

УДК 531; 539.3

А. Д. Шамровский, д-р техн. наук, Ю. А. Лымаренко, канд. техн. наук

ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Предложена дискретная модель сплошной среды. При решении с помощью этой модели задач на растяжение-сжатие и сдвиг получаемые результаты идеально согласуются с теорией упругости. Решение задач на изгиб и кручение предполагает дальнейшую корректировку дискретной модели. Предлагаемый для решения задач метод последовательных перемещений допускает решение задач в геометрически нелинейной постановке.

Ключевые слова: дискретная модель, сплошная упругая среда, растяжение – сжатие, сдвиг, метод последовательных перемещений.

Введение. В механике деформируемого твердого тела на сегодняшний день общепринятым является представление о том, что модель, записанная в виде дифференциальных уравнений, представляет собой наиболее адекватное описание сплошной среды, а решение, получаемое с помощью этой модели, является, соответственно, наиболее точным. Во-первых, в большинстве случаев дифференциальные уравнения не удается решить аналитически, в связи с чем приходится прибегать к различным способам дискретизации для последующего применения какого-либо численного метода, например, метода конечных разностей или конечных элементов. Во-вторых, если бы структура материи была непрерывной, континуальной, то можно было бы воспринимать дифференциальные уравнения как наиболее точное описание реальности, а численные методы – как способ получения приближенного результата для точного решения. В то же время предельный переход изначально предполагает континуальность материи, чего на самом деле нет; не говоря уже об атомно-молекулярной структуре материи любое материальное тело имеет видимую внешнюю грубую структуру (волокна дерева, кристаллы металла, включения композитных материалов). Использование предельного перехода в таких условиях автоматически предполагает сглаживание, усреднение.

В связи с этим достаточно давно, практически вместе с развитием компьютерной техники, появились идеи о том, что можно и нужно решать задачи без использования континуальных моделей, строя с самого начала дискретные модели исследуемых явлений [1, 2, 10]. Однако такие идеи не получили широкого развития. Основным здесь, по-видимому, является трудность конкурирования с прекрасно развитыми положениями высшей математики.

Однако те результаты, которые удается получить при решении задач с помощью дискретных моделей, подтверждают эффективность дискретного моделирования с точки зрения получения как качественных, так и количественных результатов [4, 5, 11, 12]. Настоящая статья продолжает серию работ [6, 7, 9] по построению дискретных моделей сплошной среды, распространяя дискретный подход на случай решения задач теории упругости в трехмерной постановке.

Определение упругих характеристик дискретной модели. В качестве структурного элемента предлагаемой дискретной модели предлагается использовать прямоугольный параллелепипед, в углах которого находятся точечные массы, соединенные упругими связями (рис. 1). Для наглядности на приведенном рисунке часть упругих связей изображена пунктиром.

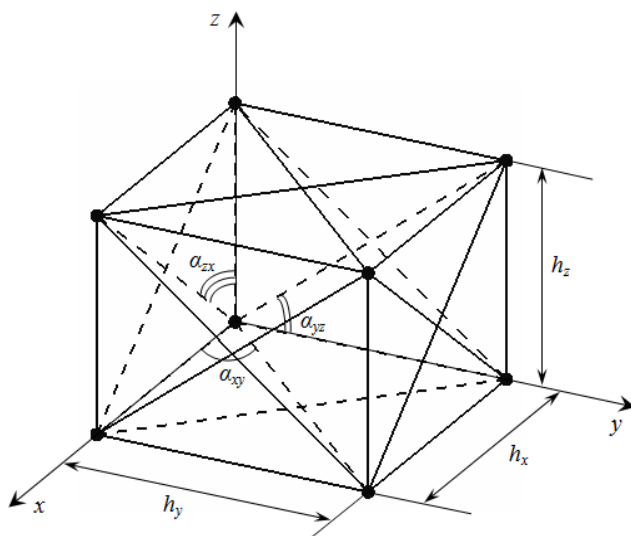


Рис. 1 – Дискретная модель сплошной среды

Выразим жесткостные характеристики дискретной модели через упругие характеристики моделируемого сплошного континуума, модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν . Для этого сравним уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние сплошной среды, с аналогами этих уравнений для дискретной модели.

