

УДК 539.3

*А. А. Гриневич, П. Ю. Книш, В. В. Лобода, д-р фіз.-мат. наук*

## **АНАЛІТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЕЛЕКТРОДОВАНОЇ ТРІЩИНИ В П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОМУ БІМАТЕРІАЛІ**

Пропонується точний аналітичний підхід до дослідження плоскої деформації п'єзоелектричного біматеріалу з електродованою тріщиною на межі поділу його компонент. Вважається, що на нескінченності задані поле напружень та електричне поле, паралельне до берегів тріщини. Отримані досить прості формули для електромеханічних факторів в околі тріщини та проведена їх графічна ілюстрація

*Ключові слова:* п'єзоелектричний біматеріал, електродована тріщина, задача лінійного спряження.

**Вступ.** Моделі з електродованою тріщиною в п'єзоелектричній кераміці широко використовуються при розрахунку різних електромеханічних пристроїв, таких як датчики, сенсори та приводи. Тріщина на внутрішній кромці електрода, що лежить між двома матеріалами, в деяких випадках є причиною несправності в багатьох багатощарових приводах. Тому вивчення таких тріщин має важливе значення для практики.

Основні положення механіки руйнування п'єзоелектричних матеріалів викладені у монографіях [1, 2, 5], а окремі задачі для тріщин, вільних від електродів, між двома п'єзоелектричними матеріалами розглядалися в роботах [8–10]. Електродована тріщина в однорідному п'єзоелектричному матеріалі вивчалась в [3], а тріщина з електропровідними берегами на межі поділу двох п'єзоелектричних матеріалів – в роботі [7]. При цьому слід відзначити, що в останній роботі розглядалось електричне навантаження, ортогональне до берегів тріщини, тому проблеми пов'язані з можливим взаємопроникненням берегів тріщини та їх контактом не розглядалися. В даній роботі вивчається електродована тріщина між двома п'єзоелектричними матеріалами під дією механічного навантаження та електричного потоку, паралельного до берегів тріщини.

**Постановка задачі.** Замкнена система рівнянь п'єзо статички за відсутності в середовищі масових сил і вільних зарядів може бути представлена у вигляді:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\gamma_{kl} - e_{kij}E_k,$$

$$D_i = e_{ikl}\gamma_{kl} + d_{ik}E_k,$$

$$\sigma_{ij,i} = 0, \quad D_{i,i} = 0,$$

$$\gamma_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad E_i = -\varphi_{,i},$$

де  $u_i$ ,  $\varphi$ ,  $\sigma_{ij}$ ,  $D_i$  – відповідно поля переміщень, електричного потенціалу, механічних напружень та електричної індукції;  $c_{ijkl}$ ,  $e_{ijk}$ ,  $d_{ij}$  – відповідно компоненти пружної, п'єзоелектричної та діелектричної матриць.

Розглянемо плоску деформацію біматеріалу, складеного з півпросторів  $x_3 > 0$  та  $x_3 < 0$ , поляризованих по напрямку осі  $x_3$  і зчеплених по інтерфейсу  $x_3 = 0$ . На відрізку  $x_1 \in [-a, a]$  інтерфейсу розташована електродована тріщина (рис. 1), яка вважається провідною, тобто на її берегах  $E_1 = 0$ . Крім того, на тріщині задано сумарний заряд величини  $D_0$ .

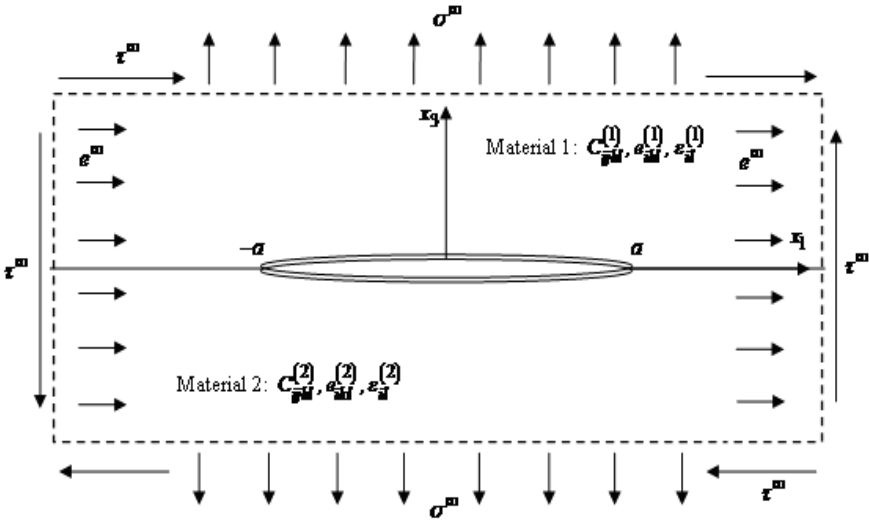


Рис. 1 –Електродована тріщина в біматеріалі

В загальному випадку також задані ненульові електромеханічні граничні умови на нескінченності:

$$\sigma_{13}^{\infty} = \tau, \quad \sigma_{33}^{\infty} = \sigma, \quad E_1^{\infty} = e.$$

Умови на інтерфейсі мають вигляд:

$$\sigma_{i3}^+ = \sigma_{i3}^-, \quad E_1^+ = E_1^- \quad \text{для } x_1 \in (-\infty, +\infty),$$

$$u_i^+ = u_i^-, \quad D_3^+ = D_3^- \quad \text{для } |x_1| > a,$$

$$\sigma_{i3}^+ = 0, \quad E_1^+ = 0 \quad \text{для } |x_1| < a. \quad (1)$$

Розшукуються компоненти  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{33}$ ,  $E_1$  вздовж інтерфейсу, стрибок компоненти  $D_3$  на включенні, а також розкриття  $[[u_3]]$  тріщини. Тут і далі  $[[\bullet]]$  означає стрибок відповідної функції при переході через інтерфейс.

