 ISSN 2079–1836
2016, вип. 25

УДК 539.3

С. О. Плашенко, В. І. Кузьменко, д-р. фіз.-мат. наук

ЗВ'ЯЗАНА ЗАДАЧА ПРО ПРОГИН МЕМБРАНИ ПІД ДІЄЮ НАЛИТОЇ РІДИНИ

Запропонована постановка задачі про взаємодію мембрани та рідини. Тиск рідини залежить від деформації мембрани. Розв'язання ґрунтується на розщепленні зв'язаної задачі на класичні крайові задачі. Для числового розв'язання використано варіаційно-різницевий метод. Наведені результати розв'язання конкретної задачі та виконано аналіз практичної збіжності.

Ключові слова: *зв'язана задача, варіаційна нерівність, ітераційний процес, рівняння Пуассона, безрозмірний вигляд.*

Вступ. Класичні постановки крайових задач механіки деформівного тіла передбачають, що на поверхні тіла діють задані сили як функції координат та часу. Іншими словами, вважається, що зовнішні сили не залежать від деформування тіла. Однак існує низка технічних проблем, у разі моделювання яких припущення про апріорний вид зовнішнього навантаження є принципово неприйнятним.

Тиск рідких та газоподібних корисних копалин у порожнинах земної кори залежить від деформованого стану у околі порожнини, який, у свою чергу, залежить від тиску всередині порожнини. Підходи до вивчення такого класу зв'язаних задач запропоновані в [5]. Інший важливий клас зв'язаних задач виникає у разі вивчення кренів масивних споруд на неоднорідних основах [1]. Крени споруд викликані деформацією основи; з іншого боку, такі деформації обумовлені дією споруди.

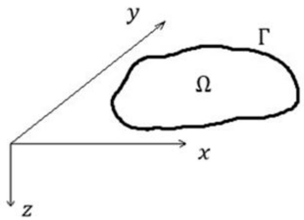
У сучасному будівництві поширені економічні мембранні перекриття спортивних споруд та натяжні стелі. Потрапляння рідини на такі елементи конструкцій унаслідок опадів чи аварійних ситуацій може призвести до надмірних прогинів та руйнування мембран. Прогин мембрани залежить від розподілу рідини на поверхні мембрани; з іншого боку, товщина шару рідини внаслідок перетікання визначається деформацією мембрани.

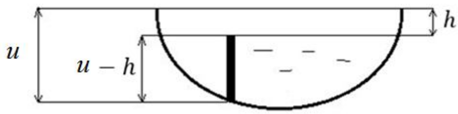
Робота присвячена розробці математичної моделі деформування мембран під дією рідини та дослідженню відповідної зв'язаної задачі. Розв'язання ґрунтується на ітераційному процесі розщеплення нелінійної зв'язаної задачі на послідовність класичних крайових задач та використанні варіаційно-різницевих методів.

Постановка задачі. Розглядається задача про прогин мембрани під дією ваги рідини, розлитої на поверхні мембрани. Вважається, що тиск рідини у певній точці мембрани пропорційний висоті стовпа рідини над даною точкою. Під дією тиску рідини мембрана прогинається, внаслідок чого відбувається перерозподіл рідини на поверхні мембрани і змінюється тиск. Тому така задача відноситься до класу так званих зв'язаних задач.

Мембрана у недеформованому стані знаходиться у горизонтальній площині. Введемо декартову систему координат так, щоб мембрана лежала у координатній площині Oxy, а сила тяжіння діяла у напрямку осі Oz. Мембрана натягнута у горизонтальній площині рівномірно розподіленим по контуру зусиллям T. Мембрана займає у площині Oxy область Ω, обмежену контуром Γ (рис. 1, а).

На поверхню мембрани виливається рідина об'ємом V_0 з питомою вагою γ. У стані рівноваги рідина покриває лише заздалегідь невідому частину поверхні мембрани. Через $u(x,y)$ позначимо прогин мембрани в точці (x,y), а через h – відстань від поверхні рідини до площини Oxy (рис. 1, б).





