

УДК 539.3

А. Г. Пацюк, канд. техн. наук, І. А. Сафронова

ЧИСЛОВІ ТА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ КІЛЬЦЕВИХ ПЛАСТИН ПРИ ВЕЛИКИХ ПЕРЕМІЩЕННЯХ

Проведено числові дослідження симетрично навантажених кільцевих пластин за двома різними варіантами нелінійної теорії з урахуванням великих переміщень при малих деформаціях. Розроблено методичку, отримано експериментальні дані і приведено порівняльний аналіз числових та експериментальних результатів.

Ключові слова: кільцева пластинка, великі переміщення, нелінійна теорія, числове та експериментальне дослідження.

Вступ. Тонкостінні конструкції у вигляді пластин і оболонки широко використовуються як конструктивні елементи в багатьох галузях сучасної техніки, машинобудування та будівництва. При цьому, разом з жорсткими оболонками і пластинами часто застосовуються і гнучкі оболонкові елементи, які під впливом зовнішніх навантажень отримують достатньо великі узагальнені переміщення.

За характером викликаного деформацією напружено-деформованого стану для пластин розрізняють три класи пластин: жорсткі, гнучкі і мембрани (абсолютно гнучкі). Гнучкими пластинами вважаються такі, коли при деформаціях тангенціальні напруження серединної поверхні можуть бути порівняними зі згинними. Іноді гнучкість пластини пов'язують з величиною w/h , де w – прогин пластини, а h – її товщина. Так, в [2] металеву пластину прийнято вважати жорсткою при $w/h \leq 0,2$; гнучкою при $0,2 \leq w/h \leq 5$ і абсолютно гнучкою при $w/h \geq 5$. Одна і та сама пластинка, що знаходиться під дією зростаючого поперечного навантаження, може послідовно розглядатися як жорстка, гнучка або абсолютно гнучка.

На відміну від лінійної теорії, вірної для випадку, коли прогини є малими у порівнянні з товщиною пластинки, нелінійну теорію прийнято вважати вірною при прогинах малих, порівняно з максимальними розмірами пластини [2]. При отриманні рівнянь стану нелінійної теорії оболонок та згину пластин при великих прогинах враховуються нелінійні складові (другого порядку малості) кута повороту нормалі серединної поверхні, а також їх вплив на решту компонентів напружено-деформованого стану, який виявляється досить суттєвим при значенні прогину, більшим за товщину. Все це приводить до крайової задачі для системи нелінійних диференціальних рівнянь [1, 4, 5, 9, 10].

Існують різні варіанти підходу до виведення рівнянь нелінійної теорії, що описують напружено-деформований стан (НДС) кільцевих пластин та оболонок обертання, які зазнають великих переміщень при малих деформаціях, зокрема під дією осесиметричного навантаження [2, 3].

При цьому встановлення вірогідності результатів, отриманих за допомогою різних підходів до побудови нелінійної теорії, їх порівняльний аналіз, оцінка похибок, яку у цьому випадку дає розрахунок за лінійною та відповідними нелінійними теоріями, а також відповідності розрахункових результатів поведінки реальних конструктивних елементів є досить важливими [2, 3, 6, 10].

У поданій роботі досліджується застосування двох різних підходів до отримання нелінійної системи рівнянь, що описує напружено-деформований стан конструкції, які були запропоновані Я. М. Григоренко [4] і В. Л. Бідерманом [1]. Проводиться розв'язування відповідних нелінійних задач і порівняльний аналіз отриманих результатів на прикладі визначення напружено-деформованого стану кільцевих пластин при поперечному навантаженні з використанням запропонованого у [5] алгоритму. Проведено експериментальні дослідження поведінки кільцевої сталеві пластинки, жорстко затиснутої за зовнішнім, і навантаженої рівномірно розподіленою поперечною силою за вільним внутрішнім контуром. Подано відповідний порівняльний аналіз отриманих числових результатів розрахунку.

Постановка задачі. Досліджуються великі переміщення кільцевої пластинки внутрішнього r_0 і зовнішнього r_1 радіусів з товщиною $h = h(r)$, $r_0 \leq r \leq r_1$ при поперечному навантаженні.

Перший підхід (запропонований Я. М. Григоренко) полягає в тому, що в рівняннях для деформації і рівняннях рівноваги, на відміну від лінійної теорії, враховуються малі другого порядку. У цьому випадку основні рівняння, які описують напружено-деформований стан кільцевої пластинки при великих переміщеннях, мають вигляд, запропонований в [4].

