

УДК 539.3

*Н. И. Ободан, д-р тех. наук, Н. А. Гук, д-р физ.-мат. наук,
Н. Л. Козакова*

НЕЛИНЕЙНОЕ ПОВЕДЕНИЕ СЛОЯ, ЛЕЖАЩЕГО НА УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Изучено нелинейное поведение упругого слоя, постепенно нагружаемого распределенной поверхностной нагрузкой. Проведен численный анализ напряженно-деформированного состояния для различных вариантов соотношений физических характеристик покрытия и полупространства в зависимости от силы трения и удельного веса слоев.

Ключевые слова: плоская контактная задача, упругое полупространство, покрытие, напряжение, перемещение, трение, удельный вес.

Введение. Исследование поведения двух- и многослойных систем при нормальном нагружении широко представлены в литературе [3, 10, 12]. Рассматривались различные постановки задач, а именно: полный нормальный контакт слоев при наличии сил трения, таких что контактное напряжение подчиняется закону Кулона [10], а также при существовании зон сцепления и зон проскальзывания [15]; наличие зон отсутствия нормального контакта при сцеплении слоев [2], контактное взаимодействие тел с выемкой, моделирующей локальное отслоение с учетом проскальзывания, возникающего вблизи выемок [4, 7, 8, 14].

Таким образом, задача о поведении двухслойной системы рассматривалась для двух случаев – деформирование при полном нормальном контакте и деформирование при наличии отслоения без учета веса конструкции. Модель такого поведения вне зависимости от уровня нагрузки рассмотрена в [4, 7, 8, 14].

Необходимо отметить, что при учете веса такое состояние наступает не сразу, а при определенном значении нормальной нагрузки.

Методы, используемые при решении указанных задач, базируются на методах рекуррентных соотношений [11], на интегральных преобразованиях [2].

В настоящее время широко используются численные методы – метод конечных элементов, метод граничных элементов [5, 6, 9]. Эти методы, являясь приближенными, между тем, позволяют строить решения для более сложных моделей поведения, близкого к реальному.

В данной работе, использующей метод конечных элементов в сочетании со специальными алгоритмами, исследуется поведение двухслойной системы с учетом возможности появления зон проскальзывания и зон отрыва в процессе деформирования.

Постановка задачи. Рассматривается упругий слой толщиной H , лежащий на упругом основании и нагруженный распределенной поверхностной нагрузкой q на участке $-a \leq x_1 \leq a$.

Разрешающая система уравнений плоской теории упругости на областях $\Omega_i = \{x | x = \{x_1, x_2, x_3\} \in R^3, i = 1, 2, 3\}$ при $-\infty \leq x_3 \leq \infty$ для слоя $-\infty \leq x_1 \leq \infty$, $0 \leq x_2 \leq H$ с гладкой границей контакта с основанием $-\infty \leq x_1 \leq \infty$, $-h \leq x_2 \leq 0$, $h/H \gg 1$, имеет вид

$$(\lambda_k + \mu_k) \text{grad div } u^k + \mu_k \Delta u^k + \tilde{q} = 0 \quad (1)$$

где $u^k = \{u_1^k, u_2^k\}^T$ – вектор перемещений k -го слоя; E_k, ν_k – модуль упругости и коэффициент Пуассона ($k = \overline{1, 2}$) соответственно для слоя ($k = 1$) и основания ($k = 2$); \tilde{q} – нагрузка, включающая собственный вес; $\lambda_k = E_k \frac{\nu_k}{(1 + \nu_k)(1 - 2\nu_k)}$, $\mu_k = \frac{E_k}{2(1 + \nu_k)}$ – коэффициенты Ляме.

На верхней границе Γ_b ($x_2 = H$) упругого слоя выполняются условия

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^{(1)}(u) &= q, \quad -a \leq x_1 \leq a, \\ \sigma_{22}^{(1)}(u) &= 0, \quad -\infty \leq x_1 \leq -a, \quad a \leq x_1 \leq \infty, \\ \sigma_{12}^{(1)}(u) &= 0, \quad -\infty \leq x_1 \leq \infty, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\sigma_{ij}^{(k)}(u)$, $i, j = 1, 2$ – напряжения, выраженные через перемещения.

На границе раздела слоя и основания ($x_2 = 0$) в зоне контакта Γ имеют место граничные условия

$$\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)}, \quad u_2^{(k)} \leq 0, \quad \sigma_{22}^{(k)} \leq 0, \quad u_2^{(k)} \cdot \sigma_{22}^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (3)$$

Предполагается, что существуют границы $\Gamma_C, \Gamma_{II}, \Gamma_O$, соответствующие зоне сцепления, проскальзывания и отрыва соответственно, такие что $\Gamma_C \cup \Gamma_{II} \cup \Gamma_O = \Gamma$, $\Gamma_C \cap \Gamma_{II} \cap \Gamma_O = \emptyset$.