**Розв'язок задачі.** Позначимо  $V = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ \phi]^T$ ,  $t = [\sigma_{13} \ \sigma_{23} \ \sigma_{33} \ D_3]^T$ ,  $K = [\sigma_{13} \ \sigma_{23} \ \sigma_{33} \ E_1]^T$ ,  $L = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & D_3 \end{bmatrix}^T$  та використаємо співвідношення [5]

$$[[L(x_1)]] = W^+(x_1) - W^-(x_1), \quad (2)$$

$$K^{(1)}(x_1) = SW^+(x_1) - \bar{S}W^-(x_1), \quad (3)$$

де  $S$  – матриця розмірності  $(4 \times 4)$ , компоненти якої визначаються через фізичні характеристики півпросторів, а  $W = [W_1, W_2, W_3, W_4]^T$  – невідома вектор-функція, що підлягає визначенню.

Вигляд граничних умов свідчить про розривність компонент  $W_1$ ,  $W_3$ ,  $W_4$ . Щодо компоненти  $W_2$ , то вона є аналітичною і обмеженою у всій площині і тому за теоремою Ліувіля є константою, величина якої визначається значенням на нескінченності. Очевидно, що  $W_2 = 0$  у всій площині.

Матриця  $S$  для біматеріалів обраного класу, поляризованих вздовж осі  $x_3$ , має наступний вигляд:

$$S = \begin{bmatrix} is_{11} & 0 & s_{13} & is_{14} \\ 0 & is_{22} & 0 & 0 \\ -s_{13} & 0 & is_{33} & s_{34} \\ is_{14} & 0 & -s_{34} & is_{44} \end{bmatrix}, \quad s_{ij} \in R.$$

Тоді співвідношення (3) в розгорнутому вигляді записуються так

$$\begin{cases} \sigma_{13}^{(1)} = is_{11}(W_1^+ + W_1^-) + s_{13}(W_3^+ - W_3^-) + is_{14}(W_4^+ + W_4^-), \\ \sigma_{33}^{(1)} = -s_{13}(W_1^+ - W_1^-) + is_{33}(W_3^+ + W_3^-) + s_{34}(W_4^+ - W_4^-), \\ E_1^{(1)} = is_{14}(W_1^+ + W_1^-) - s_{34}(W_3^+ - W_3^-) + is_{44}(W_4^+ + W_4^-). \end{cases} \quad (4)$$

Розглянемо наступну комбінацію електромеханічних величин, яка впливає з (4):

$$\sigma_{33}^{(1)} + i(m\sigma_{13}^{(1)} + nE_1^{(1)}) = d_1 \left\{ W_1^+ + i \frac{s_{33} + \alpha_1}{d_1} W_3^+ + \frac{s_{34} - \alpha_2}{d_1} W_4^+ \right\} + d_2 \left\{ W_1^- + i \frac{s_{33} - \alpha_1}{d_2} W_3^- + \frac{-s_{34} - \alpha_2}{d_2} W_4^- \right\}, \quad (5)$$

де  $d_1 = -s_{13} - (s_{11}m + s_{14}n)$ ,  $d_2 = s_{13} - (s_{11}m + s_{14}n)$ ,  $\alpha_1 = s_{13}m - s_{34}n$ ,  $\alpha_2 = s_{14}m + s_{44}n$ ,  $m, n \in R$ .

Будемо вимагати, щоб коефіцієнти перед  $W_i^\pm$  у фігурних дужках співпадали. Це призводить до системи рівнянь відносно  $m$ ,  $n$ :

$$\begin{cases} \frac{s_{33} + \alpha_1}{d_1} = \frac{s_{33} - \alpha_1}{d_2}, \\ \frac{s_{34} - \alpha_2}{d_1} = \frac{-s_{34} - \alpha_2}{d_2}, \end{cases}$$

яка має два розв'язки:  $(m_1, n_1)$ ,  $(m_2, n_2)$ . Введемо позначення:

$$s_j = \frac{s_{33} + \alpha_1}{d_1}, \quad t_j = \frac{s_{34} - \alpha_2}{d_1}, \quad g_j = \frac{d_{2j}}{d_{1j}}, \quad j = 1, 2.$$

Тоді співвідношення (5) можна записати у вигляді

$$\sigma_{33}^{(1)} + i(m_j\sigma_{13}^{(1)} + n_jE_1^{(1)}) = F_j^+(x_1) + g_jF_j^-(x_1), \quad (6)$$

$$\text{де } F_j(z) = d_{1j} \left\{ W_1(z) + is_j W_3(z) + t_j W_4(z) \right\}, \quad j = 1, 2. \quad (7)$$

Розглянемо ще одну комбінацію електромеханічних величин, яка впливає з (4):

$$\begin{aligned} & \sigma_{13}^{(1)} + kE_1^{(1)} = \\ & = i(s_{11} + ks_{14})(W_1^+ + W_1^-) + (s_{13} - ks_{34})(W_3^+ - W_3^-) + i(s_{14} + ks_{44})(W_4^+ + W_4^-), \end{aligned}$$

де  $k$  – дійсне.

