

УДК 539.3

А. Є. Шевельова, канд. фіз.-мат. наук, С. О. Смірнов, д-р фіз.-мат. наук

ВІДКРИТІ ТА ЗАКРИТІ ЗОНИ ТРІЩИНИ МІЖ ДВОМА П'ЕЗОМАГНІТНИМИ МАТЕРІАЛАМИ В КОМБІНОВАНОМУ ПОЛІ НАПРУЖЕНЬ

Досліджено міжфазну тріщину в п'єзомагнітному біматеріалі з зонами передруйнування, яка знаходиться під дією стискальних та зсувних напружень на віддаленні від неї. Сформульована крайова задача Діріхле – Рімана, для якої вписано точний аналітичний розв'язок. Знайдені довжини зон відкриття та закриття тріщини, стрибки переміщень у залежності від інтенсивності нормального та зсувного напруження на нескінченності і механічних властивостей матеріалів.

Ключові слова: міжфазна тріщина, п'єзомагнітний біматеріал, кусково-аналітична функція, стрибки переміщень.

Вступ. В різних областях машинобудування, автоматики, обчислювальної техніки важливе прикладне значення мають функціональні елементи з п'єзомагнетиків. П'єзомагнетики – це матеріали, які характеризуються тим, що при їх деформуванні виникає магнітне поле, пропорційне деформації [1]. Має місце також і протилежна ситуація, пов'язана з виникненням деформації під дією магнітного поля.

П'єзомагнітні матеріали мають багато спільних рис із п'єзоелектричними матеріалами. Зокрема, при їх виготовленні та експлуатації мають місце тріщини в областях поділу різних компонент. Слід відзначити, що для ізотропних та п'єзоелектричних матеріалів міжфазні тріщини в полі стискальних та зсувних напружень вивчались в [2–4], а для п'єзомагнітних матеріалів дослідження тріщин між різнорідними складовими практично відсутні. В даній роботі і проводиться дослідження міжфазної тріщини між двома п'єзомагнітними матеріалами. Основна увага акцентована на випадку стискального та зсувного напружень.

Загальний розв'язок основних рівнянь. Матеріальні співвідношення для лінійного п'єзомагнітного матеріалу у відсутності об'ємних сил можуть бути представленими у вигляді [1]

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - h_{ij}H_i, \quad B_i = h_{ikl}\varepsilon_{kl} + \gamma_{ik}H_k, \quad (1)$$

$$\sigma_{j,i} = 0, \quad B_{i,i} = 0, \quad \varepsilon_{ij} = 0,5(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad H_i = -\phi_{,i}, \quad (2)$$

де u_k , ϕ , σ_{ij} , B_i – пружні переміщення, магнітний потенціал, напруження і магнітні зміщення (магнітна індукція), відповідно; C_{ijkl} , h_{ikl} , γ_{ik} – пружні, п'єзомагнітні константи та магнітні проникності, відповідно.

Розглянемо плоску деформацію біматеріального простору, скомпонованого з трансверсально-ізотропних п'єзомагнітних матеріалів з площиною ізоτροпії, ортогональною осі x_3 , і з міжфазною тріщиною на межі поділу матеріалів. Тоді, аналогічно [5], для механічних та магнітних компонент будуть справедливі подання:

$$\langle \mathbf{V}'(x_1, 0) \rangle = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1); \quad (3)$$

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{G}\mathbf{W}^+(x_1) - \bar{\mathbf{G}}\mathbf{W}^-(x_1) \quad (4)$$

з матрицею \mathbf{G} , структуру якої наведено нижче. При цьому $\mathbf{G} = \mathbf{B}^{(1)}\mathbf{D}^{-1}$, $\mathbf{D} = \mathbf{A}^{(1)} - \bar{\mathbf{A}}^{(2)}(\bar{\mathbf{B}}^{(2)})^{-1}\mathbf{B}^{(1)}$, $\mathbf{W}^+(x_1) = \mathbf{W}(x_1 + i0)$, $\mathbf{W}^-(x_1) = \mathbf{W}(x_1 - i0)$, $\mathbf{A}^{(m)}$, $\mathbf{B}^{(m)}$ – відомі матриці матеріальних констант [6] верхнього ($m = 1$) і нижнього ($m = 2$) півпросторів відповідно; $\mathbf{V} = \{u_1, u_2, u_3, \phi\}^T$, $\mathbf{t} = \{\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}, B_3\}^T$. Риска означає комплексне спряження. Невідома вектор-функція $\mathbf{W}(z) = \{W_1(z), W_2(z), W_3(z), W_4(z)\}^T$ аналітична у всій площині, включаючи склеєні частини інтерфейсу матеріалів.