В зоне сцепления $x_1 \in \Gamma_C$ выполняются условия

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} &= u_1^{(2)}, \quad u_2^{(1)} = u_2^{(2)}, \\ \left| \sigma_{12}^{(1)} \right| &\leq K \left| \sigma_{22}^{(1)} \right|, \quad \left| \sigma_{12}^{(2)} \right| \leq K \left| \sigma_{22}^{(2)} \right|, \end{aligned} \quad (4)$$

где K – коэффициент трения.

В зоне проскальзывания для всех $x_1 \in \Gamma_{\Pi}$

$$u_2^{(1)}(x_1 + u_1^{(1)}) = u_2^{(2)}(x_1 + u_1^{(2)}); |\sigma_{12}| - K|\sigma_{22}^k| \geq 0; u_1^{(1)} \neq u_1^{(2)}. \quad (5)$$

В зоне отрыва для всех $x_1 \in \Gamma_O$

$$\sigma_{22}^{(k)} = 0, \sigma_{12}^{(k)} = 0. \quad (6)$$

Здесь $\sigma_{ij}^{(k)}, u_i^{(k)}, i, j = 1, 2$ – компоненты тензора напряжений и перемещений в слое ($k=1$) и основании ($k=2$).

Далее предполагается, что при значениях нагрузки $0 \leq q \leq q_{кр}$ слой контактирует с полупространством путем полного сцепления или, при возможности проскальзывания, возникновение зон отрыва происходит при нагрузке $q = q_{кр}$ с дальнейшим развитием этих зон $q > q_{кр}$.

Метод решения. Для описания неизвестных участков границ введем характеристические функции для точек границ $\Gamma_C, \Gamma_{\Pi}, \Gamma_O$ в виде

$$\gamma_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\sigma_{12}| \geq K|\sigma_{22}|, x \in \Gamma_{\Pi}, \\ 0 & \text{при } |\sigma_{12}| < K|\sigma_{22}|, x \in \Gamma_C; \end{cases} \quad (7)$$

$$\gamma_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } \sigma_{22} < 0, x \notin \Gamma_O, \\ 1 & \text{при } \sigma_{22} \geq 0, x \in \Gamma_O. \end{cases}$$

С учетом соотношения (7) вариационная постановка краевой задачи (1) – (6) при предварительном выполнении условия (4) будет иметь вид [1]

$$W = \arg \min_{W \in \tilde{W}} \mathcal{D}(u, u^*), \quad (8)$$

где $u = \{u^k\}^T, k = 1, 2, W = \{u, u^*\}^T$,

$$\mathcal{D}(u, u) = \sum_{k=1}^2 \left\{ \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} C_{ijlm}^k \varepsilon_{ij}^k(u) \varepsilon_{lm}^k(u) + q u_2^{(1)} \right] d\Omega + \right. \\ \left. + \int_{\Gamma} \left[\gamma_1 K \sigma_{22}^k(u) u_1^k + \gamma_2 \left[\sigma_{22}^k(u) (u_2^k - u_{2k}^*) + \sigma_{12}^k(u) (u_1^k - u_{1k}^*) \right] \right] d\Gamma; \right. \quad (9)$$

$\varepsilon_{ij} = \partial u_i / \partial x_j, i, j, l, m = 1, 2; u_{ik}^*$ – варьируемые значения перемещений на линии контакта; $\sigma_{ij}^{(k)}, u^{(k)}$ – значения напряжений и перемещений в области Ω на ее границе.

Для построения решения задачи (8) осуществляется переход к дискретной модели с использованием конечноэлементной аппроксимации

[13]. Для этого в области Ω вводится сетка с узлами в точках с координатами X_s , $s = 1, N$, где $X_s = \{x_{1s}, x_{2s}\}$, тогда неизвестные функции $u(x)$, $\sigma_{ij}(x)$, $u^*(x)$ представляются в виде векторов, компонентами которых являются значения функций задачи в узлах сетки.