Соотношения линейно-упругого закона в пространственном случае имеют вид [3]:

$$\sigma_x = B \left(\frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial v}{\partial y} + c \frac{\partial w}{\partial z} \right); \quad \tau_{yz} = G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right);$$

$$\sigma_y = B \left(\frac{\partial v}{\partial y} + c \frac{\partial w}{\partial z} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right); \quad \tau_{zx} = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right); \quad (1)$$

$$\sigma_z = B \left(\frac{\partial w}{\partial z} + c \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial v}{\partial y} \right); \quad \tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right);$$

где $B = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$; $c = \frac{\nu}{1-\nu}$.

Составим аналоги уравнений (1) для дискретной модели. Для этого рассмотрим отдельно состояния растяжения-сжатия и сдвига.

Растяжение – сжатие. Пусть на гранях элемента заданы равномерно-распределенные нормальные напряжения σ_x , σ_y , σ_z . Заменим распределенную внешнюю нагрузку на сосредоточенные силы, приложенные в углах параллелепипедного дискретного элемента:

$$T_x = \frac{1}{4} \sigma_x h_y h_z, \quad T_y = \frac{1}{4} \sigma_y h_x h_z, \quad T_z = \frac{1}{4} \sigma_z h_x h_y. \quad (2)$$

Рассмотрим реакции стержней, направленных вдоль соответствующих осей координат: R_x , R_y , R_z , и диагональных стержней, расположенных на боковых гранях элемента и наклоненных к осям координат под углами α_{xy} , α_{yz} , α_{zx} : R_{xy} , R_{yz} , R_{zx} . Для любого из узлов справедливы уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} R_x - T_x + R_{xy} \cdot \cos \alpha_{xy} + R_{zx} \cdot \sin \alpha_{zx} &= 0; \\ R_y - T_y + R_{yz} \cdot \cos \alpha_{yz} + R_{xy} \cdot \sin \alpha_{xy} &= 0; \\ R_z - T_z + R_{zx} \cdot \cos \alpha_{zx} + R_{yz} \cdot \sin \alpha_{yz} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{xy} &= \frac{h_x}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}}; & \sin \alpha_{xy} &= \frac{h_y}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}}; \\ \cos \alpha_{yz} &= \frac{h_y}{\sqrt{h_y^2 + h_z^2}}; & \sin \alpha_{yz} &= \frac{h_z}{\sqrt{h_y^2 + h_z^2}}; \\ \cos \alpha_{zx} &= \frac{h_z}{\sqrt{h_z^2 + h_x^2}}; & \sin \alpha_{zx} &= \frac{h_x}{\sqrt{h_z^2 + h_x^2}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим также перемещения узлов (рис. 2).

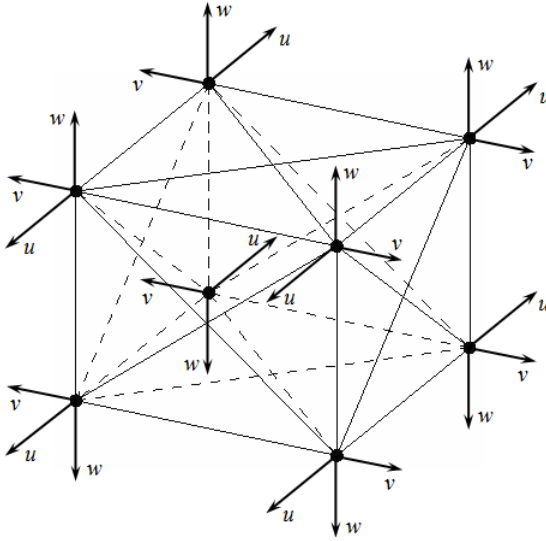


Рис. 2 – Перемещения узлов при деформации растяжения-сжатия

Абсолютные деформации стержней будут равны:

$$\begin{aligned}
 \Delta_x &= 2u, & \Delta_{yz} &= 2(v \cos \alpha_{yz} + w \sin \alpha_{yz}); \\
 \Delta_y &= 2v, & \Delta_{zx} &= 2(w \cos \alpha_{zx} + u \sin \alpha_{zx}); \\
 \Delta_z &= 2w, & \Delta_{xy} &= 2(u \cos \alpha_{xy} + v \sin \alpha_{xy}).
 \end{aligned} \tag{4}$$