Надалі будемо розглядати найбільш важливі для практики трансверсально-ізотропні п'єзомагнітні матеріали з напрямком поляризації x_3 . Біматеріальна матриця \mathbf{G} для цих матеріалів розмірності 4×4 має вигляд

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} ig_{11} & 0 & g_{13} & g_{14} \\ 0 & ig_{22} & 0 & 0 \\ g_{31} & 0 & ig_{33} & ig_{34} \\ g_{41} & 0 & ig_{43} & ig_{44} \end{bmatrix},$$

де всі g_{ij} дійсні і справедливі такі рівності: $g_{31} = -g_{13}$, $g_{41} = -g_{14}$, $g_{43} = g_{34}$. Матриця \mathbf{G} і вектор-функція $\mathbf{W}(z)$ зв'язані з матрицею \mathbf{H} та вектор-функцією $\mathbf{h}(z)$ [6] такими співвідношеннями: $i\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{H}$, $\mathbf{W}(z) = -i\mathbf{H}\mathbf{h}(z)$.

Подання (3) та (4) забезпечують виконання умови

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{t}^{(2)}(x_1, 0) \text{ для } x_1 \in (-\infty, \infty). \quad (5)$$

Постановка задачі. Розглядається тунельна міжфазна тріщина $c \leq x_1 \leq b$, $x_3 = 0$ між двома напівнескінченими п'єзомагнітними просторами $x_3 > 0$ та $x_3 < 0$. Властивості матеріалів задаються матрицями $C_{ijkl}^{(1)}$, $h_{ij}^{(1)}$, $\gamma_{ij}^{(1)}$ (для $x_3 > 0$) та $C_{ijkl}^{(2)}$, $h_{ij}^{(2)}$, $\gamma_{ij}^{(2)}$ (для $x_3 < 0$) і відповідають вказаному вище класу матеріалів. Півпростори навантажуються на нескінченності рівномірними напруженнями $\sigma_{33}^{(j)} = \sigma^\infty$, $\sigma_{13}^{(j)} = \tau^\infty$, $\sigma_{11}^{(j)} = \sigma_{xy}^\infty$ та рівномірними магнітними індукціями $B_3^{(j)} = b^\infty$, $B_1^{(j)} = B_{xy}^\infty$, які забезпе-

чують виконання умов неперервності на границі поділу матеріалів. Оскільки навантаження не залежить від координати x_2 , то має місце плоска деформація в площині (x_1, x_3) (рис. 1).

Основна увага в цій задачі присвячена випадку зсувного в площині деформації і стискаючого нормального навантаження. Будемо вважати, що міжфазна тріщина відкрита для $x_1 \in [c, a] = L_1$ в той час, як її береги контактують без тертя для $x_1 \in (a, b) = L_2$, а положення точки a будемо вважати довільним. Вважається, що магнітний потенціал є неперервним вздовж всієї границі.

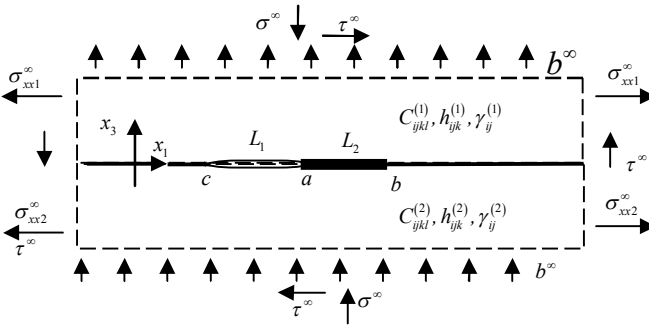


Рис. 1. – Тріщина між двома п'єзомагнітними матеріалами з відкритою зоною (c, a) та закритою зоною (a, b)

Таким чином, граничні умови на інтерфейсі мають вигляд

$$\langle \mathbf{V} \rangle = 0, \langle \mathbf{t} \rangle = 0 \text{ для } x_1 \in L, \quad (6)$$

$$\sigma_{13}^{\pm} = 0, \sigma_{33}^{\pm} = 0, \langle \phi \rangle = 0, \langle B_3 \rangle = 0 \text{ для } x_1 \in L_1, \quad (7)$$

$$\langle u_3 \rangle = 0, \langle \phi \rangle = 0, \sigma_{13}^{\pm} = 0, \langle \sigma_{33} \rangle = 0, \langle B_3 \rangle = 0 \text{ для } x_1 \in L_2. \quad (8)$$

Розв'язання задачі для довільного положення точки «а». Використовуючи подання (3), (4), враховуючи, що $\langle \phi(x_1) \rangle = 0$ для $-\infty < x_1 < \infty$, приходимо до рівнянь