$$\begin{aligned} u &= \{u_i\}^T, \quad \sigma_{ij} = \{\sigma_{ijs}\}^T, \quad u^* = \{u_i^*\}, \quad u_i = \{u_{ik}\}, \quad u_{ik} = \{u_{iks}\}, \\ u_i^* &= \{u_{ik}^*\}^T, \quad u_{ik}^* = \{u_{iks}^*\}, \quad \gamma = \{\gamma_k\}^T, \quad \gamma_k = \{\gamma_{ks}\}^T, \\ i, j &= 1, 2, \quad s = \overline{1, N}, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (10)$$

Узлы, лежащие на границе Γ , нумеруются как $P = \{p_1, p_2, \dots, p_M\}$, число M выбирается путем численного эксперимента. Из элементов вектора P могут быть сформированы векторы

$$P^C = \{p_1^C, p_2^C, \dots, p_{\ell_1}^C\}, \quad P^\Pi = \{p_1^\Pi, p_2^\Pi, \dots, p_{l_2}^\Pi\}, \quad P^O = \{p_1^O, p_2^O, \dots, p_{l_3}^O\}, \quad (11)$$

которые определяют узлы сетки, соответствующие зонам сцепления, проскальзывания и отрыва путем вычисления значений γ_k в соответствии с условиями (7).

После подстановки конечноэлементной аппроксимации в функционал (9), интегрирования и выполнения процедуры (8), получим разрешающую систему уравнений N -го порядка

$$Qu = R, \quad (12)$$

эквивалентную условию $\partial \tilde{\mathcal{E}}^* / \partial u_{is} = 0$, ($i = \overline{1, 2}$, $s = \overline{1, N}$), $\tilde{\mathcal{E}}^*$ – значения функционала $\tilde{\mathcal{E}}$ после подстановки конечно элементной аппроксимации и выполнения процедуры интегрирования; Q – матрица жесткости, зависящая от значений векторов γ ; R – вектор, зависящий от u^* .

При построении матрицы жесткости учитывается, что

$$\sigma = Bu, \quad (13)$$

где $\sigma = \{\sigma_{ijs}, i, j = 1, 2, s = \overline{1, N}\}^T$; B – функциональная матрица коэффициентов, получаемая из физических и геометрических соотношений.

Для выполнения условия минимума $\tilde{\mathcal{E}}$ по u_{is}^* , $s = \overline{1, N}$ используется метод градиентного спуска

$$u^{*(n)} = u^{*(n-1)} - \alpha^{(n-1)} \sigma^{(n-1)}. \quad (14)$$

Здесь

$$\sigma^{(n-1)} = \left\{ \sigma_s^{(n-1)} \right\}^T, \quad \sigma_s^{(n-1)} = \left\{ \sigma_{12s}^{(n-1)} \sigma_{22s}^{(n-1)} \right\}^T, \quad s = \overline{1, N},$$

где n – номер итерации.

Коэффициент $\alpha^{(n)}$ – определяется методом половинного деления из условия

$$\alpha^{(n)} = \arg \min_{\alpha} \tilde{\mathcal{E}}\left(u^{*(n-1)}\right) \quad (15)$$

Значение функции γ_{ks} определяется в соответствии с условием (7).

Алгоритм.

0. Задать $t=1, n=1, \sigma_{22s} = q_s^*$ для $\forall X_s \in \Gamma_{\theta}, u_{is}^{*(1,1)} = 0, \gamma_k^{(1,1)} = 0, k=1, 2, \varepsilon > 0$ – малое число, $\alpha^{(1,1)}, \Delta q, q^*$.
1. На каждом шаге $q^{(n)} = q^{(n-1)} + \Delta q, q^{(n)} \leq q^*$.
2. Построить сетку с узлами $X_s, s = \overline{1, N}$.
3. Сформировать вектор неизвестных u с учетом условий $u_{1s}^{(1)} = u_{1s}^{(2)}, u_{2s}^{(1)} = u_{2s}^{(2)}$, для узлов X_s , таких что $X_s \in \Gamma$.
4. Сформировать систему уравнений (12).
5. Определить векторы $u^{(n,t)}, \sigma^{(n,t)}$.
6. Определить вектор $\gamma_{ks}^{(n,t)}, X_s \in \Gamma, k=1, 2$.
7. Если $\exists \gamma_{ks}^{(n,t)} \neq 0$, то переходим на шаг 8, иначе – на 1.
8. Определить $u_{is}^{*(n,t)}$ по формуле (14).
9. Определить номера узлов $P^{O(n,t)}, P^{\Pi(n,t)}, P^C(n,t)$ на основании значений вектора $\gamma_k^{(n,t)}$.
10. Создать узлы $P_i^{O(n,t)}, i=1, 2$, с соответствующими перемещениями $u_2^{(1)(n,t)} \neq u_2^{(2)(n,t)}$, и узлы $P_i^{\Pi(n,t)}, i=1, 2$ с соответствующими перемещениями $u_1^{(1)(n,t)} \neq u_1^{(2)(n,t)}$, сформировать вектор неизвестных u .
11. Определить $\alpha^{(n,t)}$ из условия (16), пока $\left\| u_{is}^{*(n,t)} - u_{is}^{*(n,t-1)} \right\| > \varepsilon$ перейти на шаг 4, иначе – на 1.