Тут сума проєкцій усіх сил на напрям нормалі і радіус та рівняння моментів подається у вигляді:

$$\frac{d}{dr}(rQ_r) - \frac{d}{dr}\left(rN_r \frac{dw}{dr}\right) = rq_n; \quad (a)$$

$$\frac{d}{dr}(rN_r) - N_\theta = 0; \quad (b) \quad (1)$$

$$\frac{d}{dr}(rM_r) - M_\theta + rQ_r = 0, \quad (b)$$

а залежності для деформацій обираються у формі:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}; \quad \kappa_r = -\frac{d^2w}{dr^2}; \quad \kappa_\theta = -\frac{1}{r} \frac{dw}{dr}; \quad \vartheta_r = -\frac{dw}{dr}, \quad (2)$$

де N_r , N_θ , Q_r , M_r , M_θ – зусилля і моменти; q_n – інтенсивність поперечного навантаження; ε_r , ε_θ , κ_r , κ_θ – тангенціальні і згинні дефо-

рмації; u, w – радіальне і нормальне переміщення; ϑ_r – кут повороту нормалі до серединної поверхні.

Використовуючи рівняння пружності

$$\begin{aligned} N_r &= D_N (\varepsilon_r + \mu \varepsilon_\theta); & N_\theta &= D_N (\varepsilon_\theta + \mu \varepsilon_r); \\ M_r &= D_M (\kappa_r + \mu \kappa_\theta); & M_\theta &= D_M (\kappa_\theta + \mu \kappa_r), \end{aligned} \quad (3)$$

де $D_N = Eh / (1 - \mu^2)$, $D_M = Eh^3 / (12(1 - \mu^2))$ – тангенціальна і згинна жорсткості; E – модуль Юнга; μ – коефіцієнт Пуассона, після деяких перетворень можна отримати систему рівнянь відносно вектора змінних $\bar{Y} = \{N_r, u, Q_r, M_r, \vartheta_r, w\}$ у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{dN_r}{dr} &= -\frac{1-\mu}{r} N_r + \frac{(1-\mu^2)D_N}{r^2} u; \\ \frac{du}{dr} &= -\frac{1}{D_N} N_r - \frac{\mu}{r} u - \frac{1}{2} \vartheta_r^2; \\ \frac{dQ_r}{dr} &= -\frac{1}{r} Q_r - \frac{(1-\mu^2)D_N}{r^2} u \vartheta_r - \frac{1}{D_M} N_r M_r + q_n; \\ \frac{dM_r}{dr} &= -Q_r - \frac{1-\mu}{r} M_r + \frac{(1-\mu^2)D_M}{r^2} \vartheta_r; \\ \frac{d\vartheta_r}{dr} &= \frac{1}{D_M} M_r - \frac{\mu}{r} \vartheta_r; \\ \frac{dw}{dr} &= -\vartheta_r, \end{aligned} \quad (4)$$

яка доповнюється крайовими умовами відповідно закріпленню контурів пластини. Наприклад, для

- а) жорсткого затиснення: $u = \vartheta_r = w = 0$;
- б) шарнірного обпирання: $u = w = M_r = 0$;
- в) вільного краю: $N_r = M_r = Q_r = 0$ або $N_r = N_0, M_r = M_0, Q_r = Q_0$.

У відповідності до другого підходу (запропонованого В. Л. Бідерманом) кільцева пластинка розглядається як оболонка обертання, меридіан якої збігається з радіусом пластини, коли крім врахування нелінійних доданків вважається, що кут θ між нормаллю і віссю обертання оболонки змінюється в процесі деформації

$$\theta^+ = \theta + \vartheta_r .$$

Для кільцевої пластинки $\theta = 0$, тоді $\theta^+ = \vartheta_r$.

У цьому випадку одне з рівнянь рівноваги може бути отримане в інтегральній формі як сума проєкцій на вісь симетрії сил, які прикладені до виділеної ділянки пластинки, і має вигляд

$$Q_r = -\frac{F(r)}{2\pi r},$$

де $F(r)$ – сумарне осьове навантаження на виділену частку пластинки і складається з осьового навантаження Q_0 на внутрішньому краю і інтенсивності поперечного навантаження q_n

$$F(r) = Q_0 + \int_{r_0}^r 2\pi r q_n(r) dr.$$

Сума проєкцій усіх сил на напрям нормалі і радіус та рівняння моментів має вигляд

$$\frac{d}{dr}(Q_r r) + r q_n = 0; \quad (a)$$

$$\frac{d}{dr}(N_r r) - N_\theta = 0; \quad (б) \quad (5)$$

$$\frac{d}{dr}(M_r r) - M_\theta - r Q_r = 0. \quad (в)$$

Зауважимо, що рівняння (1, б, в) та (5, б, в) для обох підходів співпадають, а (1, а) та (5, а) – відрізняються доданком $-\frac{d}{dr}\left(r N_r \frac{dw}{dr}\right)$.