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + im_j \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = t_j [F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1)] + \sigma_0, \quad (9)$$

де

$$F_j(z) = W_1(z) + iS_j W_2(z), \quad j = 1, 2, \quad (10)$$

$$\gamma_j = -\left(g_{31} + m_j g_{11}\right) / t_j, \quad t_j = g_{31} - m_j g_{11}, \quad m_{1,2} = \mp \sqrt{-\frac{g_{31} g_{33}}{g_{11} g_{13}}}, \quad S_j = -m_j,$$

$$\sigma_0 = -g_{34} \Delta_1^{-1} \left(g_{43} \sigma^{\infty} - g_{33} b^{\infty} \right), \quad d^0 = -g_{44} \Delta_1^{-1} \left(g_{43} \sigma^{\infty} - g_{33} b^{\infty} \right),$$

$$\Delta_1 = g_{33}g_{44} - g_{43}g_{34} \quad (11)$$

Використовуючи подання (3), (4) і враховуючи структуру матриці \mathbf{G} , магнітний потік для будь-якої точки інтерфейсу може бути знайдено як

$$B_3^{(1)}(x_1, 0) = g_{33}^{-1} \left\{ g_{43} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) - (g_{31}g_{43} - g_{41}g_{33}) \langle u_1'(x_1) \rangle - g_{43} \sigma^\infty + g_{33} b^\infty \right\} \quad (12)$$

Введення нових функцій $\Phi_j(z)$

$$\Phi_j(z) = F_j(z) + \Phi_j^0, \quad \Phi_j^0 = \frac{\sigma_0}{t_j(1 + \gamma_j)} \quad (j=1, 2), \quad (13)$$

які мають такі ж властивості, як і $F_j(z)$, дозволяє переписати рівняння (9), (10) в такій формі:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + im_j \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = t_j [\Phi_j^+(x_1) + \gamma_j \Phi_j^-(x_1)], \quad (14)$$

$$\langle u_1'(x_1) \rangle + iS_j \langle u_3'(x_1) \rangle = \Phi_j^+(x_1) - \Phi_j^-(x_1). \quad (15)$$

Використовуючи отримані рівняння і задовольняючи граничні умови на інтерфейсі (7), (8), приходимо до комбінованої граничної задачі Діріхле – Римана для кусково-голоморфної функції $\Phi_j(z)$

$$\Phi_j^+(x_1) + \gamma_j \Phi_j^-(x_1) = 0 \quad \text{для } x_1 \in L_1, \quad (16)$$

$$\text{Im } \Phi_j^\pm(x_1) = 0 \quad \text{для } x_1 \in L_2. \quad (17)$$

Умова на нескінченності впливає з подання (14) і має вигляд

$$\Phi_j(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \tilde{\sigma}_j - i\tilde{\tau}_j, \quad (18)$$

де $\tilde{\sigma}_j = \sigma^\infty / r_j$, $\tilde{\tau}_j = -m_j \tau^\infty / r_j$, $r_j = t_j(1 + \gamma_j)$.

Розв'язок комбінованої крайової задачі Діріхле – Римана (16), (17) для жорсткого штампу отриманий в [7]. Стосовно задачі про міжфазну тріщину з контактною зоною цей розв'язок знайдений в [8]. Використовуючи цю форму розв'язку, стрибки похідних від переміщень на інтерфейсі можна записати у вигляді (при $j = 1$):

для $x_1 \in L_1$:

$$\langle u_1'(x_1) \rangle + iS_1 \langle u_3'(x_1) \rangle = 2\sqrt{\alpha} \left[\frac{P(x_1)}{\sqrt{b-x_1}} - i \frac{Q(x_1)}{\sqrt{a-x_1}} \right] \frac{\exp[i\varphi^*(x_1)]}{\sqrt{x_1-c}}, \quad (19)$$

для $x_1 \in L_2$:

$$\langle u_1'(x_1) \rangle = \frac{2}{\sqrt{x_1-c}} \left[\frac{P(x_1)}{\sqrt{b-x_1}} \text{ch } \varphi_0(x_1) + \frac{Q(x_1)}{\sqrt{x_1-a}} \text{sh } \varphi_0(x_1) \right], \quad (20)$$

$$P(z) = C_1 z + C_2, \quad Q(z) = D_1 z + D_2, \quad (21)$$

$$X_1(z) = i e^{i\varphi(z)} / \sqrt{(z-c)(z-b)}, \quad X_2(z) = e^{i\varphi(z)} / \sqrt{(z-c)(z-a)},$$

$$\varphi(z) = 2\varepsilon \ln \frac{\sqrt{(b-a)(z-c)}}{\sqrt{l(z-a)} + \sqrt{(a-c)(z-b)}}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \gamma_1,$$

$$C_1 = -\bar{\tau} \cos \beta - \bar{\sigma} \sin \beta, \quad D_1 = \bar{\sigma} \cos \beta - \bar{\tau} \sin \beta,$$

$$C_2 = -\frac{c+b}{2} C_1 - \beta_1 D_1, \quad D_2 = \beta_1 C_1 - \frac{c+a}{2} D_1. \quad (22)$$