Результаты расчета. С помощью предложенного алгоритма был проведен анализ поведения слоя $H = 10 \text{ см}$, имеющего следующие характеристики: для первого варианта выбран удельный вес $\rho_1 = 2,72 \cdot 10^{-3} (\text{кг} / \text{см}^3)$, модуль Юнга $E_1 = 7,6 \cdot 10^2 \text{ кг} / \text{см}^2$ и коэффициент Пуассона $\nu_1 = 0,8$ (для относительно мягкого покрытия), а для второго – $\rho_2 = 2,76 \cdot 10^{-3} (\text{кг} / \text{см}^3)$, $E_1 = 7,6 \cdot 10^4 \text{ кг} / \text{см}^2$ и $\nu_1 = 0,41$ (для от-

носителем твердого покрытия). Основание описывалось следующими характеристиками: $E_2 = 7,6 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2$, $\nu_2 = 0,41$ - для первого варианта и $E_2 = 3,8 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2$, $\nu_2 = 0,35$ - для второго соответственно. Были введены безразмерные параметры: z_1/H и z_2/H - границы зон отрыва и $\chi = E_1/E_2$, который оказывает влияние на распределение безразмерных напряжений $\sigma_{11}^{(i)}H/q^*$, $\sigma_{22}^{(i)}H/q^*$, $\sigma_{12}^{(i)}H/q^*$ ($i=1,2$), где q^* - максимальная нагрузка, действующая на верхнюю границу слоя, и безразмерных перемещений $u_1^{(i)}/H$, $u_2^{(i)}/H$ в слое и основании.

Размеры моделируемого полубесконечного основания выбирались из условия затухания решения при полном сцеплении ($h=50 \text{ см}$, $L=150 \text{ см}$, $a=8 \text{ см}$ - зона распределенной поверхностной нагрузки). Решение задач (8) осуществлялось с помощью пакета прикладных программ «Cosmos» с автоматическим предварительным «слиянием» и «разъединением» узлов, соответствующим зонам сцепления, проскальзывания и отрыва. Использовался плоский конечный элемент. Слой и полупространство моделировались с помощью конечного размера $-L \leq x_1 \leq L$, который выбирался из условия затухания решения в аналогичной задаче со сцепленным слоем. Решение проводилось последовательно путем дробления размера конечного элемента до получения заданной точности. Расчеты выполнялись при действии нормальной к поверхности слоя нагрузки $0 \leq q \leq q^*$, ($q^* = 5 \text{ кг/см}$) в зависимости от параметров χ и K .

На рис. 1 представлена модель рассматриваемой системы, содержащая 1201 элемент и 1292 узла.

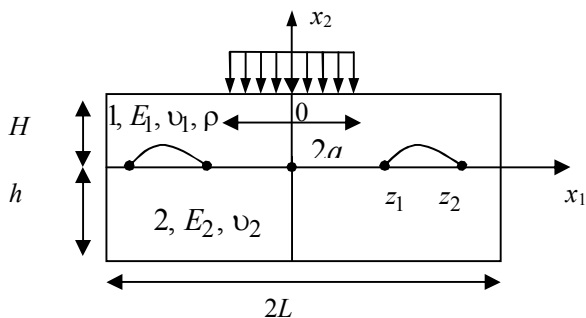


Рис. 1 – Схема нагружения двухслойного упругого основания

На рис. 2, 3 представлены функции

$$u(x_1) = (u_1^{(1)}(x_1) - u_1^{(2)}(x_1)) / H, \quad w(x_1) = (u_2^{(1)}(x_1) - u_2^{(2)}(x_1)) / H,$$

при различных значениях коэффициента трения K для относительно мягких ($\chi < 1$) и относительно твердых ($\chi > 1$) покрытий.