а) б)

Рис.1 – **Схема навантаження мембрани**

Висота стовпа рідини над точкою (x,y) становить $u(x,y)-h$, а тиск, який чинить цей стовп на мембрану, дорівнює

$$g(x,y)=\gamma[u(x,y)-h]$$

На вільній від рідини частині поверхні мембрани маємо $g(x,y)=0$.

Введемо допоміжну функцію

$$r(u,h)=\begin{cases}0, u<h\\1, u\geq h.\end{cases}$$

Тоді тиск на довільну точку мембрани можна подати в такому вигляді

$$q=r(u,h)\gamma(u-h).$$

Прогин мембрани описується рівнянням [3]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{q}{T}=-\frac{r(u,h)\gamma(u-h)}{T}\,. \qquad (1)$$

Зауважимо, що рівняння (1) формально збігається з рівнянням Пуассона, однак права частина не є задана функція координат, а залежить від шуканих прогинів мембрани.

Вважається, що закріплення контуру мембрани виключає можливість вертикальних переміщень точок контуру, тобто

$$u|_{\Gamma}=0. \qquad (2)$$

У процесі взаємодії з мембраною об'єм рідини залишається незмінним, тобто виконується умова

$$\int\limits_{\Omega} r(u,h)(u-h)d\Omega = V_0. \tag{3}$$

Отримуємо нелінійну зв'язану задачу визначення прогинів $u(x,y)$ мембрани, які задовольняють узагальнене рівняння Пуассона (1), крайову умову (2) та додаткову умову (3).

Перехід до безрозмірного вигляду. Виділимо сталі величини, що характеризують задачу: γ – питома вага рідини; V_0 – об'єм рідини; T – розподілена сила натягу мембрани; a – характерний розмір мембрани.

Від розмірних змінних величин x, y, u, h, q перейдемо до відповідних безрозмірних змінних ξ, η, w, H, f, використовуючи як масштабні множники, характерні значення розмірних величин.

За характерний тиск доцільно обрати середній тиск як відношення ваги рідини до площі поверхні мембрани, або до сталої, пропорційної площі, наприклад a^2. Виходячи із зазначених міркувань, оберемо характерний тиск q_0 у вигляді

$$q_0 = \frac{\gamma V_0}{a^2}.$$

Тоді безрозмірний тиск f пов'язаний із q співвідношенням

$$q = f q_0 = f\frac{\gamma V_0}{a^2}.$$

Введемо безрозмірні координати точок мембрани:

$$\xi = \frac{x}{a};\ \eta = \frac{y}{a}.$$

Знайдемо характерний прогин u_0 так, щоб у безрозмірних змінних рівняння прогину мембрани мало вигляд

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = -f(\xi,\eta,w).$$

Покладемо у рівнянні (1) $u = u_0 w$ і перейдемо до системи координат $O\xi\eta$. Тоді

$$\frac{u_0}{a^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right) = -f\frac{\gamma V_0}{a^2 T},$$

звідси:

$$u_0 = \frac{\gamma V_0}{T}; \quad u = u_0 w = \frac{\gamma V_0}{T} w.$$

Безрозмірний аналог функції $r(u,h)$ має вигляд

$$R(\omega, h) = \begin{cases} 0, w < H \\ 1, w \geq H, \end{cases}$$

де $H = \frac{T}{\gamma V_0} h$.

Подамо у безрозмірному вигляді тиск на мембрану:

$$f = \frac{qa^2}{\gamma V_0} = \frac{a^2}{\gamma V_0} \gamma R(w, H)(w - H) \frac{\gamma V_0}{T} = \frac{\gamma a^2}{T} R(w, H)(w - H). \tag{4}$$

Позначимо через Ω^* область, зайняту мембраною у площині $O\xi\eta$, через Γ^* – контур цієї області. Запишемо умову сталості об'єму у безрозмірних змінних:

$$\int\limits_{\Omega^*} R(w, H)(w - H) \frac{\gamma V_0}{T} a^2 d\xi d\eta = V_0,$$

або

$$\int\limits_{\Omega^*} R(w, H)(w - H) d\xi d\eta = \frac{T}{\gamma a^2}. \tag{5}$$

Отже, у безрозмірному вигляді задача зводиться до розв'язання нелінійного рівняння

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = -\frac{\gamma a^2}{T} R(w, H)(w - H) \tag{6}$$

за крайової умови

$$w|_{\Gamma^*} = 0 \tag{7}$$

та умови сталості об'єму (5).