Обозначим жесткости стержней, направленных вдоль осей координат, через C_x, C_y, C_z , а диагональных стержней – через $D_{xy}^v, D_{yz}^v, D_{zx}^v$, где верхний индекс “v”, по аналогии с плоским случаем [7], указывает на то, что эти жесткости справедливы для случая растяжения-сжатия дискретного элемента. В результате для жесткостей будем иметь:

$$\begin{aligned}
 R_x &= C_x \Delta_x = 2C_x u; & R_{yz} &= D_{yz}^v \Delta_{yz} = 2D_{yz}^v (v \cos \alpha_{yz} + w \sin \alpha_{yz}); \\
 R_y &= C_y \Delta_y = 2C_y v; & R_{zx} &= D_{zx}^v \Delta_{zx} = 2D_{zx}^v (w \cos \alpha_{zx} + u \sin \alpha_{zx}); \\
 R_z &= C_z \Delta_z = 2C_z w; & R_{xy} &= D_{xy}^v \Delta_{xy} = 2D_{xy}^v (u \cos \alpha_{xy} + v \sin \alpha_{xy}).
 \end{aligned} \tag{5}$$

Используя общепринятый для теории упругости переход от локальных параметров, описывающих деформирование сплошной среды, к глобальным, описывающим деформирование дискретного элемента [2]:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta_x}{h_x} = \frac{2u}{h_x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta_y}{h_y} = \frac{2v}{h_y}; \quad \varepsilon_z = \frac{2w}{h_z}, \quad (6)$$

и подставляя (2), (5) и (6) в (3), будем иметь:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{4h_x}{h_y h_z} \left(C_x + D_{xy}^v \cos^2 \alpha_{xy} + D_{zx}^v \sin^2 \alpha_{zx} \right) \varepsilon_x + \\ &+ \frac{2}{h_z} D_{xy}^v \sin(2\alpha_{xy}) \varepsilon_y + \frac{2}{h_y} D_{zx}^v \sin(2\alpha_{zx}) \varepsilon_z; \\ \sigma_y &= \frac{4h_y}{h_z h_x} \left(C_y + D_{yz}^v \cos^2 \alpha_{yz} + D_{xy}^v \sin^2 \alpha_{xy} \right) \varepsilon_y + \\ &+ \frac{2}{h_x} D_{yz}^v \sin(2\alpha_{yz}) \varepsilon_z + \frac{2}{h_z} D_{xy}^v \sin(2\alpha_{xy}) \varepsilon_x; \\ \sigma_z &= \frac{4h_z}{h_x h_y} \left(C_z + D_{zx}^v \cos^2 \alpha_{zx} + D_{yz}^v \sin^2 \alpha_{yz} \right) \varepsilon_z + \\ &+ \frac{2}{h_y} D_{zx}^v \sin(2\alpha_{zx}) \varepsilon_x + \frac{2}{h_x} D_{yz}^v \sin(2\alpha_{yz}) \varepsilon_y. \end{aligned}$$

Сопоставляя полученные выражения с соотношениями теории упругости (1), получаем систему уравнений относительно неизвестных жесткостей C_x , C_y , C_z , D_{xy}^v , D_{yz}^v , D_{zx}^v , в результате решения которой находим:

$$\begin{aligned} C_x &= \frac{B}{4} \left(\frac{h_y h_z}{h_x} - c \frac{h_z h_x}{h_y} - c \frac{h_x h_y}{h_z} \right); \quad D_{yz}^v = \frac{Bch_y (h_y^2 + h_z^2)}{4h_y h_z}; \\ C_y &= \frac{B}{4} \left(\frac{h_z h_x}{h_y} - c \frac{h_x h_y}{h_z} - c \frac{h_y h_z}{h_x} \right); \quad D_{zx}^v = \frac{Bch_y (h_z^2 + h_x^2)}{4h_z h_x}; \\ C_z &= \frac{B}{4} \left(\frac{h_x h_y}{h_z} - c \frac{h_y h_z}{h_x} - c \frac{h_z h_x}{h_y} \right); \quad D_{xy}^v = \frac{Bch_y (h_x^2 + h_y^2)}{4h_x h_y}. \end{aligned} \quad (7)$$