Обираючи  $k = s_{13}/s_{34}$  і позначаючи

$$C_1 = s_{11} + \frac{s_{13}}{s_{34}}s_{14}, \quad C_2 = s_{14} + \frac{s_{13}}{s_{34}}s_{44},$$

одержуємо

$$\sigma_{13}^{(1)} + kE_1^{(1)} = i \left\{ F^+(x_1) + F^-(x_1) \right\}, \quad (8)$$

де

$$F(z) = C_1 W_1(z) + C_2 W_4(z). \quad (9)$$

Таким чином на основі (7), (9) ми приходимо до системи відносно компонент  $W_1, W_3, W_4$ :

$$\begin{cases} F_1 = W_1 + is_1 W_3 + t_1 W_4, \\ F_2 = W_1 + is_2 W_3 + t_2 W_4, \\ F = C_1 W_1 + C_2 W_4. \end{cases}$$

На основі рівнянь (2), (6), (7) та (2), (8), (9) справедливі наступні співвідношення:

$$\begin{cases} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + i \left[ m_j \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) + n_j E_1^{(1)}(x_1, 0) \right] = F_j^+(x_1) + g_j F_j^-(x_1), \\ d_{1j} \left\{ \left[ \left[ u_1'(x_1) \right] \right] + is_j \left[ \left[ u_3'(x_1) \right] \right] + t_j \left[ \left[ D_3 \right] \right] \right\} = F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1), \end{cases} \quad j=1, 2 \quad (10)$$

та

$$\begin{cases} -i \left[ \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) + k E_1^{(1)}(x_1, 0) \right] = F^+(x_1) + F^-(x_1), \\ C_1 \left[ \left[ u_1'(x_1) \right] \right] + C_2 \left[ \left[ D_3 \right] \right] = F^+(x_1) - F^-(x_1). \end{cases} \quad (11)$$

Задовольняючи за допомогою перших співвідношень (10) та (11) граничним умовам (1) приходимо до наступних задач лінійного спряження

$$F_j^+(x_1) + g_j F_j^-(x_1) = 0, \quad j=1, 2 \quad \text{для } |x_1| < a, \quad (12)$$

$$F^+(x_1) + F^-(x_1) = 0 \quad \text{для } |x_1| < a. \quad (13)$$

Умови на нескінченості та додаткові умови для цих задач формулюються наступним чином. Враховуючи, що для  $x_1 \notin (-a; a) \Rightarrow F_j^+ = F_j^- = F_j(x_1)$ ,  $F^+ = F^- = F(x_1)$ , перші рівняння з (10) та (11) приймають вигляд

$$\begin{cases} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + i \left[ m_j \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) + n_j E_1^{(1)}(x_1, 0) \right] = (1 + g_j) F_j(x_1), \\ -i \left[ \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) + k E_1^{(1)}(x_1, 0) \right] = 2F(x_1). \end{cases} \quad j=1, 2, \quad (14)$$

Беручи до уваги, що функції  $F_j(z)$  та  $F(z)$  аналітичні крім  $x_1 \in (-a; a)$ , та використовуючи задані граничні умови на нескінченності, можемо записати:

$$F_j(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \tilde{\sigma}_j - i \tilde{\tau}_j, \quad (15)$$

де  $\tilde{\sigma}_j = \frac{\sigma}{\theta_j}$ ;  $\tilde{\tau}_j = -\frac{1}{\theta_j}(m_j\tau + n_j e)$ ;  $\theta_j = 1 + g_j$ ,  $j = 1, 2$

та

$$F(z)|_{z \rightarrow \infty} = \frac{\tau + ke}{2}. \quad (16)$$

З других рівнянь (10) та (11) з урахуванням однозначності зміщень при обході контуру тріщини, співпадаючого з берегами тріщини, та теореми Гауса

$$\int_{-a}^a [[D_3(x_1)]] dx_1 = D_0$$

отримуємо:

$$\int_{-a}^a \{F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1)\} dx_1 = t_j D_0, \quad (17)$$

$$\int_{-a}^a \{F^+(x_1) - F^-(x_1)\} dx_1 = C_2 D_0. \quad (18)$$

Розв'язки задач лінійного спряження (12) та (13) розшукуємо у вигляді [4]:

$$F_j(z) = \frac{c_{0j} + c_{1j}z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \left( \frac{z+a}{z-a} \right)^{i\varepsilon_j}, \quad j = 1, 2, \quad (19)$$

$$F(z) = \frac{c_0 + c_1 z}{\sqrt{z^2 - a^2}}, \quad (20)$$

де

$$\varepsilon_j = \frac{\ln(g_j)}{2\pi}.$$

Комплексні константи  $c_{0j}$ ,  $c_{1j}$ , в (19) та  $c_0$ ,  $c_1$ , в (20) визначаються з умов на нескінченності (15) та (16), а також з умов (17) та (18). При цьому показано [7], що умови (17) та (18) буде виконано, якщо коефіцієнт при  $z^{-1}$  в розкладанні  $F_j(z)$  та  $F(z)$  на нескінченності дорівнює  $it_j D_0 / (2\pi)$  та  $iC_2 D_0 / (2\pi)$  відповідно. Після розкладання  $F_j(z)$  та  $F(z)$  на нескінченності та використання умов на нескінченності (15) та (16), знаходимо:

$$F_j(z) = i \frac{t_j D_0}{2\pi} \chi_j(z) + (z - i2a\varepsilon_j)(\tilde{\sigma}_j - i\tilde{\tau}_j) \chi_j(z), \quad j = 1, 2,$$

$$F(z) = \frac{-\frac{1}{\pi} C_2 D_0 + i(\tau + ke)z}{2\sqrt{a^2 - z^2}},$$

де  $\chi_j(z) = (z+a)^{\frac{1}{2}+i\varepsilon_j} (z-a)^{\frac{1}{2}-i\varepsilon_j}$ .