Наголосимо на істотних перевагах розв'язання задачі у безрозмірному вигляді. Передусім постановка задачі у безрозмірних величинах відкриває можливість зробити деякі загальні висновки про поведінку розв'язку ще до розв'язання задачі. Звернемо увагу на те, що у співвідношення (5) – (7) не входить об'єм рідини V_0. Це означає, що розв'язок задачі у безрозмірному вигляді не залежить від значення об'єму рідини. Якщо звернутись до зв'язку розмірного та безрозмірного прогинів, то зразу приходимо до висновку, що прогини мембрани прямо пропорційні об'єму рідини, причому незалежно від того, яка частина поверхні мембрани фактично покрита рідиною.

Інший загальний висновок полягає в тому, що безрозмірний прогин мембрани залежить від однієї комбінації $\alpha = \gamma\alpha^2/T$ характеристик задачі та характерного розміру α, тобто один розв'язок у безрозмірному вигляді охоплює зразу низку задач.

Перемножимо рівності (4) та (5), отримаємо

$$f\int\limits_{\Omega^*} R(w,H)(w-H)d\xi d\eta = R(w,H)(w-H),$$

звідси

$$f = \frac{R(w,H)(w-H)}{\int_{\Omega^*} R(w,H)(w-H)d\xi d\eta}. \quad (8)$$

Після інтегрування обох частин (8) по області Ω^* отримуємо, що

$$\int\limits_{\Omega^*} f d\xi d\eta = 1.$$

Отже, головний вектор безрозмірного тиску рідини на мембрану є стала величина і не залежить від характеристик задачі.

Додамо, що всі безрозмірні змінні набувають значень порядку одиниці, що при числовому розв'язанні сприятиме зменшенню похибок округлення.

Подальше розв'язання задачі та подання результатів здійснюється у безрозмірному вигляді.

Розщеплення зв'язаної задачі. Підкреслимо зв'язаний характер сформульованої задачі: тиск f, який діє на мембрану, залежить від прогинів w мембрани, які, у свою чергу, можна знайти лише за відомого тиску. Побудуємо алгоритм розщеплення такої зв'язаної задачі на послідовність класичних незв'язаних задач.

1. Оскільки головний вектор тиску на мембрану дорівнює одиниці, а площа поверхні має порядок одиниці, то за початкове наближення розподілу безрозмірного тиску візьмемо

$$f^{(0)}(\xi,\eta) \equiv 1.$$

2. Розв'язуємо крайову задачу для $f = f^{(0)}$ і позначимо через $w^{(0)}(\xi,\eta)$ отриманий розв'язок.

3. Із рівняння

$$\int\limits_{\Omega^*} R\big(w^{(0)},H\big)\big(w^{(0)}-H\big)d\xi d\eta = \frac{T}{\gamma a^2} = \frac{1}{\alpha}$$

знаходимо відстань $H^{(0)}$ і утворюємо перше наближення безрозмірного тиску

$$f^{(1)}(\xi,\eta) = \alpha R\big(w^{(0)},H^{(0)}\big)\big(w^{(0)}-H^{(0)}\big).$$

4. Розв'язуємо крайову задачу для $f = f^{(1)}$ і знаходимо $w^{(1)}(\xi,\eta)$.

5. Нехай вже відоме k-е наближення $w^{(k)}(\xi,\eta)$. Розв'язуючи рівняння

$$\int\limits_{\Omega^*} R\big(w^{(k)},H\big)\big(w^{(k)}-H\big)d\xi d\eta = \frac{1}{\alpha},$$

знаходимо $H^{(k)}$ та утворюємо функцію

$$f^{(k)}(\xi,\eta) = \alpha R\left(w^{(k)}, H^{(k)}\right)\left(w^{(k)} - H^{(k)}\right).$$

Наближення $w^{(k+1)}$ знаходимо, розв'язуючи крайову задачу Діріхле для рівняння

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = -f^{(k)}(\xi,\eta).$$

6. Ітераційний процес припиняється, коли

$$\left|H^{(k+1)} - H^{(k)}\right| < \varepsilon,$$

де ε – обраний параметр похибки.