Сдвиг. Рассмотрим состояние чистого сдвига в плоскости uOz (рис. 4). Соответствующая модель представлена на рисунке 3. В этом случае касательная нагрузка заменяется на следующие сосредоточенные силы:

$$Q_y = \frac{1}{4} \tau_{yz} h_y h_x; \quad Q_z = \frac{1}{4} \tau_{yz} h_z h_x. \quad (8)$$

В вертикальных и горизонтальных стержнях реакции не возникают; в диагональных стержнях, расположенных в плоскости xOz , реакции противоположны по знаку. Для любого из узлов справедливо единственное уравнение равновесия:

$$R_{yz} = Q_y \cos \alpha_{yz} + Q_z \sin \alpha_{yz} . \quad (9)$$

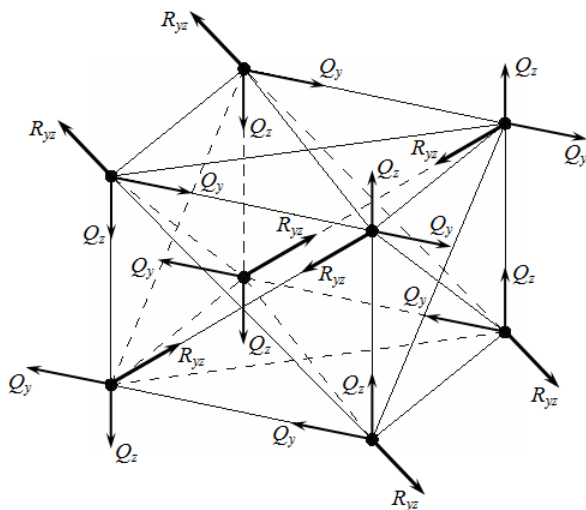


Рис. 3 – Реакции стержней при сдвиге

Рассмотрим перемещения узлов (рис. 4). Деформации диагональных стержней равны

$$\Delta_{yz} = 2(v \cos \alpha_{yz} + w \sin \alpha_{yz}) . \quad (10)$$

Обозначим жесткости этих стержней через D_{yz}^γ , где верхний индекс « γ », по аналогии с плоским случаем [7], указывает на то, что эти жесткости справедливы в случае сдвиговой деформации дискретного элемента. Для соответствующих реакций имеем

$$R_{yz} = D_{yz}^\gamma \Delta_{yz} = 2D_{yz}^\gamma (v \cos \alpha_{yz} + w \sin \alpha_{yz}) . \quad (11)$$

Вследствие перемещений v вертикальный стержень поворачивается на угол

$$\gamma_1 = \frac{2v}{h_z} . \quad (12)$$

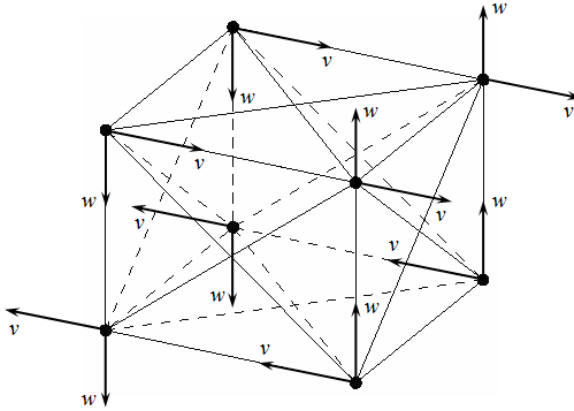


Рис. 4 – Перемещения узлов при сдвиговой деформации в плоскости yOz

Перемещения w обуславливают поворот горизонтального стержня на угол

$$\gamma_2 = 2w/h_y. \quad (13)$$

Подставляя (12) и (13) в (11) и результат, совместно с (8), в (9), получаем

$$\tau_{yz} = -\frac{2D_{yz}^\gamma h_y h_z}{h_y^2 + h_z^2} (\gamma_1 + \gamma_2). \quad (14)$$