**Знаходження електромеханічних факторів на інтерфейсі.** З першого рівняння (14) одержуємо наступну формулу для  $\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)$

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) = (1 + g_1) \operatorname{Re}\{F_1(x_1)\}. \quad (21)$$

Уявна частина системи рівнянь (14) формує СЛАР для визначення  $\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0)$  та  $E_1^{(1)}(x_1, 0)$

$$\begin{cases} m_1 \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) + n_1 E_1^{(1)}(x_1, 0) = \operatorname{Im}\{(1 + g_1)F_1^+(x_1)\}, \\ \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) + kE_1^{(1)}(x_1, 0) = -2 \operatorname{Im}\{F(x_1)\}, \end{cases}$$

з якої одержуємо:

$$E_1(x_1, 0) = \frac{(1 + g_1) \operatorname{Im}\{F_1(x_1)\} + 2m_1 \operatorname{Im}\{F(x_1)\}}{n_1 - m_1 k}, \quad (22)$$

$$\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \frac{-2n_1 \operatorname{Im}\{F(x_1)\} - k(1 + g_1) \operatorname{Im}\{F_1(x_1)\}}{n_1 - m_1 k}. \quad (23)$$

На основі других рівнянь (10), (11) та формул (12), (13) на  $x_1 \in (-a; a)$  маємо

$$\begin{cases} [[u'_1(x_1)]] + is_1 [[u'_3(x_1)]] + t_1 [[D_3]] = \frac{g_1 + 1}{g_1} F_1(x_1), \\ C_1 [[u'_1(x_1)]] + C_2 [[D_3]] = 2F(x_1). \end{cases} \quad (24)$$

З першого рівняння (24) похідна розкриття тріщини буде мати вид

$$[[u'_3(x_1)]] = \frac{g_1 + 1}{s_1 g_1} \operatorname{Im}\{F_1(x_1)\}, \quad (25)$$

тобто розкриття тріщини на основі (25) записується у формі

$$[[u_3(x_1)]] = \frac{g_1 + 1}{s_1 g_1} \int_{-a}^{x_1} \operatorname{Im}\{F_1(x_1)\} dx_1. \quad (26)$$

Зокрема, при  $D_0 = 0$  формула (26) приймає вигляд

$$[[u_3(x_1)]] = \frac{g_1 + 1}{s_1 \sqrt{g_1}} \left( \tilde{\tau}_1 \sin \left( \varepsilon_1 \ln \left( \frac{a + x_1}{a - x_1} \right) \right) + \tilde{\sigma}_1 \cos \left( \varepsilon_1 \ln \left( \frac{a + x_1}{a - x_1} \right) \right) \right) \sqrt{a^2 - x_1^2}. \quad (27)$$

Дійсні частини системи рівнянь (24) формують СЛАР для визначення  $[[u'_1(x_1)]]$  та  $[[D_3(x_1)]]$

$$\begin{cases} [[u'_1(x_1)]] + t_1 [[D_3]] = \operatorname{Re} \left\{ \frac{g_1 + 1}{g_1} F_1(x_1) \right\}, \\ C_1 [[u'_1(x_1)]] + C_2 [[D_3]] = 2 \operatorname{Re} \{ F(x_1) \}. \end{cases}$$

З цієї системи отримуємо

$$[[D_3(x_1)]] = \frac{C_1 \operatorname{Re} \left\{ \frac{g_1 + 1}{g_1} F_1(x_1) \right\} - 2 \operatorname{Re} \{ F(x_1) \}}{t_1 C_1 - C_2}. \quad (28)$$

Тобто всі шукані компоненти  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{33}$ ,  $E_1$  вздовж інтерфейсу визначені відповідно в (23), (21), (22), стрибок компоненти  $D_3$  в (28), а також розкриття  $[[u_3]]$  тріщини в (26) знайдені в області тріщини.

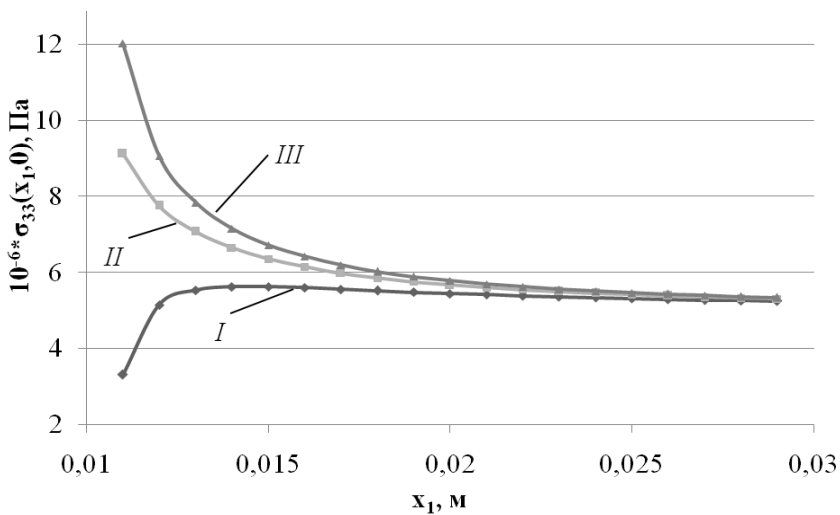
**Візуалізація результатів.** Виберемо матеріали PZT-4 (верхній матеріал) та PZT-5H (нижній). В табл. 1 наведені матриці матеріалів PZT-4 та PZT-5H (пружних, п'єзоелектричних, діелектричних властивостей відповідно) у випадку, коли вісь поляризації співпадає з додатнім напрямом  $x_3$ .