Формули для напружень на різних частинах інтерфейсу матеріалів мають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + im_1 \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) &= \left[\frac{Q(x_1)}{\sqrt{x_1-a}} + i \frac{P(x_1)}{\sqrt{x_1-b}} \right] \frac{r_1 \exp[i\varphi(x_1)]}{\sqrt{x_1-c}} \quad \text{для } x_1 > b, \\ \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + im_1 \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) &= - \left[\frac{Q(x_1)}{\sqrt{a-x_1}} + i \frac{P(x_1)}{\sqrt{b-x_1}} \right] \frac{r_1 \exp[i\varphi_c(x_1)]}{\sqrt{c-x_1}} \quad \text{для } x_1 < c, \\ \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) &= \frac{r_1 P(x_1)}{\sqrt{(x_1-c)(b-x_1)}} \left[\frac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1} \operatorname{ch} \varphi_0(x_1) + \operatorname{sh} \varphi_0(x_1) \right] + \\ &+ \frac{r_1 Q(x_1)}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)}} \left[\operatorname{ch} \varphi_0(x_1) + \frac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1} \operatorname{sh} \varphi_0(x_1) \right] \quad \text{для } x_1 \in L_2, \quad (23) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \varphi(x_1) &= 2\varepsilon \ln \frac{\sqrt{(b-a)(z-c)}}{\sqrt{l(z-a)} + \sqrt{(a-c)(z-b)}}, \\ \varphi_c(z) &= 2\varepsilon \ln \frac{\sqrt{(b-a)(c-z)}}{\sqrt{l(a-z)} + \sqrt{(a-c)(b-z)}}. \end{aligned}$$

Розв'язки задачі (16), (17) для $j=2$ можна записати аналогічно. Це може бути необхідно для визначення полів напружень в будь-якій точці розглянутої області.

Введемо коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН)

$$k_1 = \lim_{x_1 \rightarrow a+0} \sqrt{2(x_1-a)} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0), \quad k_2 = \lim_{x_1 \rightarrow b+0} \sqrt{2(x_1-b)} \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0). \quad (24)$$

Використання подання (23) приводить до формул

$$k_1 = \sqrt{\frac{\pi l}{2a}} \left[\sqrt{1-\lambda} (\sigma^\infty \cos \beta + m_1 \tau^\infty \sin \beta) - 2\varepsilon (\sigma^\infty \sin \beta - m_1 \tau^\infty \cos \beta) \right], \quad (25)$$

$$k_2 = -\frac{1}{m_1} \sqrt{\frac{\pi l}{2}} \left[(\sigma^\infty \sin \beta - m_1 \tau^\infty \cos \beta) + 2\varepsilon \sqrt{1-\lambda} (\sigma^\infty \cos \beta + m_1 \tau^\infty \sin \beta) \right]. \quad (26)$$

Варто відзначити, що напруження $\sigma_{33}(x_1, 0)$ для $x_1 \rightarrow b+0$ є скінченними. Біля лівої вершини тріщини має місце осцилююча особливість, КІН якої вводиться

$$K_1^c - iK_2^c = \lim_{x_1 \rightarrow c-0} \sqrt{2\pi(c-x_1)} (c-x_1)^{-i\varepsilon} \left\{ \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) - i\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) \right\}$$

і на основі другої формули (23) визначається формулою

$$K_1^c - iK_2^c = r \sqrt{\frac{\pi l}{2}} (1 + 2i\varepsilon) (\sqrt{1-\lambda} D_1 + iC_1) \exp \left\{ i\varepsilon \ln \lambda [4l(1-\lambda)]^{-1} \right\}.$$

Визначення зон відкриття і закриття тріщини. Отриманий розв'язок є математично вірний для довільного положення точки a в інтервалі (c, b) . Але цей розв'язок стає фізично коректним тільки при виконанні таких додаткових умов

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) \leq 0 \text{ для } x_1 \in L_2, \quad \langle u_3(x_1) \rangle \geq 0 \text{ для } x_1 \in L_1. \quad (27)$$

Необхідною умовою для виконання цих нерівностей є вимога $k_1 = 0$. Її виконання приводить до такого рівняння відносно λ