Рівняння деформацій подаються у вигляді:

$$\frac{du}{dr} = \varepsilon_r \cos \vartheta_r + \cos \vartheta_r - 1; \quad \frac{dw}{dr} = \varepsilon_r \sin \vartheta_r + \sin \vartheta_r;$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}; \quad \kappa_r = \frac{d\vartheta_r}{dr}; \quad \kappa_\theta = \frac{\sin \vartheta_r}{r}.$$

Після нескладних перетворень наведених рівнянь та з урахуванням рівнянь пружності (3) отримуємо систему нелінійних диференціальних рівнянь відносно вектора змінних $\bar{Y} = \{N_r, u, M_r, \vartheta_r, w\}$

$$\frac{d(N_r r)}{dr} = \frac{D_N(1-\mu^2)}{r} u + \frac{\mu}{r} \cos \vartheta_r (N_r r) + \frac{\mu}{r} \sin \vartheta_r \frac{F(r)}{2\pi};$$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dr} &= -\frac{\mu}{r} \cos \vartheta_r u + \cos \vartheta_r - 1 + \frac{1}{D_N r} \cos^2 \vartheta_r (N_r r) + \\ &\quad + \frac{1}{2D_N r} \sin 2\vartheta_r \frac{F(r)}{2\pi}; \\ \frac{d(M_r r)}{dr} &= \frac{D_M (1-\mu^2)}{2r} \sin 2\vartheta_r + \sin \vartheta_r (N_r r) + \\ &\quad + \frac{\mu}{r} \cos \vartheta_r (M_r r) - \cos \vartheta_r \frac{F(r)}{2\pi}; \\ \frac{d\vartheta_r}{dr} &= \frac{1}{D_M r} (M_r r) - \frac{\mu}{r} \sin \vartheta_r; \\ \frac{dw}{dr} &= -\frac{\mu}{r} \sin \vartheta_r u + \frac{1}{2D_N r} \sin 2\vartheta_r (N_r r) + \sin \vartheta_r + \\ &\quad + \frac{1}{D_N r} \sin^2 \vartheta_r \frac{F(r)}{2\pi}, \end{aligned} \quad (6)$$

яка доповнюється крайовими умовами відповідно закріпленню контурів пластини:

- а) жорстке затиснення: $u = \vartheta_r = w = 0$;
- б) шарнірне обпирання: $u = w = M_r = 0$;
- в) вільний край: $N_r = M_r = 0$ або $N_r = N_0, M_r = M_0$.

Зауважимо, що коли обидва краї кільцевої пластини жорстко затиснені або шарнірно обперті, то додатково виникає необхідність розкриття статичної невизначеності одним із відомих методів.

Числове дослідження. Числовий розрахунок проведено з використанням розробленого ітераційного алгоритму [5] для сталевий кільцевої пластинки з параметрами $r_0 = 31,5$ мм, $r_1 = 100$ мм, $h = 0,35$ мм, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0,3$ для випадку жорстко затисненого зовнішнього і навантаженого силою Q_0 вільного внутрішнього краю.

Відповідні крайові умови мають вигляд:

для системи (4) при $r = r_0$ $u = 0, Q_r = Q_0, \vartheta_r = 0$; при $r = r_1$ $u = \vartheta_r = w = 0$;
 для системи (6) при $r = r_0$ $u = \vartheta_r = 0$; при $r = r_1$ $u = \vartheta_r = w = 0$.

Розв'язування кожної з наведених нелінійних систем диференціальних рівнянь з відповідними крайовими умовами здійснюється шляхом її лінеаризації і подальшого застосування методу прогонки з ортогоналізацією за С. К. Годуновим для розв'язування виникаючих лінійних крайових задач на кожному кроці ітераційного процесу уточнення нелінійних складових [5]. Ітераційний процес для виникаючої послідовності відповідних лінеаризованих крайових задач побудовано комбінацією методу послідовних навантажень з використанням методу Ейткена – Стеффенсена [8] на кожному кроці навантаження.

В табл. 1 наведено значення максимального прогину пластинки – $w_{\text{лн}}$, обчисленого за поданою у [7] формулою для лінійної системи рівнянь для різних значень Q_0 , а також максимальних прогинів $w_{\text{гр}}$ і $w_{\text{бд}}$, отриманих шляхом розв'язування системи рівнянь (4) і (6) відповідно. Наведено кількість ітерацій $n_{\text{гр}}$ і $n_{\text{бд}}$, для досягнення збіжності ітераційного процесу з відносною похибкою $\varepsilon = 10^{-3}$.