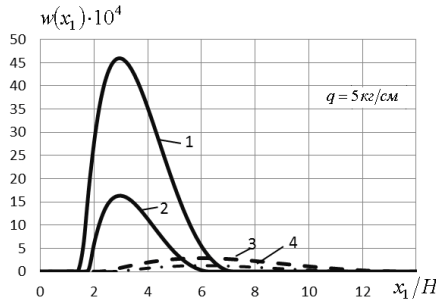


Рис. 2 – Относительное перемещение точек слоя и основания на границе раздела:

- 1 – при $K = 0, \chi = 0.01, \rho_1$; 2 – при $K = 0.3, \chi = 0.01, \rho_1$;
 3 – при $K = 0, \chi = 2, \rho_2$; 4 – при $K = 0.3, \chi = 2, \rho_2$.

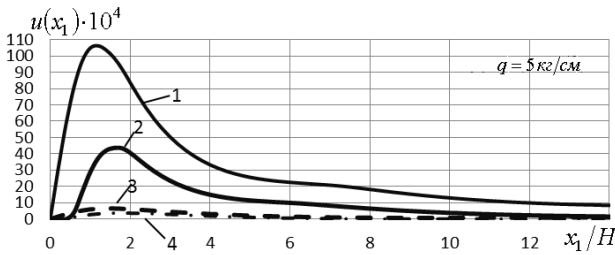


Рис. 3 – Относительное проскальзывание точек слоя и основания на границе раздела:

- 1 – при $K = 0, \chi = 0.01, \rho_1$; 2 – при $K = 0.3, \chi = 0.01, \rho_1$;
 3 – при $K = 0, \chi = 2, \rho_2$; 4 – при $K = 0.3, \chi = 2, \rho_2$.

На рис. 4 представлена зависимость координат зон отрыва от параметра K .

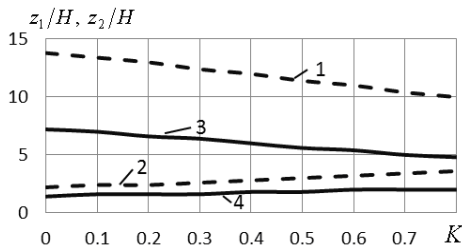


Рис. 4 – Зависимость зон контакта от параметра K :

- 1, 2 – значения z_1 / H и z_2 / H соответственно при $\chi = 2$;
 3, 4 – значения z_1 / H и z_2 / H соответственно при $\chi = 0.01$.

Результаты расчетов, представленные на рис. 2 – 4, позволяют сделать следующие выводы:

1) при деформировании двухслойной системы возникают на ряду с зонами сцепления (рис. 3, кривая 2) зоны проскальзывания, а также зоны отрыва (отслоения) (рис. 2);

2) при достаточно жестком верхнем слое явления проскальзывания и отрыва практически могут отсутствовать;

3) на относительные нормальные и тангенциальные перемещения рост коэффициента трения K и относительная жесткость слоя влияют по-разному – в первом случае они отличаются в разы, во втором – возможно и в десятки раз;

4) при отсутствии в модели учета веса значения $z_2 \rightarrow \infty$, z_1 – практически постоянны.

На рис. 5 – 7 приведены значения безразмерных напряжений $\tilde{\sigma}_{ij}^{(i)} = \left(\sigma_{ij}^{(i)} H / q^* \right) \cdot 10^{-1}$, $i, j = 1, 2$ по линии контакта в зависимости от жесткости слоя и значения коэффициента трения.

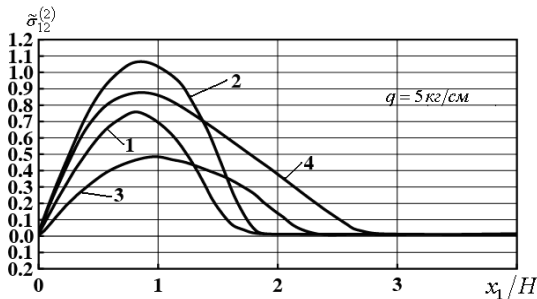


Рис. 5 – Функция $\tilde{\sigma}_{12}^{(2)}$ на верхней границе основания:

1 – при $K = 0, \chi = 0.01, \rho_1$; 2 – при $K = 0.3, \chi = 0.01, \rho_1$;

3 – при $K = 0, \chi = 2, \rho_2$; 4 – при $K = 0.3, \chi = 2, \rho_2$

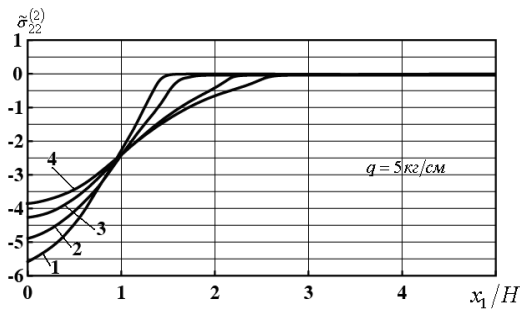


Рис. 6 – Функция $\tilde{\sigma}_{22}^{(2)}$ на верхней границе основания:

1 – при $K = 0, \chi = 0.01, \rho_1$; 2 – при $K = 0.3, \chi = 0.01, \rho_1$;

3 – при $K = 0, \chi = 2, \rho_2$; 4 – при $K = 0.3, \chi = 2, \rho_2$

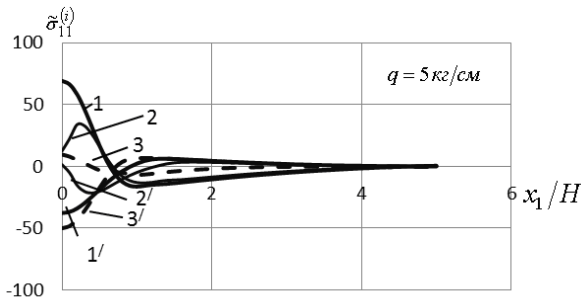


Рис. 7 – Функция $\bar{\sigma}_{11}^{(i)}$ на границе раздела:

1 и 1' – $\bar{\sigma}_{11}^{(1)}$ и $\bar{\sigma}_{11}^{(2)}$ при $k=0, \chi=2, \rho_2$; 2 и 2' – $\bar{\sigma}_{11}^{(1)}$ и $\bar{\sigma}_{11}^{(2)}$ при $k=0.3, \chi=2, \rho_2$;
3 и 3' – $\bar{\sigma}_{11}^{(1)}$ и $\bar{\sigma}_{11}^{(2)}$ при $k=0, \chi=0.01, \rho_1$

Анализ рис. 5 – 7 показывает, что значения напряжений существенно зависят от вида модели – наличия учета трения и отрыва, – и могут отличаться в несколько раз как в случае жестких, так и мягких верхних слоев.

На рис. 8 представлена зависимость размера зоны отслоения от нагрузки при различных значениях K и χ . Из рисунка видно, что значение $q_{кр}$, когда впервые выполняется условие $(z_2 - z_1)/H \neq 0$, является функцией этих параметров.

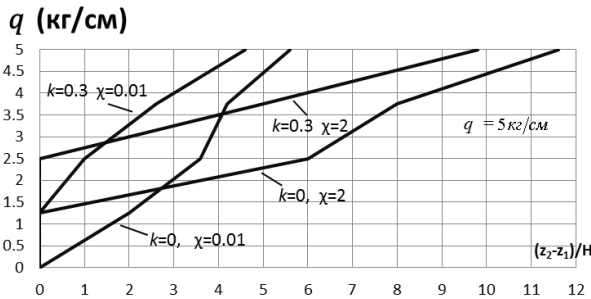


Рис. 8 – Зависимость относительной зоны отрыва от нагрузки

Выводы. Анализ поведения двухслойной системы показал, что при определенном соотношении значений толщины слоев и значениях действующих нагрузок возможно деформирование при наличии зон проскальзывания, нормального контакта и отрыва, причем существование указанного характера поведения зависит от параметров системы и может быть установлено при последовательном расчете с изменением значения нагрузки от нуля до конечной величины.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Абовский Н. П.** Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек / Н. П. Абовский., Н. П. Андреев, А. П. Деруга.– М.: Наука, 1978. – 288 с.

2. **Антоненко Н. М.** Плоска деформація смуги, яка лежить на пружній півплощині при наявності пружних зв'язків на їх спільній межі / Н. М. Антоненко, І. Г. Величко // Вісник Харківського нац. ун-ту. Сер.: Математика, прикладна математика і механіка. – 2011. – № 967. – С. 51–62.

3. **Ворович И. И.** Неклассические смешанные задачи теории упругости / И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бабешко. – М.: Наука, 1974. – 456 с.

4. **Горячева И. Г.** Контактное взаимодействие тел с периодическим рельефом при частичном проскальзывании / И. Г. Горячева, Н. И. Маланчук., Р. М. Мартиняк // Прикл. матем. и механика. – 2012. – Т. 76, Вып. 5. – С. 695–709.

5. **Кудашкина Д. А.** Метод Удзавы для решения контактной задачи теории упругости с трением / Д. А. Кудашкина, Р. В. Намм // Электронное научное издание «Ученые заметки ТОГУ». – 2014. – Т.5, №3. – С.1-9. [Электронный ресурс]: Режим доступа: http://pnu.edu.ru/media/ejournal/articles/2014/TGU_5_109.pdf

6. **Кузьменко В. И.** Трехмерные контактные задачи для многослойного упругопластического пакета / В. И. Кузьменко // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. - № 4. – С. 105–112.