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma^\infty \sqrt{1-\lambda} + 2\varepsilon m_1 \tau^\infty}{2\varepsilon \sigma^\infty - m_1 \tau^\infty \sqrt{1-\lambda}}. \quad (28)$$

Крім того, щоб задовольнити другу з нерівностей (27), треба вибрати максимальний корінь рівняння λ_0 (28) з інтервалу $(0, 1)$. Слід зазначити, що друга нерівність (27) не виконується у зоні осциляції біля лівої вершини тріщини. Але для розглянутих навантажень ця зона є дуже малою (порядку 10^{-10}) у порівнянні з довжиною тріщини і не впливає на електромеханічні характеристики у її правій вершині.

Розв'язок рівняння (28) можна знайти чисельно. Але, якщо параметр λ є малий у порівнянні з 1, то можна припустити $\sqrt{1-\lambda} \approx 1$ і це призводить до такої асимптотичної формули для $\bar{\lambda}_0 \approx \lambda_0$

$$\lambda_0 \approx \bar{\lambda}_0 = 4 \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{arctg} \frac{1+2\varepsilon\chi}{2\varepsilon-\chi} + \pi n \right), \quad (29)$$

де $\chi = \operatorname{arctg}(m\tau/\sigma)$ і n обираються так, щоб забезпечити максимальний корінь рівняння (28) з інтервалу $(0, 1)$.

Визначимо швидкість вивільнення енергії у вершинах тріщини. Оскільки $\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)$ для $x_1 \rightarrow b+0$ є скінченним, то швидкість вивільнення енергії (ШВЕ) в правій вершині тріщини може бути введена за формулою

$$G^b = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2\Delta l} \int_b^{b+\Delta l} \sigma_{31}^{(1)}(x_1, 0) \langle u_1(x_1 - \Delta l) \rangle \right\} dx_1. \quad (30)$$

Використовуючи першу формулу (23) і подання

$$\langle u_1(x_1) \rangle_{x_1 \rightarrow b-0} = -\frac{2m_1 k_2}{r_1} \sqrt{\frac{2(b-x_1)}{\pi}}, \quad (31)$$

яке впливає з рівняння (20), і обчислюючи інтеграл (30), одержуємо

$$G^b = \Omega m_1^2 k_{20}^2, \quad (32)$$

де $k_{20} = k_2 |_{\lambda=\lambda_0}$, $\Omega = -1/(2r_1 m_1)$.

Числові результати. Проведемо числовий аналіз для комбінації зсувного та стискаючого навантажень. Таке навантаження дуже часто має місце для п'єзомагнітних приладів і може призвести до їх пошкодження. Для числового аналізу розглядався біматеріал, який складався з епоксиду (верхній півпростір) і п'єзомагнетика $CoFe_2O_4$ (нижній півпростір). Фізичні характеристики цих матеріалів були взяті з [9] і наведені в табл. 1.

Таблиця 1 – Константи матеріалів c_y (ГПа), h_y (H / (A·м)), $\gamma_y \cdot 10^{-4}$ (H / A²)

для верхнього та нижнього матеріалів

	c_{11}	c_{33}	c_{13}	c_{44}	h_{15}	h_{31}	h_{33}	$\gamma_{11} \cdot 10^{-4}$	$\gamma_{33} \cdot 10^{-4}$
Епоксид	8,0	8,0	4,4	1,8	≈ 0	≈ 0	≈ 0	3,72	3,72
$CoFe_2O_4$	274	259	161	46	-275	290,2	-350	2,97	0,835

Міжфазна тріщина розташована на відрізку $(-10; 10)$. Зсувне напруження приймалося рівним -10 МПа, нормальне напруження задавалось формулою $\sigma^\infty = \delta \cdot \tau^\infty$. В табл. 2 наведені значення відносної довжини контактної зони λ_0 , КІН зсувного напруження k_2 в правій вершині тріщини, КІН K_1^c та K_2^c в лівій вершині тріщини та ШВЕ G^b в залежності від нормального напруження σ^∞ , яке визначається параметром δ .

ШВЕ для вершини тріщини c є такою самою, як і для вершини b .

Як впливає з представлених результатів, КІН k_2 та ШВЕ G^b , яка пропорційна цьому КІН, дуже слабо залежить від стискаючого навантаження σ^∞ . Різниця між значеннями цих параметрів для $\sigma^\infty = -1$ МПа

(рядок 3, табл. 2) і $\sigma^\infty = -50 \text{ МПа}$ (останній рядок табл. 2) приблизно 0,32%. Це означає, що можливість поширення тріщини під стискаючим та зсувним навантаженнями, в основному, визначається зсувним навантаженням. Зона розкриття тріщини має місце для всіх розглянутих навантажень, незважаючи на величину відношення стискаючого та нормального напружень на нескінченності.