Таблиця 1 - Значення максимального прогину пластинки, обчислене за різними підходами

Q_0 (Н)	$w_{\text{лн}}$ (мм)	$w_{\text{гр}}$ (мм)	$n_{\text{гр}}$	$w_{\text{бд}}$ (мм)	$n_{\text{бд}}$
0,5	0,0362	0,0378	2	0,0376	4
1,0	0,0723	0,0755	3	0,0749	4
1,5	0,1085	0,1129	3	0,1094	4
2,0	0,1446	0,1474	3	0,1405	6
2,5	0,1808	0,1799	3	0,1686	6
3,0	0,2169	0,2101	6	0,1941	6
4,0	0,2892	0,2650	8	0,2387	8
5,0	0,3615	0,3132	8	0,2768	8
6,0	0,4338	0,3559	9	0,3101	8
7,0	0,5061	0,3943	10	0,3393	10
8,0	0,5784	0,4293	11	0,3659	10
9,0	0,6507	0,4613	11	0,3902	10

Q_0 (Н)	$w_{\text{лн}}$ (мм)	$w_{\text{гр}}$ (мм)	$n_{\text{гр}}$	$w_{\text{бд}}$ (мм)	$n_{\text{бд}}$
10,0	0,7230	0,4909	13	0,4126	10
11,0	0,7953	0,5185	13	0,4340	12
12,0	0,8676	0,5443	15	0,4529	10
13,0	0,9399	0,5686	17	0,4713	10
14,0	1,0122	0,5915	21	0,4891	12
15,0	1,0845	0,6133	23	0,5053	14
16,0	1,1569	0,6341	25	0,5216	12
17,0	1,2292	0,6539	25	0,5360	14
18,0	1,3015	0,6731	24	0,5505	14
19,0	1,3738	0,6910	39	0,5646	14
20,0	1,4461	0,7085	54	0,5777	14
21,0	1,5184	0,7256	143	0,5907	14

Отримані числові результати демонструють, що для малих значень зовнішнього навантаження i , як наслідок, досить малих прогинів розрахункові значення максимального прогину, обчислені за лінійною і нелінійною теоріями, співпадають, але вже для випадку, коли максимальний прогин складає половину товщини ($w_{\text{max}} \cong h/2$, $Q_0 = 2,5 H$, табл. 1), тобто розв'язок теоретично ще знаходиться в рамках лінійної теорії, значення прогинів, отриманих з використанням нелінійних рівнянь, відрізняються від лінійних (отриманих за формулою, наведеною в [7]) майже на 6,7%, а розбіжність результатів, отриманих з використанням різних підходів до складання нелінійних систем (4) і (6), між собою становить 6,2%. При збільшенні навантаження, коли значення максимального прогину наближається до значення двох товщин, розбіжність зазначених результатів, отриманих з використанням різних підходів до складання нелінійних систем (4), (6), збільшується в 2÷3 рази (табл. 1).

Слід зазначити, що ітераційний процес, який ґрунтується на використанні системи (4), потребує більшої кількості ітерацій ніж той, який побудований на базі системи (6), і більше того, такий процес втрачає стабільність та починає розбігатися при $w_{\text{max}} > 2h$. Ці особливості ітераційного

процесу відповідають результатам [4], де теж спостерігалась розбіжність ітераційного процесу при розв'язування виникаючої крайової задачі з використанням алгоритму, що ґрунтується на комбінації методів Ньютона та продовженням за параметром навантаження, а за початкової наближення обирався лінійний розв'язок задачі.

Зазначена задача розв'язувалась також з використанням алгоритму [5] для системи (4) за підходом, запропонованим в [4] (стор. 107), у відповідності до якого автори пропонують будувати ітераційний процес одночасно за чотирма невідомими. Це призводить до певного збільшення витрат машинного ресурсу, але швидкість збіжності ітераційного процесу вдалося прискорити та збільшити діапазон навантажень. При цьому отримані результати розрахунку (рис. 2, крива 4) відрізняються від отриманих при розв'язанні системи (4) для випадку, коли ітерації здійснюються лише за однією змінною ϑ_r (рис. 2, крива 2) не більше, ніж на 4%.

У той же час слід зазначити, що підхід до розв'язання нелінійних задач, пов'язаний з побудовою ітераційного процесу за 4-ма параметрами, для системи (6) (як і для ряду інших нелінійних задач оболонки обертання) виявився неможливим, оскільки одна з невідомих, за якою здійснюється ітераційний процес, входить до коефіцієнтів системи як аргумент тригонометричної функції, тобто у неявному вигляді.

Таким чином, запропонований в [5] підхід має певні переваги, оскільки для розглядуваної задачі при фактично однаковій швидкості збіжності з 4-х параметричним ітераційним процесом, він є ефективним і для задачі у вигляді (6), тобто є більш універсальним.