7. **Маланчук Н. І.** Проковзування тіл в околі розшарування за дії зосередженої приповерхневої сили / Н. І. Маланчук // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – Т. 50, №4. – С. 173–180.

8. **Мартиняк Р.М.** Числове дослідження контактної взаємодії двох тіл з виїмкою методом декомпозиції області / І. І. Прокопівшин, Р. М. Мартиняк // Пробл. обчисл. механ.і міцн. конструкцій. – 2011. –Вип.16. – С. 232–239.

9. **Моссаковский В. И.** Исследование микроскольжения при сжатии и сдвиге упругого прямоугольника жесткими плитами / В. И. Моссаковский, В. В. Петров, А. В. Сладковский // Трение и износ, 1982. – Т. 3, Вып. 4. – С.596–602.

10. **Моссаковский В. И.** Контактные задачи математической теории упругости / В. И. Моссаковский, Н. Е. Качаловская, С. С. Голикова. – К.: Наукова думка, 1985. – 176 с.

11. **Приварников А. К.** Об использовании метода функции податливости при решении граничных задач для многослойных оснований сложной структуры / И. Е. Вигдеревич, В. Д. Ламзюк, А. К. Приварников // ДАН УССР. – 1976. – №6. – С.433–437.

12. **Шапиро Г.С.** Напряженное состояние бесконечной цилиндрической оболочки и неограниченной плоской плиты / Г. С. Шапиро // ДАН СССР. – 1942. – Т.37, №9. – С. 288–290.

13. **Bathe K.** Numerical method in finite element analysis // K. Bathe, E.L. Wilson. – Moscow: Nauka, 1985. – 648 p.

14. **Jun L.** Numerical and experimental analysis of delamination in the T-stiffener integrated composite structure / L Jun., X. Y. Lui, Y. Y. Nan, Y. Xuefeng // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2016. – Vol. 23 (10). – P. 1188–1196.

15. **Slobodyan B. S.** Modeling of Contact Interaction of Periodically Textured Bodies with Regard for Frictional Slip/ B. S. Slobodyan, B. A. Lyashenko, N. I. Malanchuk, V. E. Marchuk, R. M. Martynyak. // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – Vol. 215, Iss. 1. – P. 110–120.

*Н. І. Ободан, д-р. тех. наук, Н. А. Гук, д-р. фіз.-мат. наук,
Н. Л. Козакова*

НЕЛИНІЙНА ПОВЕДІНКА ШАРУ, ЩО ЛЕЖИТЬ НА ПРУЖНЬОМУ НАПІВПРОСТОРІ

Досліджено нелінійна поведінка пружнього шару, поступово навантажуваного розподіленим поверхневим навантаженням. Виконаний числовий аналіз напружено-деформованого стану для різних варіантів співвідношень фізичних характеристик покриття і напівпростору у залежності від сили тертя та питомої ваги шарів.

Ключові слова: *плоска контактна задача, пружний напівпростір, покриття, напруження, переміщення, тертя, питома вага.*

NONLINEAR BEHAVIOR OF THE ELASTIC LAYER LYING ON AN ELASTIC SEMISPACE

The nonlinear behavior of the elastic layer which is gradually charged with distributed surface loading is investigated. The numerical analysis of the stress-deformed condition for different ratios of the surface and semispace physical characteristics depending on the frictional force and the specific gravity of the layers is used.

Keywords: flat contact problem, an elastic semispace, surface, stress, movement, friction, specific gravity.

The nonlinear behavior of the elastic layer which is gradually charged with distributed surface loading is investigated.

The elastic layer of fixed thickness, lying on an elastic foundation and loaded with a distributed surface loading on the given area is considered. The boundary conditions are defined at the boundary of layer section and semispace in the contact zone corresponding to the cohesive zone, sliding and detachment. It is expected that when the load values less than critical the layer is in contact with semispace by means of a complete clutch or by the possibility of slippage, the occurrence of lift-off areas happens when the value of the critical load with the further development of these zones while the load increases.

The solution method is based on the variational formulation of the boundary problem using the characteristic functions. The finite element approximation for sampling this problem is used.

The numerical analysis of the stress-deformed condition for different ratios of the surface and semispace physical characteristics depending on the frictional force and the specific gravity of the layers is used. The calculations were carried out with the help of the foregoing algorithm using at each step of applied software package for the solution of equations with automatic preliminary «merger» and «disconnection» nodes according to displacement values corresponding to zones detachment, cohesion and slippage.

