and two circular holes was conducted, the comparison of the stress-strain state (SSS) of shells and plates with a circular hole was implemented, the question of the effect of closely spaced holes on the stress concentration coefficient of a shallow shell (SCC) was considered, the most dangerous configurations

of hole location from the point of view of influence on the carrying capacity of the shell were found.

In the studying of shallow cylindrical shells' with a hole of radius r behavior and comparison the solutions with corresponding for plates with a hole, for which there is an analytical solution of the Kirsch problem [5], it was found that as long as $r < 0,03b$ (b – plates size), the shell can be identified with the plate, with the stress concentration coefficient $k = 3$.

For each of the distance between the centers of the holes l a unique angle φ exists, that characterizes their position concerning to each other.

If holes are very close ($l = 3,2r$), the most dangerous value φ is $\varphi^* = 90^\circ$, and if the distance between the holes to increase, then the most dangerous configuration will be in the range from 50° to 70° (Fig. 1). The greatest concentration coefficient $k = 6$ was received at $l = 3,2r$, $\varphi = 90^\circ$.

The influence of the distance and mutual location of holes of equal radii was investigated. The greatest concentration coefficient is observed at $l = 2,33r$ and $\varphi = 63^\circ$. Also, comparing the coefficients of stress concentration for shells with holes of different and equal radii, it is possible to see that when the holes of different radii, then at the same l and φ , for a shell with a variety holes the concentration coefficient greater than for a shell with the equal holes in 1.2 times. Thus, if the holes of different radius, the shell is worse to carry a load. As a rule, stress concentration is comes in areas near the contour of smaller radius.

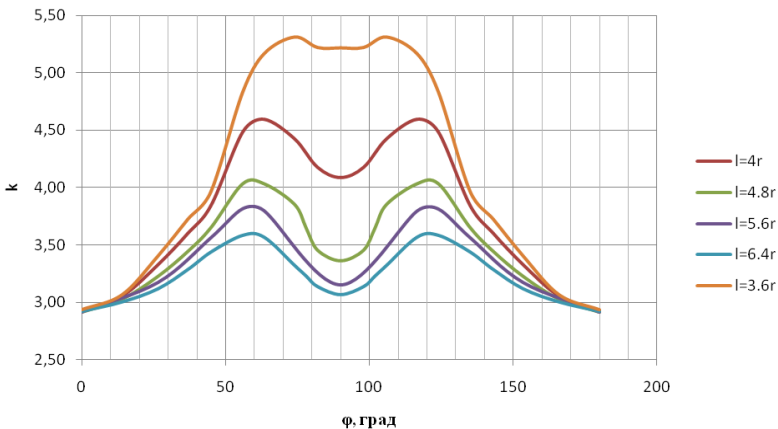


Fig. 1 – Dependence of the SCC k on the angle φ

If there were two holes of different radii and the distance between the holes $l < 10,2r$, it would be better to place one large hole instead

of the two holes, which describe them, if it did not contradict with the design requirements.

In shell with holes in the time of their rapprochement SCC increases significantly, which can lead to plastic deformations. So, for further investigation, calculation of stress-strain state of the shell, taking into account the plastic deformation and studying of the arising and development of plastic deformations zones is of interest.

REFERENCES

1. **Vasidzu K.** Variational methods in the theory of elasticity and plasticity / K. Vasidzu. – M. : Mir, 1987. – 544 p. (in Russian).
2. **Grigolyuk E. I.** Perforated plates and shells / E. I. Grigolyuk, L. A. Filstinsky. – M. : Nauka, 1970. – 556 p. (in Russian).
3. **Hudramovich V. S.** Mutual influence cut the strength of the shell structure, operations with plastic deformation / V. S. Hudramovich, E. L. Hart, D. V. Klimenko, S. A. Rjabokon', // Problemy prochnosti. – 2013. – № 1. – P. 5–16 (in Russian).
4. **Guz A. N.** Calculation method of elastic shells with holes on the computer / A. N. Guz, S. V. Zakora, V. N. Chekhov and others. – K. : Nauk. dumka, 1982. – 295 p. (in Russian).
5. **Savin G. N.** Stress distribution around holes / G. N. Savin. – K. : Nauk. dumka, 1968. – 888 p. (in Russian).
6. **Chekhov V. N.** Stress concentration in a spherical shell with two close RA-polozhennye circular holes / V. N. Chekhov, S. V. Sakura // Matem. metody ta fizyko-mekhan. polya, 2010. – Vol. 53, № 3. – P. 93–98 (in Russian).
7. **Shaidurov V. V.** Multigrid methods of finite elements / V. V. Shaidurov. – M. : Mir, 1989. – 280 p. (in Russian).
8. **Hudramovich V. S.** Elastoplastic deformation of nonhomogeneous plates / V. S. Hudramovich, E. L. Hart, S. A. Rjabokon' // J. of Eng. Math. – 2013. – Vol. 78, Is. 1. – P. 181–197.

*Дніпропетровський національний
університет ім. Олеся Гончара,
Дніпропетровськ, Україна*

Надійшла до редколегії 10.12.2013