Експериментальні дослідження. З метою оцінки та верифікації результатів, отриманих за допомогою авторського розрахункового пакету [5] з застосуванням різних підходів до складання системи нелінійних диференціальних рівнянь, що описують НДС кільцевої пластинки при великих переміщеннях, були проведені експериментальні дослідження. Для цього було створено спеціальний випробувальний пристрій для визначення згину кільцевої пластини під дією осесиметричного навантаження рівномірно розподіленого за контуром внутрішнього отвору (рис. 1), який складався з трьох частин – систем закріплення, навантаження і замірів.

Для круглої кільцевої пластини **1** в якості закріплювальних елементів була використана система фланцевих з'єднань, що дозволило варіювати параметрами тонкостінності пластини D/h та співвідношенням D_1/D_2 , де D_1 – діаметр пластини; D_2 – діаметр внутрішнього отвору; h – товщина пластини. Фланець з вибіркою **2** складався з двох кілець: основного, у який вставлялася пластина, і допоміжного, яким вона закріплювалася. Товщина основного кільця фланцю складала 10 мм, глибина вибірки – 5 мм, товщина допоміжного кільця – 4,5 мм. Кільця фланцевого з'єднання з пластиною закріплювались 8 гвинтами М4. Таке з'єднання дозволило отримати жорстке затиснення зовнішнього контуру пластини.

Для осесиметричного навантаження пластини, розподіленого за внутрішнім отвором, була виготовлена тонкостінна циліндрична шайба-заглушка **3** з мікрометричною різьбою, що дозволяло точно загвинчувати

шайбу і, таким чином, отримувати рівномірно розподілене за внутрішнім отвором навантаження пластини. У центрі шайби було виконано отвір для закріплення стійки з платформою 4, на яку встановлювалися гирі для навантаження пластини.

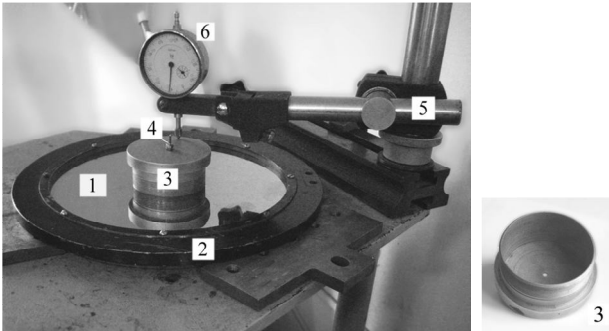


Рис. 1. – Пристрій для визначення згину кільцевої пластини під дією осесиметричного навантаження, розподіленому за внутрішнім отвором

Система замірів складалась з Г-подібної стійки 5 з закріпленням на кінці індикатором годинникового типу 6. Стійка устатковувалась на станині та могла обертатися. Всі елементи пристрою були встановлені на жорсткій металевій основі.

Пластини для досліджень виготовлялись із сталі з модулем пружності $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, зовнішнім діаметром $D_1 = 200 \text{ мм}$, та діаметром отвору $D_2 = 63 \text{ мм}$. Товщина пластини складала $h = 0,35 \text{ мм}$. Пластини навантажувались дискретно силою зі змінним кроком від $1,7 \text{ Н}$ до $20,7 \text{ Н}$ (рис. 2). Значення максимального прогину пластини при цьому $\sim 2h$.

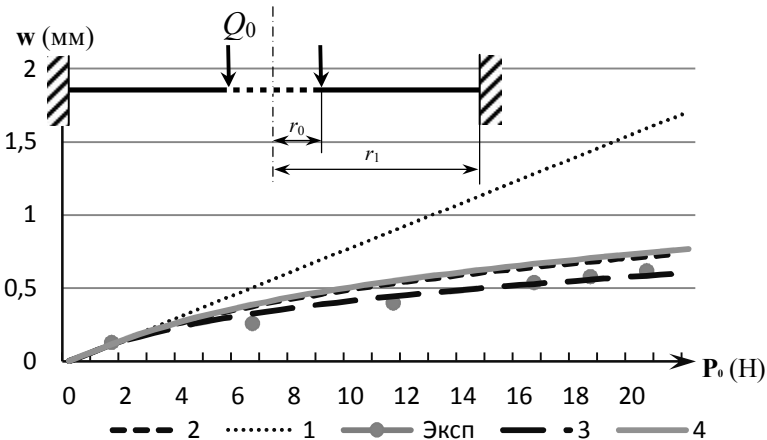


Рис. 2 – Графік «навантаження – прогин» для кільцевої пластини під дією осесиметричного навантаження розподіленому по внутрішньому отвору

Заміри прогинів пластини здійснювались в чотирьох точках, які знаходились на кінцях взаємно перпендикулярних діаметрів отвору пластини. В якості значення прогину обиралось середнє-арифметичне значення цих замірів.