Сопоставление полученного выражения с соответствующим соотношением из (1) приводит к уравнению относительно жесткости D_{yz}^γ , в результате решения которого получаем

$$D_{yz}^\gamma = \frac{Gh_x (h_y^2 + h_z^2)}{4h_y h_z}. \quad (15)$$

Аналогично, рассматривая деформацию чистого сдвига в двух других плоскостях, можно получить выражения для жесткостей D_{xy}^γ , D_{zx}^γ :

$$D_{xy}^\gamma = \frac{Gh_z (h_x^2 + h_y^2)}{4h_x h_y}; \quad D_{zx}^\gamma = \frac{Gh_y (h_z^2 + h_x^2)}{4h_z h_x}.$$

Сравнивая полученные выражения для жесткостей с (7) видим, что, так же, как и в плоском случае, при данном способе моделирования жесткости диагональных стержней зависят от вида деформации элемента. То есть указанные стержни следует воспринимать не как физические конструкции, а как математические модели, отражающие взаимодействия в

прямоугольном элементе. Жесткости с индексом « ν » отражают эффект Пуассона – сжатие элемента в поперечных направлениях при его растяжении в продольном направлении. Жесткости с индексом « γ » отвечают за сдвиг. Различие жесткостей диагональных стержней диагональной модели обусловлено тем, что эти жесткости отвечают за явления, имеющие различную физическую природу.

Анализ полученных результатов. Сравним результаты решения задач на растяжение-сжатие вдоль одной из осей и сдвиг в одной из плоскостей, полученные с помощью теории упругости и построенной дискретной модели. При решении задач с помощью дискретной модели предлагается использовать протестированный и хорошо себя зарекомендовавший как в плоском, так и в пространственном случае, метод последовательных перемещений [8].

На рис. 5 и 6 тонкой линией изображены контуры деформированного элемента сплошной среды, полученные на основе решения системы уравнений (11), кружками – положения угловых точек, найденные с помощью дискретной модели. Положения вершин в приведенных случаях совпадают.

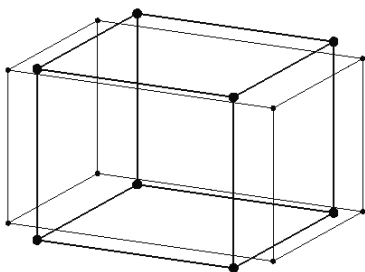


Рис. 5 – Деформация растяжения-сжатия

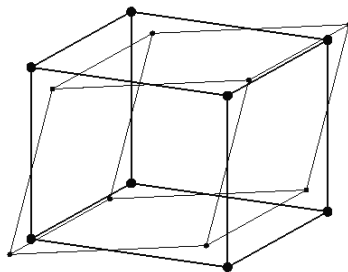


Рис. 6 – Сдвиговая деформация

Выводы. Разработана дискретная модель сплошной среды для решения пространственных статических задач теории упругости. Предложенная модель в случае классических задач растяжения – сжатия и сдвига дает результаты, идеально согласующиеся с теорией упругости. Предлагаемый для решения задач метод последовательных перемещений допускает также решение задач в геометрически нелинейной постановке. В то же время, проводя аналогию с плоским случаем, можно ожидать, что решение задач на изгиб и кручение внесет корректировки в предлагаемую модель, что и будет целью дальнейших исследований в направлении построения дискретных моделей упругих сред.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Косевич А. М.** Основы механики кристаллической решетки / А. М. Косевич. – М.: Наука, 1972. – 342 с.
2. **Кунин И. А.** Теория упругих сред с микроструктурой: нелокальная теория упругости / И. А. Кунин. – М.: Наука, 1975. – 415 с.
3. **Новацкий В.** Теория упругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 872 с.