Таблиця 2. – Довжина контактної зони λ_0 , КІН k_2 , K_1^c , K_2^c ,

ШВЕ G^b для $\tau = -10 \text{ МПа}$ і різних значень нормального напруження σ^∞

δ	λ_0	$k_2 \times 10^{-6}$, $H / \text{М}^{3/2}$	$K_1^c \times 10^{-6}$, $H / \text{М}^{3/2}$	$K_2^c \times 10^{-6}$, $H / \text{М}^{3/2}$	G^b , $H / \text{М}$
-0,1	0,1024	-1,795	-0,5048	-1,722	282,6
0,0	0,3087	-1,781	-0,6522	-1,658	278,2
0,1	0,5876	-1,776	-0,7580	-1,607	275,3
0,2	0,7677	-1,774	-0,8609	-1,552	276,1
0,5	0,9409	-1,773	-1,0161	-1,455	275,7
1,0	0,9838	-1,773	-1,1400	-1,360	275,6
5,0	0,9993	-1,772	-1,3994	-1,093	275,6

Висновки. Розглянута тріщина між двома п'єзомагнітними матеріалами під дією комбінації нормальних та зсувних напружень на віддаленні від неї. З використанням подання переміщень та напружень через одну кусково-аналітичну функцію поставлена проблема зведена до задачі лінійного спряження, для якої виведено точний аналітичний розв'язок. З цього розв'язку отримано вирази для напружень та стрибків переміщень на лінії поділу матеріалів, визначено довжину зон відкриття та закриття тріщини. Проведений числовий аналіз отриманих аналітичних результатів.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Калоєров С. А.** Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей: Монография. / С. А. Калоєров, А. И. Баева, О. И. Бороненко. – Донецк, 2007. – 268 с.
2. **Симонов И. В.** Трещина на границе раздела в однородном поле напряжений / И. В. Симонов // Механика композитных материалов. – 1985. – № 6. – С. 969–976.
3. **Шевельова А. Є.** Розріз між двома ізотропними різнорідними матеріалами в полі стискальних та зсувних напружень / А. Є. Шевельова // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер.: Механіка. – Том 1. – 2013. – Вип. 17. – С. 10–18.
4. **Sheveleva A.** Opening and contact zones of an interface crack in a piezoelectric bimaterial under combined compressive-shear loading / A. Sheveleva, Y. Lapusta, V. Loboda // Mechanics Research Communications. – 2015 – Vol. 63. – P. 6–12.
5. **Herrmann K. P.** Fracture mechanical assessment of electrically permeable interface cracks in piezoelectric bimaterials by consideration of various contact zone models / K. P. Herrmann, V. V. Loboda // Archive of Applied Mechanics. – 2000. – Vol. 70. – P. 127–143.
6. **Suo Z.** Fracture mechanics for piezoelectric ceramics / Z. Suo, C. M. Kuo, D. M. Barnett, J. R. Willis // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1992. – Vol. 40. – P. 739–765.
7. **Нахмейн Е. Л.** Контакт упругой полуплоскости с частично отслоившимся штампом / Е. Л. Нахмейн, Б. М. Нуллер // Прикл. матем. и механика. – 1986. – Т. 50, Вып. 4. – С. 663–673.

8. **Loboda V. V.** The quasi-invariant in the theory of interface cracks / V. V. Loboda. // Engineering Fracture Mechanics. – 1993. – Vol. 44, № 4. – P.573.

9. **Sih G. C.** Magnetic and electric poling effects associated with crack growth in BaTiO₃–CoFe₂O₄ composite / G. C. Sih, Z. F. Song // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2003. – Vol. 39. – P. 209–227.

A. E. Шевелёва, канд. физ.-мат. наук, С. А. Смирнов, д-р физ.-мат. наук

ОТКРЫТЫЕ И ЗАКРЫТЫЕ ЗОНЫ ТРЕЩИНЫ МЕЖДУ ДВУМЯ ПЬЕЗОМАГНИТНЫМИ МАТЕРИАЛАМИ В КОМБИНИРОВАННОМ ПОЛЕ НАПРЯЖЕНИЙ

Исследована межфазная трещина в пьезомагнитном биматериале с зонами предразрушения, находящаяся под действием сжимающих и сдвиговых напряжений на удалении от нее. Сформулирована краевая задача Дирихле – Римана, для которой выписано точное аналитическое решение. Найдены длины зон открытия и закрытия трещины, скачки перемещений в зависимости от интенсивности нормального и сдвигового напряжений на бесконечности и механических свойств материалов.