На рис. 2 подані графіки «навантаження – прогин» за результатами розрахунків у відповідності до:

- поданої у [7] формули для лінійної системи рівнянь (лінія 1);
 - нелінійної теорії з використанням підходу, запропонованого Я. М. Григоренко [4], коли ітераційний процес здійснювався за однією змінною (лінія 2) та чотирма змінними (лінія 4);
 - нелінійної теорії з використанням підходу, запропонованого В. Л. Бідерманом [1] (лінія 3);
- результати експерименту зображені точками.

Висновки. Наведено результати порівняльного аналізу числового розрахунку НДС симетрично навантажених кільцевих пластинок з урахуванням великих переміщень при малих деформаціях за двома різними підходами до побудови нелінійної системи рівнянь їх поведінки і з експериментальними даними.

Подано методику проведення експерименту та порівняння експериментальних та числових результатів, які демонструють їх високу збіжність і підтверджують достовірність числових розрахунків.

Розбіжність між результатами, отриманими з використанням розглянутих двох різних підходів щодо складання нелінійних систем у випадку, коли максимальний прогин становить значення двох товщин, досягає 18,5%.

Дані експериментальних досліджень для розглядуваної пластинки дають добру збіжність з числовими розрахунками, отриманими з використанням нелінійної теорії, що описує поведінку тонкостінних конструкцій, запропонованої в [1]. Так, розбіжність експериментальних і числових результатів для досліджених значень навантаження у цьому випадку не перевищує 5,5%, а для варіанту теорії, запропонованої в [4], вона досягає 16%.

У цілому, отримані експериментальні дані підтверджують, що запропонована в [5] методика розрахунку нелінійних крайових задач є досить ефективною, оскільки алгоритм має достатньо добру збіжність, а отримані результати є близькими до реальної поведінки конструкції.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Бідерман В. Л.** Механика тонкостенных конструкций / В. Л. Бидерман. – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с.
2. **Вольмир А. С.** Гибкие пластинки и оболочки / А. С. Вольмир. – М.: Гостехизат, 1956. – 420 с.
3. **Галимов К. З.** Основы нелинейной теории тонких оболочек / К. З. Галимов. – Казань: Изд-во КГУ, 1975. – 326 с.
4. **Григоренко Я. М.** Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ / Я. М. Григоренко, А. П. Мукоед. – К.: Вища школа, 1983. – 286 с.
5. **Дзюба А. П.** Алгоритми прискорення збіжності ітераційних процесів розрахунку оболонок обертання складної форми меридіану при великих переміщеннях / А. П. Дзюба, І. А. Сафронова // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Механіка. – Т. 2. Дн-ск: Вид-во ДНУ. – 2015. – Вып. 19. – С. 38–55.

6. **Корнишин М. С.** Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения / М. С. Корнишин. – М.: Наука, 1964. – 192 с.
7. Прочность, устойчивость, колебания / Справочник в трёх томах. Том 1. / под ред. И. А. Биргера, А. Г. Панво. – М.: Машиностроение, 1968. – 832 с.
8. **Шаманский В. Е.** Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ / В. Е. Шаманский. – К.: Наукова думка, 1963. – Ч. 1. – 196 с. – К., 1966. – Ч. 2. – 244 с.
9. **Григоренко Я. М.** Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей / Я. М. Григоренко, Г. Г. Влайков, А. Я. Григоренко. – К.: Академперіодика, 2006. – 472 с.
10. **Баженов В. А.** Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури / В. А. Баженов, О. П. Кривенко, М. О. Соловей. – К.:ЗАТ «Віпол», 2010. – 316 с.

А. Г. Пацюк, канд. техн. наук, И. А. Сафронова

ЧИСЛЕННЫЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОВЕДЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИНОК ПРИ БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Проведены численные исследования симметрично нагруженных кольцевых пластин по двум разным вариантам нелинейной теории с учетом больших перемещений при малых деформациях. Разработана методика, получены экспериментальные данные и приведен сравнительный анализ числовых и экспериментальных результатов.

Ключевые слова: кольцевая пластинка, большие перемещения, нелинейная теория, численные и экспериментальное исследование.

A. G. Patsyuk, PhD (Tech.), I. A. Safronova

NUMERICAL AND EXPERIMENTAL RESEARCH OF BEHAVIOUR OF AXISYMMETRIC ANNULAR PLATES AT LARGE DISPLACEMENTS

Numerical researches of symmetrically loaded annular plates were carried by two different variants of the nonlinear theory with considering large displacements and small deformations. The method was developed, the experimental data were received and the comparative analyses of numerical and experimental results were given.