Розв'язання задачі Діріхле на кожному кроці ітераційного процесу ґрунтується на варіаційному формулюванні [2]. Введемо простір С. Л. Соболева $W_2^{(1)}(\Omega^*)$ і виділимо множину $V \subset W_2^{(1)}(\Omega^*)$ допустимих прогинів v, для яких $v|_{\Gamma^*} = 0$. Сформулюємо екстремальну варіаційну задачу: знайти прогин $\widetilde{w} \in V$, для якого функціонал

$$J^{(k)}(v) = \int\limits_{\Omega^*} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2\right] d\Omega^* - \int\limits_{\Gamma^*} f^{(k)} v d\Gamma^* \tag{9}$$

досягає значення точної нижньої грані на множині V. Наближене розв'язання цієї варіаційної задачі складається із двох етапів: дискретизації (переходу до задачі пошуку мінімуму функції багатьох змінних) та розв'язання скінченновимірної задачі безумовної оптимізації.

Дискретизація може здійснюватись за допомогою варіаційно-різницевого методу або методу скінченних елементів. Для пошуку мінімуму функції багатьох змінних було використано метод локальних варіацій [4].

Числові результати. Наведемо результати обчислювального експерименту із дослідження прогинів квадратної мембрани $a \times a$. Аналізувались практична збіжність ітераційного процесу розщеплення зв'язаної задачі та вплив характеристик задачі на деформування мембрани.

Область Ω^* розбивалась скінченно-різницевою сіткою $n \times n$. У межах кожної комірки (рис. 2) похідні наближались скінченно-різницевими відношеннями

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} \approx \frac{w_{i+1,j+1} + w_{i+1,j} - w_{i,j+1} - w_{i,j}}{2\Delta\xi},$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} \approx \frac{w_{i+1,j+1} + w_{i,j+1} - w_{i+1,j} - w_{i,j}}{2\Delta\eta}.$$

Інтеграли в (9) наближались сумою інтегралів за кожною коміркою.

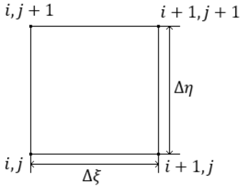


Рис. 2 – **Комірка скінченно-різницевої сітки**

Розв’язання отриманої задачі безумовної мінімізації здійснювалось за допомогою методу локальних варіацій [4]. Для знаходження H на кожній ітерації використовувався метод ділення навпіл.

Наведені результати отримані за розбиття області на 900 комірок. Значення H визначалось із похибкою, що не перевищує 1%.

Встановлено, що розв’язання задачі із похибкою, що не перевищує 1%, достатньо виконати щонайбільше 7 ітерацій (табл. 1).

Таблиця 1 – **Значення $hT/(\gamma V_0)$ на різних послідовних ітераціях у залежності від α**

k \ α	25	30	35	40
1	0	0,0019	0,0071	0,0113
2	0,0054	0,0222	0,0326	0,0416
3	0,0178	0,0346	0,0476	0,0592
4	0,0231	0,0402	0,0544	0,067
5	0,0254	0,0426	0,0574	0,0705
6	0,0264	0,0437	0,0587	0,072
7	0,0268	0,0442	0,0593	0,0727

Відзначимо монотонний характер збіжності форми прогину мембрани (рис. 3). Вплив характерного параметра $\alpha = \gamma\alpha^2/T$ ілюструється на рис. 4 та рис. 5.

Із зростанням α монотонно збільшуються прогини мембрани та площі областей, залитих рідиною. Ці результати відкривають можливість постановки та розв’язання обернених задач визначення необхідного натягу T, за якого максимальний прогин мембрани не перевищує певного критичного значення $w_{\text{кр}}$.

Наприклад, згідно з графіком (рис. 4) максимальний прогин $w = w_{\text{кр}} = 0{,}22$ досягається за значення $\alpha = \alpha_{\text{кр}} = 30$. Тоді для забезпечення умови $w \le w_{\text{кр}}$ натяг T повинен задовольняти нерівність

$$T \ge \frac{\gamma a^2}{\alpha_{\text{кр}}} = \frac{\gamma a^2}{0{,}22} = 4{,}54\gamma a^2.$$

Аналогічну обернену задачу можна сформулювати і стосовно максимально допустимої області, яка знаходиться під рідиною.