4. **Рушицкий Я. Я.** Хвилі в матеріалах з мікроструктурою / Я. Я. Рушицкий, Ц. І. Цурпал. – К.: Ін-т механіки НАНУ, 1998. – 377 с.

5. **Шамровский А. Д.** Дискретное моделирование рабочего колеса поворотноромашинной гидротурбины / А. Д. Шамровский, В. А. Шевченко, Ю. А. Лымаренко // Надійність і довговічність машин і споруд. – 2011. – Вип. 34. – С. 100–108.

6. **Шамровский А. Д.** Напряжения в деформированном дискретном элементе / А. Д. Шамровский, Д. Н. Колесник // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. Сер.: Прикладная механика. – 2013. – Вип. 3/7 (63). – С. 12–15.

7. **Шамровский А. Д.** Решение плоских статических задач механики деформируемого твердого тела при помощи дискретных моделей, получаемых на основе экспериментальных данных / А. Д. Шамровский, Ю. А. Лымаренко, Д. Н. Колесник // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: Ліра. – 2011. – Вип. 17. – С. 274–288.

8. **Шамровський О. Д.** Застосування методу послідовних переміщень до розрахунку тривимірних стрижневих конструкцій / О. Д. Шамровський, Д. М. Колесник, Ю. О. Лимаренко, В. В. Кривуляк // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2009. – № 2. – С. 100–104.

9. **Шамровський О. Д.** Дискретна модель плоского елемента скінченних розмірів для ортотропного середовища / О. Д. Шамровський, Т. О. Міняйло // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла. – Дніпропетровськ: Ліра. – 2012. – Вип. 13. – С. 428–436.

10. **Hrennikoff A. P.** Solution of problems of elasticity by the framework method / A. P. Hrennikoff // Journal of Applied Mechanics. – 1941. – Vol. 8. – Pp. A169–A175.

11. **Metrikine A. V.** One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure. Part 1: Generic formulation / A. V. Metrikine, H. Askes // European Journal of Mechanics A/Solids. – 2002. – Vol. 21. – P. 555–572.

12. **Suiker A. S. J.** Micro-mechanical modelling of granular materials – Part 2 – Plane wave propagation in infinite media / A. S. J. Suiker, R. de Borst, C. S. Chang // Acta Mechanica. – 2001. – Vol. 149. – P. 181–200.

О. Д. Шамровський, д-р техн. наук, Ю. О. Лимаренко, канд. техн. наук

ДИСКРЕТНІ МОДЕЛІ ДЛЯ ПРОСТОРОВИХ СТАТИЧНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

В роботі запропоновано дискретну модель суцільного середовища. При розв'язанні за допомогою цієї моделі задач на розтяг – стиск та зсув отримані результати ідеально узгоджуються з теорією пружності. Розв'язання задач на гин та кручення передбачає подальше корегування дискретної моделі. Запропонований для розв'язання задач метод послідовних переміщень дозволяє розв'язувати задачі в геометрично нелінійній постановці.

Ключові слова: дискретна модель, суцільне пружне середовище, розтяг – стиск, зсув, метод послідовних переміщень.

A. D. Shamrovskii, Dr. Sci. (Tech.), Yu. A. Lymarenko, PhD (Tech.)

DISCRETE MODELS FOR THREE-DIMENSIONAL ELASTICITY THEORY STATIC PROBLEMS

The discrete model of solid medium is offered in the paper. When performing analyses of tension and shear problems the obtained results are ideally coordinated with the theory of elasticity. Solving problems of bend and torsion implies further

correction of the model. Proposed method of consequent displacements allows solving problems under geometrically nonlinear statement.

Keywords: *discrete model, elastic continuum, tension, shear, method of consequent displacements.*

Experience in solving mechanics problems using discrete models confirms the effectiveness of discrete modelling in the view of obtaining both qualitative and quantitative results [1, 2, 4, 5, 10-12]. This paper resumes the series of papers [6, 7, 9] regarding the construction of discrete models of elastic continuum. Discrete approach is applied to the solving the problems under three-dimensional statement.