Keywords: annular plate, large displacements, nonlinear theory, numerical and experimental research.

The results of comparative analysis of numerical calculation of stress-strain state symmetrically loaded annular plates on two different approaches [1, 4] to the nonlinear theory considering large displacements and small deformations with the experimental data are presented in the submitted article.

Different variants approach to get the equations of the nonlinear theory describing the stress-strain state annular plates and rotation shells (of revolution !) that experience large movements small deformations under axially symmetric loading [1 – 5, 9, 10] exist. Establishment of probabilities of obtained results, the comparative analysis, assessment of errors that in this case allow calculation of the appropriate linear and nonlinear theories and

calculated results matching behaviour of real constructive elements are quite important [2, 3, 6, 10].

In the submitted work two different approaches to get the nonlinear system of equations describing the stress-strain state structures proposed by Ya. M. Grigorenko [4] and V. L. Biderman [1] were investigated. Solving the corresponding nonlinear problems and comparative analysis of the results by the example of determining the stress-strain state (SSS) annular plates under transverse load are done using the algorithm that was proposed in [5]. The experimental researches of behaviour of annular steel plate sandwiched hard on the outside and loaded evenly distributed transverse force on a free inner edge were conducted. Corresponding comparative analysis of the results of numerical calculations were posted.

Value of the maximum deflection of the plate is shown in Table. 1: w_{ln} – it was calculated by the formula filed in [7] for a linear system of equations for different values Q_0 ; w_{gr} – it was calculated by solving the system of equations given in [4]; w_{bd} – it was calculated by solving the system of equations given in [1]. The corresponding number of iterations – n_{gr} , n_{bd} which was achieved convergence of iterative process with a relative error $\varepsilon = 10^{-3}$ is given too.

Table 1 – The value of the maximum deflection of the annular plate calculated by different approaches

Q_0 (N)	w_{ln} (mm)	w_{rp} (mm)	n_{rp}	w_{bd} (mm)	n_{bd}
0,5	0,0362	0,0378	2	0,0376	4
1,0	0,0723	0,0755	3	0,0749	4
1,5	0,1085	0,1129	3	0,1094	4
2,0	0,1446	0,1474	3	0,1405	6
2,5	0,1808	0,1799	3	0,1686	6
3,0	0,2169	0,2101	6	0,1941	6
4,0	0,2892	0,2650	8	0,2387	8
5,0	0,3615	0,3132	8	0,2768	8
6,0	0,4338	0,3559	9	0,3101	8
7,0	0,5061	0,3943	10	0,3393	10
8,0	0,5784	0,4293	11	0,3659	10
9,0	0,6507	0,4613	11	0,3902	10

Q_0 (N)	w_{ln} (mm)	w_{rp} (mm)	n_{rp}	w_{bd} (mm)	n_{bd}
10,0	0,7230	0,4909	13	0,4126	10
11,0	0,7953	0,5185	13	0,4340	12
12,0	0,8676	0,5443	15	0,4529	10
13,0	0,9399	0,5686	17	0,4713	10
14,0	1,0122	0,5915	21	0,4891	12
15,0	1,0845	0,6133	23	0,5053	14
16,0	1,1569	0,6341	25	0,5216	12
17,0	1,2292	0,6539	25	0,5360	14
18,0	1,3015	0,6731	24	0,5505	14
19,0	1,3738	0,6910	39	0,5646	14
20,0	1,4461	0,7085	54	0,5777	14
21,0	1,5184	0,7256	143	0,5907	14

The difference between the results obtained by using two different considered approaches to the compilation of nonlinear systems, when the maximum deflection is two thickness, reaches 18.5% were demonstrated by the numerical results.

Experimental research was conducted for assessment and verification of the results that were obtained by the author's calculated algorithm [5] with using different approaches to obtain a system of nonlinear differential equations that describe the SSS annular plate with large movements. Special test

device (Fig. 1) was established for determining bending annular plate 1 under axially symmetric load evenly distributed on a path internal hole 3 which consisted of three parts – the consolidation of 2, 4 and 5 load measurements 6.