Таблиця 1 – Характеристики п'єзокерамік

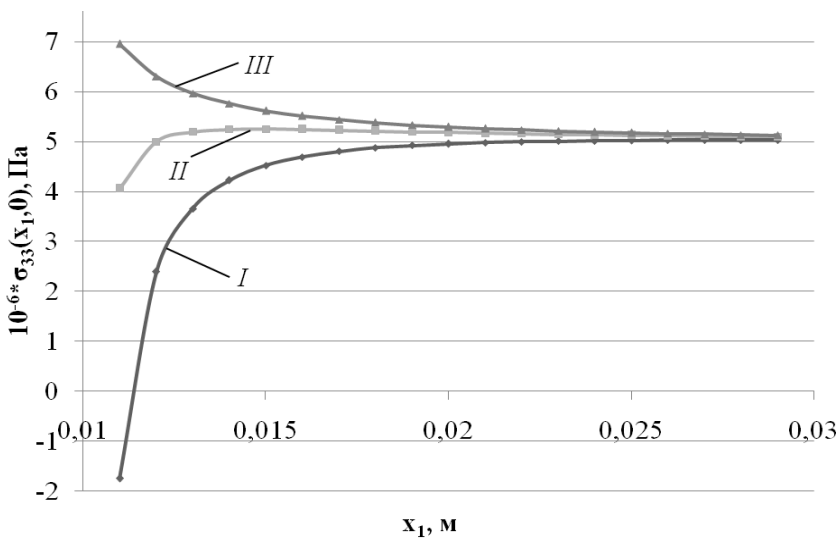
Матеріал	$c_{11}$	$c_{33}$	$c_{13}$	$c_{44}$	$e_{31}$ ,	$e_{15}$ ,	$e_{33}$ ,	$\varepsilon_{11}$	$\varepsilon_{33}$
	$\times 10^{-10}$ , Па				Кл/м <sup>2</sup>			$\times 10^{10}$ , Ф/м	
PZT-4	13.9	11.3	7.43	2.56	-6.98	13.4	13.8	60.0	54.7
PZT-5H	12.6	11.7	5.30	3.53	-6.50	17.0	23.3	151	130

Для розрахунків вибирались  $a = 0,01$  м,  $\sigma = 0,5 \times 10^7$  Па,  $\tau = 0$  Па, а величини  $D_0$  і  $e$  варіювались. Відповідні результати розрахунків для різних  $D_0$  і  $e$  показані на рис. 2–6.



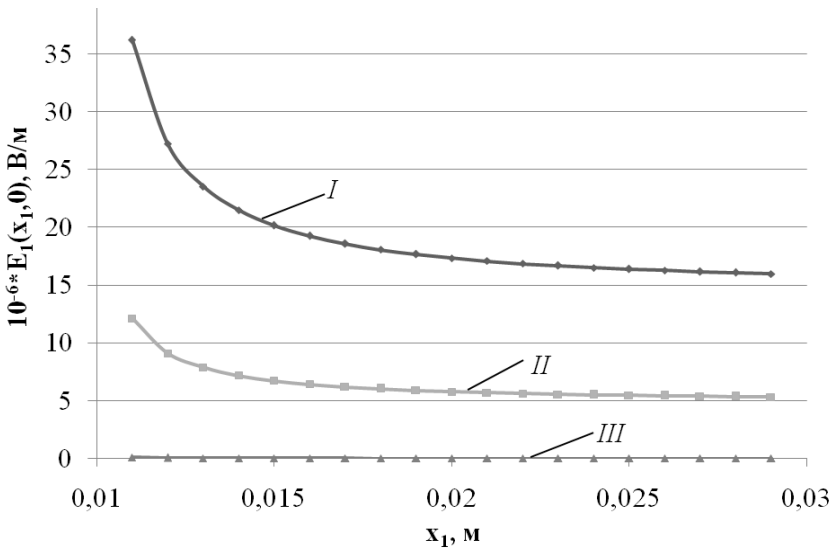


а)

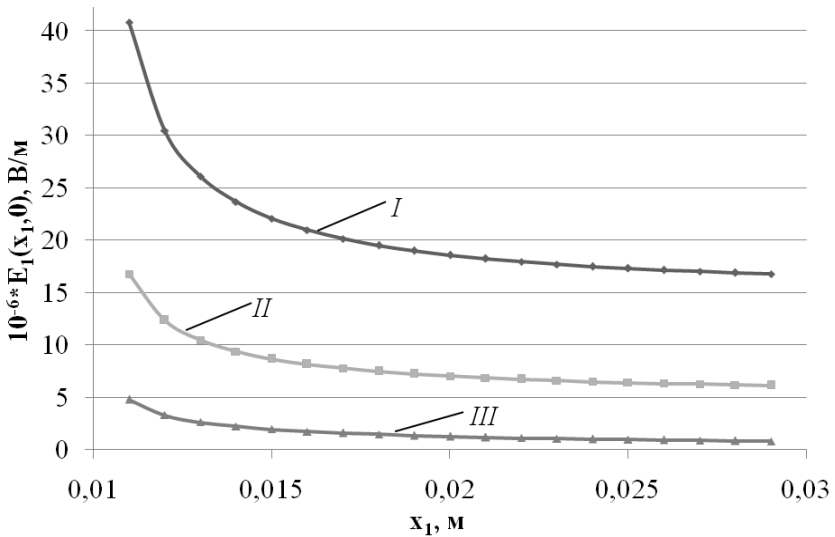


б)

Рис. 2 – Розподіл  $\sigma_{33}(x_1, 0)$  по інтерфейсу на продовжені тріщини при  $\sigma = 0,5 \times 10^7$  Па : а) для  $D_0 = 0$  ; б) для  $D_0 = -0.002$  Кл/м<sup>2</sup> (I – для  $e = 1,5 \times 10^7$  В/м, II –  $e = 0,5 \times 10^7$  В/м, III –  $e = 0$  В/м)