The rectangular parallelepiped is proposed to use as a structural element of the proposed discrete model. The point masses connected by elastic links are located in the corner of the parallelepiped. To express the stiffness parameters of the discrete model as the function of the elastic characteristics of the modeling solid continuum – Young's modulus E and Poisson's ratio ν , the comparison of the equations describing the stress strain state of the continuum [3] with analogues of these equations for the discrete model is carried out in the paper. The cases of the tension-compression and shear deformation are considered separately.

By comparing the obtained expressions for the stiffness of diagonal links for tension-compression and shear deformations, it will be noticed that just as in the plane case [7] under this method of modeling the stiffnesses of the diagonal links depend on the type of element deformation. That is, these links should not be viewed as the physical structure but as a mathematical model of interactions in a discrete element.

Thus, the discrete model of solid medium for a three-dimensional elasticity theory static problems is developed. When performing analyses of tension and shear problems the results obtained with the help of discrete model are ideally coordinated with the theory of elasticity. The proposed method of consequent displacements [8] allows solving problems under geometrically nonlinear statement.

REFERENCES

1. **Kosevich A. M.** The fundamentals of crystal lattice mechanics / A. M. Kosevich. – M.: Nauka, 1972. – 342 p. (in Russian).
2. **Kunin I. A.** Theory of elastic medium with microstructure: non-local theory of elasticity / I. A. Kunin. – M.: Nauka, 1975. – 415 p. (in Russian).
3. **Novatskii V.** Theory of elasticity / V. Novatskii. – M.: Mir, 1975. – 872 p. (in Russian).
4. **Ruschitskii Ya. Ya.** Waves in materials with microstructure / Ya. Ya. Ruschitskii, S. I. Tsurpal. – K.: S. P. Timoshenko Institute of Mechanics, 1998. – 377 p. (in Ukrainian)
5. **Shamrovskii A. D.** Discrete modeling of adjustable-blade turbine wheel / A. D. Shamrovskii, V. A. Shevchenko, Y. A. Lymarenko // Reliability and life of machines and structures. – 2011. – Vol. 34. – P. 100–108. (in Russian).

6. **Shamrovskii A. D.** Stresses in deformed discrete element / A. D. Shamrovskii, D. N. Kolesnik // Eastern-European journal of enterprise technologies: Applied mechanics. – 2012. – Vol. 3/7 (57). – P. 12–15. (in Russian).

7. **Shamrovskii A. D.** Solving of plane static problems of mechanics of deformable solids with the help of discrete models that have been obtained from experimental data / A. D. Shamrovskii, Y. A. Lymarenko, D. N. Kolesnik // Problems of computational mechanics and strength of structures. – Dnipropetrovsk: Lira. – 2011. – Vol. 17. – P. 274–288. (in Russian).

8. **Shamrovskii O. D.** Using of successive approximations method for calculating of tridimensional beam structures / O. D. Shamrovskii, D. M. Kolesnik, Y. O. Lymarenko, V. V. Krivuliak // Innovative materials and technologies in metallurgy and mechanical engineering. – 2009. – № 2. – P. 100–104. (in Ukrainian)

9. **Shamrovskii O. D.** Discrete model of plane size element for orthotropic continuum / O. D. Shamrovskii, T. O. Miniailo // Problems of Computational mechanics and strength of structures. – D.: Lira. – 2014. – Vol. 23. – P. 263–272. (in Ukrainian)

10. **Hrennikoff, A. P.** Solution of problems of elasticity by the framework method / A. P. Hrennikoff // Journal of Applied Mechanics. – 1941. – Vol. 8. – P. A169–A175.

11. **Metrikine A. V.** One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure. Part 1: Generic formulation / A. V. Metrikine, H. Askes // European Journal of Mechanics A/Solids. – 2002. – Vol. 21. – P. 555–572.

12. **Suiker A. S. J.** Micro-mechanical modelling of granular materials – Part 2 – Plane wave propagation in infinite media / A. S. J. Suiker, R. de Borst, C. S. Chang // Acta Mechanica. – 2001. – Vol. 149. – P. 181–200.

*Запорожская государственная
инженерная академия,
Запорожье, Украина*

Поступила в редколлегию 22.06.16