The behavior analysis of a two-layer system showed that at a certain ratio of layers thickness and the existing loadings values the deformation may happen if there are slippage zones of normal contact and detachment. Moreover, the existence of this behavior depends on the parameters of the system and can be installed in sequential with the change in calculated loading values from zero to the final value.

REFERENCES

1. **Abovsky N. P.** Variational principles of elasticity theory and the theory of shells / N. P. Abovsky., N. P. Andreev, A. P. Deruga.– Moscow: Nauka, 1978. – 288 p. (in Russian).
2. **Antonenko N. M.** The plane deformation band, which lies on an elastic half–plane in the presence of elastic ties at their common boundary / N. M. Antonenko, I. G. Velichko // Kharkov University bulletin : Mathematics, Applied Mathematics and mechanics. – 2011. – No 967. – P. 51–62 (in Ukrainian).

3. **Vorovich I. I.** Non-classical mixed problem of elasticity theory / I. I. Vorovich, V. M. Alexandrov, V. A. Babeshko. – Moscow: Nauka, 1974. – 456 p. (in Russian).
4. **Goryachev I. G.** Contact interaction of bodies with a periodic relief in case of partial slip / I. G. Goryachev, N. I. Malanchuk., R. M. Martinjak // J. Appl. Math.Mech. – 2012. – Vol. 76, No. 5. – P. 695–709 (in Russian).
5. **Kudashkina D. A.** Uzawa's method for solving the contact problem of elasticity with friction / D. A. Kudashkina, R. V. Namm / Electronic scientific publication «Scientists notes PNU». – 2014 – T.5, No3. – P.1–9 (in Russian), [electronic resource] access: http://pnu.edu.ru/media/ejournal/articles/2014/TGU_5_109.pdf
6. **Kuzmenko V. I.** Three-dimensional contact problems for elastic-plastic multi-layer packet / V. I. Kuzmenko // Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Mechanics of Solids. – 1984. – No 4. – P. 105–112 (in Russian).
7. **Malanchuk N. I.** Sliding bodies in the vicinity of the bundle for the surface action concentrated force / N. I. Malanchuk // Mathematical methods and physic and mechanical fields. – 2007. – Vol. 50, No 4. – P. 173–180 (in Ukrainian).
8. **Martynyak R. M.** Numerical investigation of contact interaction of two bodies with a notch domain decomposition / I. I. Prokopishyn, R. M. Martynyak // Problems computing mechanics and strength designs. – 2011. – No 16. – P. 232–239 (in Ukrainian).
9. **Mossakovsky V. I.** Research microslip compressive and shear elastic rectangle rigid plates / V. I. Mossakovsky, V. V. Petrov, A. V. Sladkovsky // Friction and Wear. – 1982. – Vol. 3, No 4. – P.596–602 (in Russian).
10. **Mossakovsky V. I.** Contact problems of mathematical theory of elasticity. / V. I. Mossakovsky, N. E. Kachalovskaya, S. S. Golikova. – Kiev: Naukova Dumka, 1985. – 176 p. (in Russian).
11. **Privarnikov A. K.** About using of the compliance function method for solving boundary value problems for multi-layer bases of complex structure. / I. E. Vigderovich, V. D. Lamzyuk, A. K. Privarnikov // Repots of Ukrainian Academy of Sciences. – 1976. – No 6. – P.433–437 (in Russian).
12. **Shapiro G. S.** Stress state of infinite cylindrical shell and unlimited flat plate / G. S. Shapiro // Reports of the USSR Academy of Sciences. – 1942. – Vol. 37, No 9. – P. 288–290 (in Russian).
13. **Bathe K.** Numerical method in finite element analysis / K. Bathe, E. L. Wilson. – Moskow: Nauka, 1985. – 648 p.
14. **Jun L.** Numerical and experimental analysis of delamination in the T-stiffener integrated composite structure / L. Jun., X. Y. Lui, Y. Y. Nan, Y. Xuefeng // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2016. – V. 23 (10). – P. 1188–1196.
15. **Slobodyan B. S.** Modeling of Contact Interaction of Periodically Textured Bodies with Regard for Frictional Slip/ B. S. Slobodyan, B. A. Lyashenko, N. I. Malanchuk, V. E. Marchuk, R. M. Martynyak.// Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – Vol. 215, Is. 1. – P. 110–120.

*Днепропетровский национальный
Университет им. Олесь Гончара
Днепр, Украина*

Поступила в редколлегию 01.07.2016