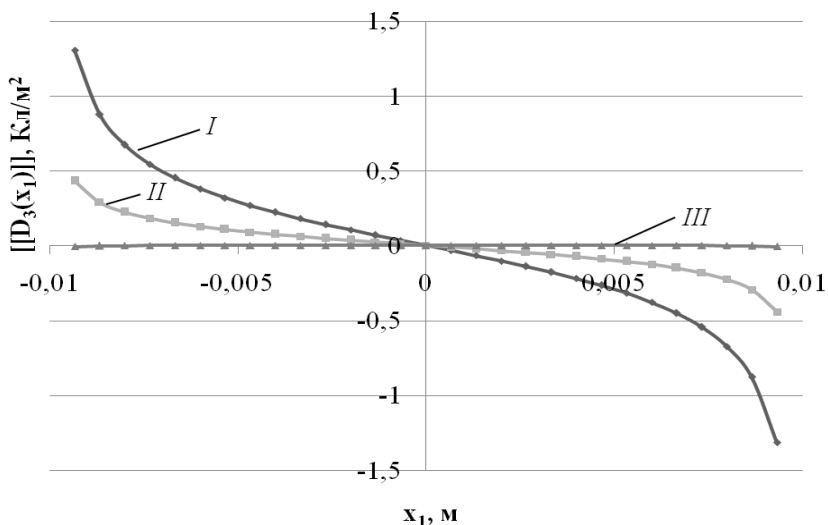


а)

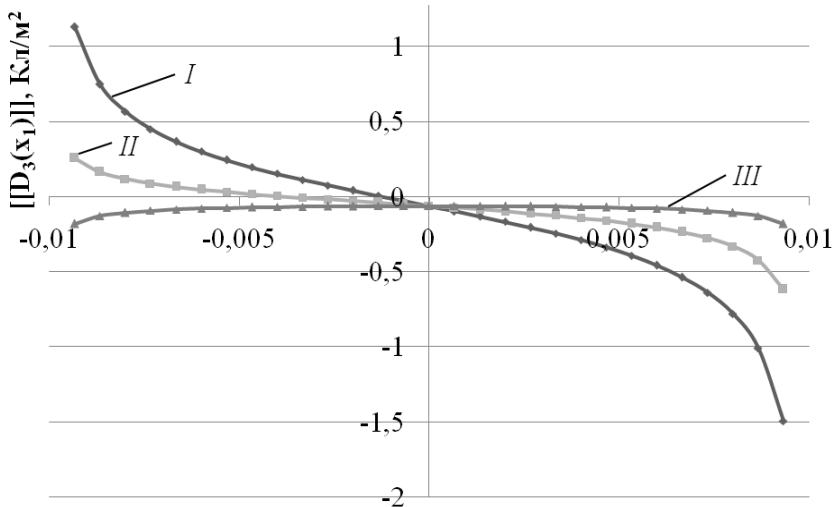


б)

Рис. 3 – Розподіл  $E_1(x_1, 0)$  по інтерфейсу на продовжені тріщини при  $\sigma = 0,5 \times 10^7$  Па : а) для  $D_0 = 0$ ; б) для  $D_0 = -0.002$  Кл/м<sup>2</sup> (I – для  $e = 1,5 \times 10^7$  В/м, II –  $e = 0,5 \times 10^7$  В/м, III –  $e = 0$  В/м)



а)

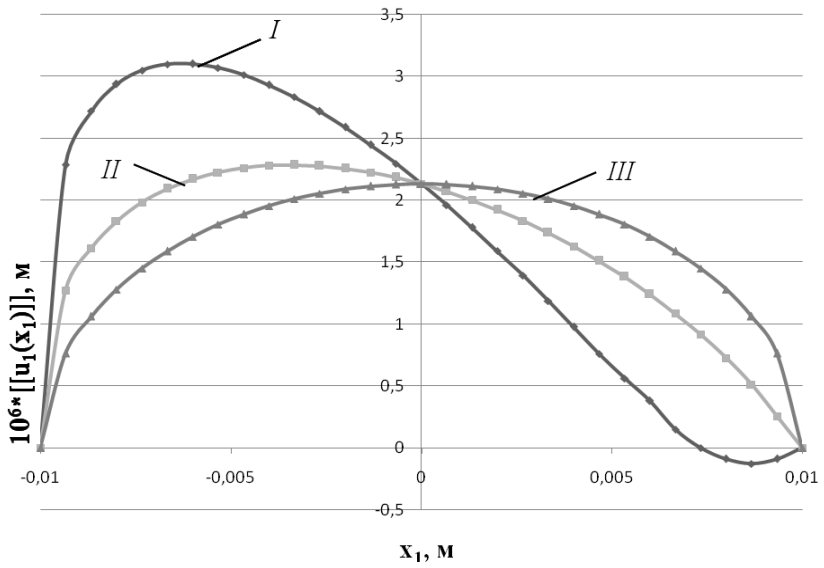


б)