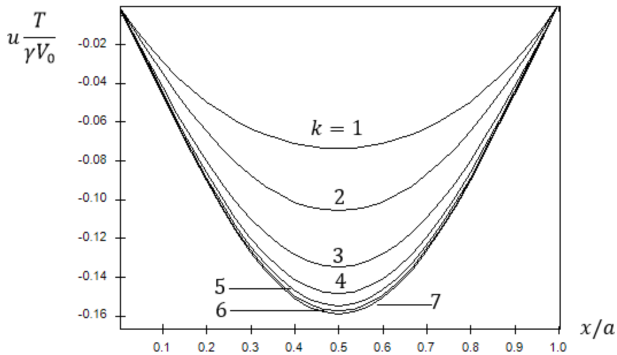


Рис. 3 – **Прогини мембрани уздовж лінії $y = a/2$ на послідовних ітераціях**

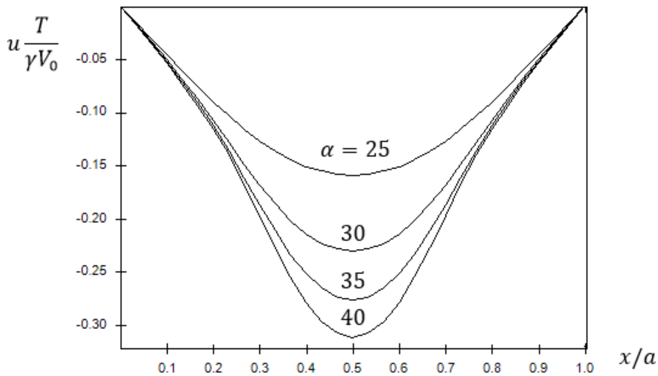


Рис. 4 – **Прогини мембрани уздовж лінії $y = a/2$ за різних значень α**

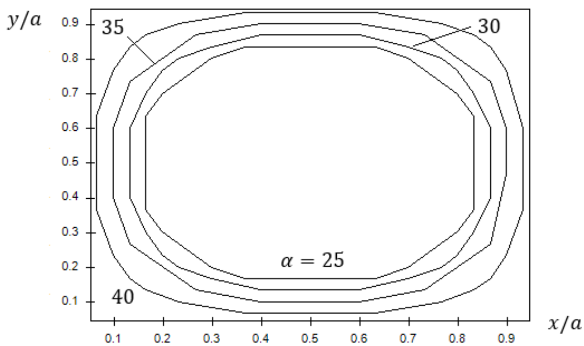


Рис. 5 – **Області поверхні мембрани, залиті рідиною**

Висновки. Запропонована постановка класу зв'язаних задач та підхід до числового розв'язання. Отримані результати дозволяють оцінити значення параметрів, за яких деформування мембрани відбувається у встановлених межах. Методи дослідження можуть бути використані для вивчення поведінки мембранних покрівель під дією опадів. Розвиток запропонованого підходу доцільно спрямувати на дослідження напружено-деформованого стану конструкцій, які знаходяться під дією слідкуючого навантаження.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. ***Власенко Ю.* Е.** Взаємодія важких штампів із багатошаровою пружнопластичною основою, що містить включення/ автореферат на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук / Ю. Е. Власенко. – Дніпропетровськ, 2010. – 20 с.

2. ***Ректорис К.*** Вариационные методы в математической физике и технике / К. Ректорис – М.: Мир, 1985. – 590 с.

3. ***Тихонов А. Н.*** Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 799 с.

4. ***Черноусько Ф. Л.*** Вариационные задачи механики и управления / Ф. Л. Черноусько, Н. В. Баничук. – М.: Наука, 1973. – 240 с.

5. ***Shumelchyk K.*** Coupled problems of interaction of deformable bodies and liquid of high pressure/ K. Shumelchyk, V. Kuzmenko // Mechanics and Control. – Vol. 32, No 4. – AGH University of Science and Technology Press: Krakow. – 2013. – P. 136-142.