Ключевые слова: межфазная трещина, пьезомагнитный биматериал, кусочно-аналитическая функция, скачки перемещений.

A. E. Sheveleva, PhD (Phys.-Math.), S. A. Smirnov, Dr. Sci (Phys.-Math.)

OPENING AND CONTACT ZONES OF AN INTERFACE CRACK IN A PIEZOMAGNETIC BIMATERIAL UNDER COMBINED COMPRESSIVE-SHEAR LOADING

An interface crack in piezomagnetic bimaterial with pre-fracture zones under the action of compressive and shear stresses at a distance from it was investigated. The Dirichlet – Riemann boundary value problem was formulated and exact analytical solution was presented. The length of the opening and closing zones, the jumps of displacement were found depending on the intensity of the normal and shear stresses at infinity and mechanical properties of the materials.

Keywords: interface crack, compressive loading, zones of crack opening, piezomagnetic bimaterial.

An interface crack $c \leq x_1 \leq b$, $x_3 = 0$ between two semi infinite piezomagnetic spaces $x_3 > 0$ and $x_3 < 0$ which are poled in the x_3 -direction is considered. The material properties are defined by the matrices $c_{ijkl}^{(1)}$, $h_{ij}^{(1)}$, $\gamma_{ij}^{(1)}$ (for $x_3 > 0$) and $h_{ij}^{(2)}$, $e_{ij}^{(2)}$, $\gamma_{ij}^{(2)}$ (for $x_3 < 0$). It is assumed that the direction of the polarization of both materials is orthogonal to the crack faces. The half-spaces are loaded at infinity with uniform stresses $\sigma_{33}^{(j)} = \sigma$, $\sigma_{13}^{(j)} = \tau$, $\sigma_{11}^{(j)} = \sigma_{xy}^{\infty}$ and with uniform magnetic inductions $B_3^{(j)} = b^{\infty}$, $B_1^{(j)} = B_{xy}^{\infty}$, which satisfy the continuity conditions at the interface. Because the load does not depend on the coordinate x_2 the relations of the previous chapter can be used and a two-dimensional problem in x_1 , x_3 -plane can be considered.

It is assumed that the crack is open for $x_1 \in [c, a] = L_1$ whereas its faces are in frictionless contact for $x_1 \in (a, b) = L_2$, and the position of the point a is arbitrarily chosen for the time being.

Thus the continuity and boundary conditions at the interface are

$$\langle \mathbf{V} \rangle = 0, \langle \mathbf{t} \rangle = 0 \text{ for } x_1 \in L, \quad (1)$$

$$\sigma_{13}^{\pm} = 0, \sigma_{33}^{\pm} = 0, \langle \phi \rangle = 0, \langle B_3 \rangle = 0 \text{ for } x_1 \in L_1, \quad (2)$$

$$\langle u_3 \rangle = 0, \langle \phi \rangle = 0, \sigma_{13}^{\pm} = 0, \langle \sigma_{33} \rangle = 0, \langle B_3 \rangle = 0 \text{ for } x_1 \in L_2. \quad (3)$$

The following presentations of stresses, magnetic induction and the derivatives of the displacement jumps at the interface are obtained

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + im_j \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = t_j [F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1)] + \sigma_0, \quad (4)$$

$$B_3^{(1)}(x_1, 0) = g_{33}^{-1} \{ g_{43} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) - (g_{31} g_{43} - g_{41} g_{33}) \langle u_1'(x_1, 0) \rangle - g_{43} \sigma + g_{33} d \}$$

$$\langle u_1'(x_1, 0) \rangle + is_j \langle u_3'(x_1, 0) \rangle = F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1),$$

where $F_j(z)$ are the analytic functions in the whole plane including the bonded parts of the material interface, m_j, t_j, γ_j, s_j and g_{ij} are constant, depending on the physical characteristics of the materials.

Satisfying the interface conditions (2), (3), one arrives at the following combined Dirichlet – Riemann boundary value problem for the sectionally-holomorphic function $\Phi_j(z)$

$$\Phi_j^+(x_1) + \gamma_j \Phi_j^-(x_1) = 0 \text{ for } x_1 \in L_1, \text{Im} \Phi_j^{\pm}(x_1) = 0 \text{ for } x_1 \in L_2. \quad (5)$$

The condition at infinity follows from the presentation (4) and has the form

$$\Phi_j(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \tilde{\sigma}_j - i \tilde{\tau}_j. \quad (6)$$

where $\Phi_j(z) = F_j(z) + \Phi_j^0$, $\tilde{\sigma}_j = \sigma / r_j$, $\tilde{\tau}_j = -m_j \tau / r_j$, $r_j = t_j(1 + \gamma_j)$