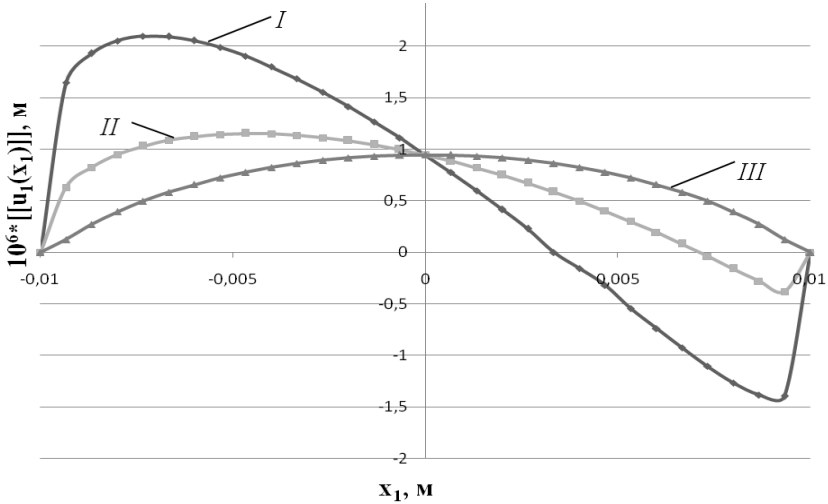
Рис. 4 – Розподіл  $[[D_3(x_1, 0)]]$  вздовж тріщини при  $\sigma = 0,5 \times 10^7$  Па :

а) для  $D_0 = 0$  ; б) для  $D_0 = -0,002$  Кл/м<sup>2</sup>

(I – для  $e = 1,5 \times 10^7$  В/м, II –  $e = 0,5 \times 10^7$  В/м, III –  $e = 0$  В/м)



а)



б)

Рис. 5 – Розподіл  $[[u_3(x_1, 0)]]$  вздовж тріщини при  $\sigma = 0,5 \times 10^7$  Па :

а) для  $D_0 = 0$  ; б) для  $D_0 = -0.002$  Кл/м

(I – для  $e = 1,5 \times 10^7$  В/м, II –  $e = 0,5 \times 10^7$  В/м, III –  $e = 0$  В/м)

**Висновки.** В роботі розглянута задача для тріщини між двома п'єзоелектричними матеріалами під дією віддаленого електромеханічного навантаження. Тріщина вважалася електродованою, тобто її береги розглядалися як електричнопровідні. На тріщині крім того був заданий сумарний заряд, а також задавалось електромеханічне навантаження на нескінченності.

З застосуванням аналітичного підходу, що базується на представленні електромеханічних факторів через кусково-аналітичні функції, було отримано точний розв'язок цієї задачі у виді досить простих аналітичних формул. Тобто були знайдені компоненти напружень  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{33}$  та електричного поля  $E_1$  вздовж інтерфейсу, стрибок компоненти  $D_3$  на включенні, а також розкриття  $[[u_3]]$  тріщини.

З аналітичного аналізу результатів та візуалізації даних видно виникнення осцилюючої особливості шуканих факторів в вершинах тріщини. Ця особливість може призводити до фізично нереального взаємного проникнення берегів тріщини. Для більшості варіантів електромеханічних полів зони проникнення є дуже малими і їх можна не враховувати, а для деяких видів навантаження вони є значними, і саме в таких випадках слід використовувати інші моделі тріщини. Цікаво також відзначити, що інтенсивність електричного поля і навіть величина сумарного заряду на тріщині досить суттєво впливає на електромеханічні поля в околі тріщини та на її розкриття.

## БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Гринченко В. Т.** Механика связанных полей в элементах конструкций, Т. 5, Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с.
2. **Калоеров С. А.** Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для много-связных областей / С. А. Калоеров, А. И. Баева, О. И. Бороненко – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 268 с.
3. **Кныш П. Ю.** Аналитическое и численное исследование электродированной трещины в пьезоэлектрическом материале / П. Ю. Кныш, В. В. Лобода // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка. – 2012. – С. 1–15.
4. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили – М.: Наука, 1966. – 707 с.
5. **Партон В. З.** Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
6. **Смайт В.** Электростатика и электродинамика / В. Смайт – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1954. – 606 с.
7. **Веот Н. G.** Conducting cracks in dissimilar piezoelectric media / Н. G. Beom, S. N. Atluri // International Journal of Fracture. – 2002. – Vol. 118. – P. 285–301.

8. **Govorukha V. B.** On the influence of the electric permeability on an interface crack in a piezoelectric bimaterial compound / V.B. Govorukha, V. V. Loboda, M. Kamlah // Int. J. Solids and Structures. – 2006. – Vol. 43. – P. 1979–1990.

9. **Herrmann K. P.** An interface crack with contact zones in a piezoelectric/piezomagnetic biomaterial / K. P. Herrmann, V. V. Loboda, T. V. Khodanen // Archive of Applied Mechanics. – 2010. – Vol. 80, Is. 6 – P. 651–70.

10. **Suo Z** Fracture mechanics for piezoelectric ceramics / Z. Suo, C. M. Kuo, D. M. Barnett, J. R. Willis // Journal of Mechanics and Physics of Solids – 1992. – Vol. 40. – P. 739–765.

*А. А. Гриневич, Кныш П. Ю., В. В. Лобода, д-р физ.-мат. наук*

### **АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОДИРОВАННОЙ ТРЕЩИНЫ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ БИМАТЕРИАЛЕ**

Предлагается точный аналитический подход к исследованию плоской деформации пьезоэлектрического биматериала с электродированной трещиной на границе раздела его компонент. Считается, что на бесконечности заданы поля напряжений и электрическое поле, параллельное к берегам трещины. Получены достаточно простые формулы для электромеханических факторов в окрестности трещины и приведена их графическая иллюстрация.

*Ключевые слова:* пьезоэлектрический биматериал, электродированная трещина, задача линейного сопряжения.

*A. A. Grynevych, P. Y. Knysh, V. V. Loboda, Dr. Sci. (Phys.-Math.)*

### **ANALYTICAL INVESTIGATION OF AN ELECTRODED CRACK IN A PIEZOELECTRIC BIMATERIAL**

Exact analytical approach for plane strain investigation of piezoelectric bimaterial with an electroded crack at the interface is proposed. It is assumed that the stress fields and electric field, which parallel to the crack faces, are given at the infinity. Fairly simple formulas for electromechanical factors in the vicinity of the crack were obtained and their graphic illustration is presented.