С. О. Плашенко, В. И. Кузьменко, д-р. физ.-мат. наук

СВЯЗАННАЯ ЗАДАЧА О ПРОГИБЕ МЕМБРАНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НАЛИТОЙ ЖИДКОСТИ

Предложена постановка задачи о взаимодействии мембраны и жидкости. Давление жидкости зависит от деформации мембраны. Решение базируется на расщеплении связанной задачи на классические краевые задачи. Для численного решения использовался вариационно-разностный метод. Приведены результаты решения конкретной задачи и проведен анализ практической сходимости.

Ключевые слова: *связанная задача, вариационное неравенство, итерационный процесс, уравнение Пуассона, безразмерный вид.*

S. O. Plashenko, V. I. Kuz’menko, Dr. Sci. (Phys.-Math.)

COUPLED PROBLEM OF MEMBRANE DEFLECTION UNDER THE PRESSURE OF POURED LIQUID

Coupled problem about membrane deflection under the liquid poured on it is considered in the article. The mathematical model of the process is described. Iterative process of splitting the related problem is proposed. Model behavior is investigated depending on different parameter values. Results, which show how the iterative process behaves, are added to the article.

Keywords: *coupled problem, variational inequalities, iterative process, the Poisson equation, dimensionless form.*

The coupled problem about membrane deflection is considered. It is supposed that the liquid pressure on the membrane point is proportional to the liquid height above this point. Under the liquid pressure, the membrane deflects, which changes the water position on it. Thus, this problem belongs to the class of coupled problems.

Membrane deflection is described by the coupled Poisson equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{q}{T},$$

where u – membrane deflection in the point (x, y), q – pressure on the membrane point, T – the membrane tensile force.

The water volume, which is located on the membrane is constant and equals V_0. This condition may be described by the following equation:

$$\int_{\Omega} \max(0, u - h)\, d\Omega = V_0,$$

where h – distance from the start position of the membrane to the water level.

Dimensionless view was obtained for the problem:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = -f(\xi, \eta, w, H),$$

$$\int_{\Omega^*} Q(w, H) = \frac{1}{\alpha},$$

α – dimensionless parameter of the problem.

Iterative process of coupled problem splitting was used:

1. The start $f^{(k)}$ approximation is selected $(k = 0)$.
2. The classical problem is solved for $f^{(k)}$. The result $w^{(k)}$ is obtained.
3. The water height $H^{(k)}$ is obtained. The next $f^{(k+1)}$ approximation is counted.
4. The problem is solved for $f^{(k+1)}$ and the $w^{(k+1)}$ result is obtained.
5. Iterative process stops when

$$\left|H^{(k+1)} - H^{(k)}\right| < \varepsilon,$$

where ε – selected parameter.

The problem was solved for different values of α parameter. The iterative process convergence was investigated.

REFERENCES

1. ***Vlasenko U. E.*** Interaction of heavy dies layered elastic plastic base, which contains inclusion / dissertation for the degree of Ph.D. / U. E. Vlasenko. – Dnipropetrovsk, 2010. – 20 p. (in Ukranian).

2. ***Rektoris K.*** Variational methods in mathematical physics and engineering / K. Rektoris – M.: Mir, 1985. – 590 p. (in Russian).

3. ***Tikhonov A. N.*** Equations of mathematical physics / A. N. Tikhonov, A. A. Samarskiy. – M.: MGU publishing house, 1999. – 799 p. (in Russian)

4. ***Chernous'ko F. L.*** Variational problems of mechanics and control / F. L. Chernous'ko, N. V. Banichuk. – M.: Nauka, 1973. – 240 p. (in Russian)

5. ***Shumelchyk K.*** Coupled problems of interaction of deformable bodies and liquid of high pressure/ K. Shumelchyk, V. I. Kuzmenko // Mechanics and Control. – Vol. 32, No 4. – AGH University of Science and Technology Press: Krakow. – 2013. – P. 136–142.

Дніпропетровський національний
університет ім. Олеся Гончара
Дніпро, Україна

Надійшла до редколегії 22.03.2016