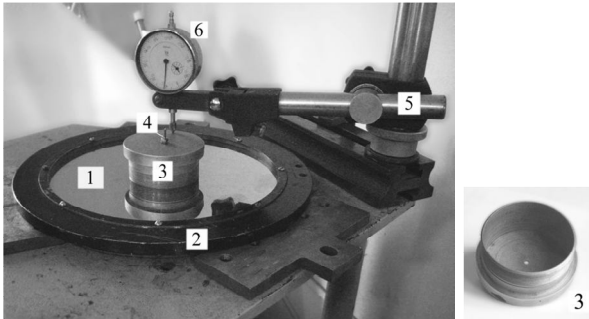


Fig. 1 – The device for determining the deflection annular plates under axially symmetric loading distributed on the inner hole

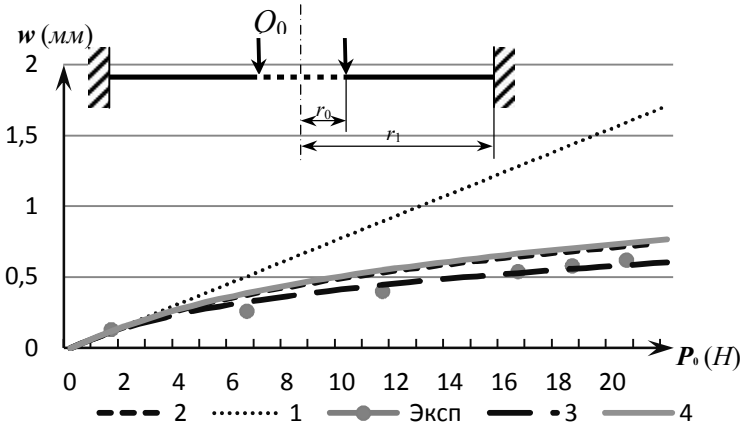


Fig. 2 – Graph «loading – deflection» for annular plates under axially symmetric loading distributed on the inner hole

Fig. 2 shows graphs «load – deflection» by the results of calculations: line 1 – for a linear system of equations was calculated by [7]; line 2 – for a nonlinear system of equations was calculated by [4] with one parameter iterative process and line 4 – with four parameters; line 3 – for a nonlinear system of equations was calculated by [1]; the results of the experiment are shown by points.

The results of experimental research for the considered plate have given good convergence with numerical calculations had been obtained by using nonlinear theory proposed in [1] describing the behaviour of thin-walled structures. Divergence of experimental and numerical results does not exceed 5.5% for the investigated load values and for the version of the theory proposed in [4], the difference is 16%.

Thus, the algorithm [5] for solving has rather high convergence and it is quite effective, experimental data support the convergence of numerical results with the parameters of real construction behaviour.

REFERENCES

1. **Biderman V. L.** Mechanics of thin-walled structures / V. L. Biderman. – Moscow: Mashinostroenie, 1977. – 488 p. (in Russian).
2. **Vol'mir A. S.** Flexible plate and shell / A. S. Vol'mir. – Moscow: Gostehizat, 1956. – 420 p. (in Russian).
3. **Galimov K. Z.** Fundamentals of nonlinear theory of thin shells / K. Z. Galimov. – Kazan: KSU Publishing House, 1975. – 326 p. (in Russian).
4. **Grigorenko Ya. M.** Solution of nonlinear problems of shell theory by computer / Ya. M. Grigorenko, A. P. Mukoed. – Kiev: Vyshaya Shkola, 1983. – 286 p. (in Russian).
5. **Dzyuba A. P.** Algorithms for convergence acceleration of iterative calculation process for rotation shells with complex meridian shape at large displacements / A. P. Dzyuba, I. A. Safronova // Bulletin of Dnipropetrovsk University. Ser.:Mechanics. – T.2. – Dn-sk: Publishing House DNU. – 2015. – Vol. 19. – P. 38–55 (in Ukrainian).
6. **Kornishin M. S.** Nonlinear problems of the theory of plates and shallow shells and methods of their solution / M. S. Kornishin. – Moscow: Nauka, 1964. – 192 p. (in Russian).
7. Strength, stability, oscillations, / Reference book in three volumes. Vol. 1 / ed. by I. A. Birger, A. G. Panovko. – Moscow: Mashinostroenie, 1968. – 832 p. (in Russian).
8. **Shamanskiy V. E.** Methods for numerical solution of boundary value problems by computer / V. E. Shamanskiy. – Kiev: Naukova dumka, 1963 – Part 1 – 196 p. – Kiev: Naukova dumka, 1966. – Part 2. – 244 p. (in Russian).
9. **Grigorenko Ya. M.** Numerically and analytical solution of problems of mechanics of shells on the basis of various models / Ya. M. Grigorenko, G. G. Vlaikova, A. Ya. Grigorenko. – Kiev: Academperiodika, 2006. – 472 p. (in Russian).
10. **Bazhenov V. A.** Nonlinear deformation and stability of elastic shells with heterogeneous structure / V. A. Bazhenov, A. L. Krivenko, M. O. Solovey. – Kiev: Vipol, 2010. – 316 p. (in Ukrainian).

*Дніпропетровський національний університет
ім. Олеся Гончара
Дніпро, Україна*

Надійшла до редколегії 12.10.2016