The solution of the problem (5) is found in an analytical form and the formulas for stresses, magnetic induction and the derivatives of the displacement jumps at the interface are obtained. Besides, the stress intensity factors

$$k_1 = \lim_{x_1 \rightarrow a+0} \sqrt{2(x_1 - a)} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0), \quad k_2 = \lim_{x_1 \rightarrow b+0} \sqrt{2(x_1 - b)} \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0)$$

are found in the form

$$k_1 = \sqrt{\frac{\pi l}{2a}} \left[\sqrt{1 - \lambda} (\sigma \cos \beta + m_1 \tau \sin \beta) - 2 \varepsilon (\sigma \sin \beta - m_1 \tau \cos \beta) \right],$$

$$k_2 = -\frac{1}{m} \sqrt{\frac{\pi l}{2}} \left[(\sigma \sin \beta - m_1 \tau \cos \beta) + 2 \varepsilon \sqrt{1 - \lambda} (\sigma \cos \beta + m_1 \tau \sin \beta) \right],$$

where $\beta = \varepsilon \ln \frac{1 - \sqrt{1 - \lambda}}{1 + \sqrt{1 - \lambda}}$ and $\lambda = \frac{b - a}{b - c}$ is the relative contact zone length.

For the determination of the real contact zone length the following additional conditions are satisfied

$$\sigma_{33}^{(1)}(x, 0) \leq 0 \text{ for } x \in L_2, \quad \langle u_3(x, 0) \rangle \geq 0 \text{ for } x \in L_1.$$

This leads to the following equation with respect to λ

$$\tan \beta = \frac{\sqrt{1 - \lambda} \sigma + 2\varepsilon_1 m_1 \tau}{2\varepsilon_1 \sigma - \sqrt{1 - \lambda} m_1 \tau}$$

and the maximum root λ_0 must be taken from the interval $(0, 1)$.

The numerical results are presented in Table form. These results show that the zone of the crack opening takes place for all considered loading. This zone exists even for the case of the normal compressive stress 5 times larger than the shear stress, but it is rather small. For a compressive normal stress the shear stress plays the determinative role concerning the possibility of the crack advance. At the same time the stress intensity factor of the shear stress and the energy release rates at both crack tips very slightly depend on the magnitude of the compressive loading.

REFERENCES

1. **Kaloerov S. A.** Two-dimensional problems of electricity and magnetoelasticity for multiply connected domains: Monograph / S. A. Kaloerov, A. I. Baeva, O. I. Boronenko. – Donetsk, 2007. – 268 p.
2. **Simonov I. V.** Crack at the interface in a uniform stress field / I. V. Simonov // Mechanics of Composite Materials. – 1985. – № 6. – С. 969–976.
3. **Sheveleva A. E.** The cut between the two dissimilar isotropic materials in the field of compressive and shear stresses / A. E. Sheveleva // Bulletin of the Dnipropetrovsk University: Mechanics. – Т. 1. – 2013. – Vol. 17. – P. 10–18.
4. **Sheveleva A.** Opening and contact zones of an interface crack in a piezoelectric bimaterial under combined compressive-shear loading / A. Sheveleva, Y. Lapusta, V. Loboda // Mechanics Research Communications. – 2015 – Vol. 63. – P. 6–12.
5. **Herrmann K. P.** Fracture mechanical assessment of electrically permeable interface cracks in piezoelectric bimaterials by consideration of various contact zone models / K. P. Herrmann, V. V. Loboda // Archive of Applied Mechanics. – 2000. – Vol. 70. – P. 127–143.
6. **Suo Z.** Fracture mechanics for piezoelectric ceramics / Z. Suo, C. M. Kuo, D. M. Barnett, J. R. Willis // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1992. – Vol. 40. – P. 739–765.
7. **Nahmeyn E. L.** Contact elastic half-plane with partially exfoliated stamp / E. L. Nahmeyn, B. M. Nuller // Applied Mathematics and Mechanics. – 1986. – Т. 50, Is. 4. – С. 663–673.
8. **Loboda V. V.** The quasi-invariant in the theory of interface cracks / V. V. Loboda // Engineering Fracture Mechanics. – 1993. – Vol. 44, № 4. – P. 573.
9. **Sih G. C.** Magnetic and electric poling effects associated with crack growth in BaTiO₃–CoFe₂O₄ composite / G. C. Sih, Z. F. Song // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2003. – Vol. 39. – P. 209–227.

*Дніпропетровський національний університет
ім. Олеся Гончара,
Дніпро, Україна*

Надійшла до редколегії 30.11.2016