*Keywords:* piezoelectric bimaterial, electroded crack, a problem of linear relationship.

The crack on the inner edge of an electrode, which lies in an interface between the two materials, in some cases, is the cause of failure of multilayers. Therefore, the study of such cracks is important to practice.

Basics of fracture mechanics of piezoelectric materials were developed in monographs [1, 2, 5], and some problems for crack without electrodes between two piezoelectric materials were considered in [8–10]. The electroded crack in a homogeneous piezoelectric material was studied in [3] and crack with electro permeable faces at the interface of two piezoelectric materials was considered in [7]. It should be noted that in the

last work electrical loading is examined as perpendicular to the crack faces, so the problems associated with the possible interpenetration of crack faces and their contacts were not considered.

In this paper, the electroded crack between two piezoelectric materials under mechanical stress and parallel to the crack faces electric flux is studied. The crack is considered as electroded and its faces were assumed to be electrically conducting. Total charge was given at the crack and also the boundary conditions were prescribed at infinity.

With use of an analytical approach, based on the reported representation of the electromechanical factors through piecewise analytical functions the exact solutions of this problem were obtained in the form of relatively simple analytical formulas. Stress components  $\sigma_{13}, \sigma_{33}$  were found in the form:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) = (1 + g_1) \operatorname{Re}\{F_1(x_1)\},$$

$$\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \frac{-2n_1 \operatorname{Im}\{F(x_1)\} - k(1 + g_1) \operatorname{Im}\{F_1(x_1)\}}{n_1 - m_1 k}.$$

and the electric field was obtained along the interface:

$$E_1(x_1, 0) = \frac{(1 + g_1) \operatorname{Im}\{F_1(x_1)\} + 2m_1 \operatorname{Im}\{F(x_1)\}}{n_1 - m_1 k}.$$

The jump of component  $D_3$  on the crack and the crack opening were found as:

$$[[D_3(x_1)]] = \frac{C_1 \operatorname{Re}\left\{\frac{g_1 + 1}{g_1} F_1(x_1)\right\} - 2 \operatorname{Re}\{F(x_1)\}}{t_1 C_1 - C_2},$$

$$[[u_3(x_1)]] = \frac{g_1 + 1}{s_1 g_1} \int_{-a}^{x_1} \operatorname{Im}\{F_1(x_1)\} dx_1.$$

The analytical expressions for the functions  $F_1(x_1)$  and  $F(x_1)$  are found as well.

The emergence of oscillating singularity at the crack tip can be seen from the analytical results and illustrations. This feature can lead to physically unrealistic interpenetration of the crack faces. Zones of oscillation are very small for most values of electromechanical fields and can be ignored.

However, mentioned zones can be significant for some types of loading and therefore in such cases other models of the cracks should be used. It is also interesting to note that the intensity of the electric field as well as the value of the total charge on the crack strongly affects electromechanical fields in the vicinity of the crack and its opening.

With use of the implemented algorithms the behavior of the stresses and the crack opening for different types of boundary conditions at infinity and on the crack faces can be studied.

## REFERENCES

1. **Grinchenko B. T.** Mechanics of coupled fields in the elements of constructions, Vol. 5, Electroelasticity / B. T. Grinchenko, A. F. Ulitko, N. A. Shulga – K. : Nauk. dumka, 1989. – 280 p. (in Russian).
2. **Kaloerov S. A.** Two-dimensional electro- and magnetoelasticity problems for a multiply connected bodies / S. A. Kaloerov, A. И. Baeva, O. I. Boronenko – Donetsk: Yugo-Vostok, 2007. – 268 p. (in Russian).
3. **Knysch P. Y.** Analytical and numerical investigation of electroded crack in piezoelectric material / P. Y. Knish, V. V. Loboda // Vesn. Dnipropetr. Univ. Ser. Mechanics. – 2012. – P. 1–15 (in Russian).
4. **Muskhelisvili N. I.** Some basic problems in mathematical theory of elasticity / N. I. Muskhelishvili – M. : Nauka, 1966. – 707 p. (in Russian).
5. **Parton V. Z.** Electromagnetoelasticity of piezoelectric and electrically conducting bodies / V. Z. Parton, B. A. Kudryavtsev – M. : Nauka, 1988. – 472 p. (in Russian).
6. **Smythe W.** Electrostatic and electrodynamic / Smythe W. – M. : Publ. of international literatures, 1954. – 606 p. (in Russian).
7. **Beom H. G.** Conducting cracks in dissimilar piezoelectric media / H. G. Beom, S. N. Atluri // International Journal of Fracture. – 2002. – Vol. 118. – P. 285–301.
8. **Govorukha V.B.** On the influence of the electric permeability on an interface crack in a piezoelectric bimaterial compound / V. B. Govorukha, V. V. Loboda, M. Kamlah // Int. J. Solids and Structures. – 2006. – Vol. 43. – P. 1979–1990.
9. **Herrmann K. P.** An interface crack with contact zones in a piezoelectric/piezomagnetic biomaterial / K. P. Herrmann, V. V. Loboda, T. V. Khodanen // Archive of Applied Mechanics. – 2010. – Vol. 80, Is. 6 – P. 651–670.
10. **Suo Z.** Fracture mechanics for piezoelectric ceramics / Z. Suo, C. M. Kuo, D. M. Barnett, J. R. Willis // Journal of Mechanics and Physics of Solids. – 1992. – Vol. 40. – P. 739–765.

*Дніпропетровський національний  
університет ім. Олеся Гончара,  
Дніпропетровськ, Україна*

*Надійшла до редколегії 10.11.2013*