

УДК 539.3

*В. А. Декрет, д-р физ.-мат. наук,
В. С. Зеленский, канд. физ.-мат. наук,
В. М. Быстров, канд. физ.-мат. наук*

УСТОЙЧИВОСТЬ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА, СЛАБОАРМИРОВАННОГО КОРОТКИМИ ВОЛОКНАМИ

Рассмотрены плоская и пространственная задача об устойчивости короткого волокна квадратного поперечного сечения в бесконечной матрице при продольном сжатии. Для решения задач применен статический метод трехмерной линеаризованной теории устойчивости в рамках модели кусочно-однородной среды. Проведен сравнительный анализ критических деформаций волокна при различных значениях механических и геометрических характеристик волокна для плоской и пространственной задачи.

Ключевые слова: кусочно-однородная модель, трехмерная линеаризованная теория устойчивости, численные методы.

Введение. Наиболее строгие и физически корректные результаты по теории устойчивости слоистых и волокнистых композитных материалов при сжатии получены с привлечением основных соотношений трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел (например, [2]) и модели кусочно-однородной среды. Такой подход предложен впервые в [1]. В настоящее время исследования по трехмерной линеаризованной теории устойчивости слоистых и волокнистых композитных материалов в рамках подхода [1, 2] проводятся на основе модели бесконечно-длинных волокон (*infinite fibers*) и модели волокон конечных размеров (*short fibers*). Сравнительный анализ результатов, которые получены с привлечением вышеуказанных двух моделей, представлен в [3, 4]. Принципиальным является используемое в указанных работах допущение о том, что при исследовании потери устойчивости во внутренней структуре (внутренней неустойчивости) композита однонаправленный волокнистый композит можно моделировать плоской задачей для слоистого композита. Справедливость такого допущения может быть обоснована путем сравнительного анализа результатов решения плоских и пространственных задач устойчивости.

В настоящей работе в рамках подхода [1, 2] решена плоская и пространственная задача устойчивости изолированного волокна в бесконечной матрице при сжатии. Для решения задач устойчивости применен второй вариант теории малых докритических деформаций [2], когда докритическое состояние определяется по геометрически линейной теории. Такой подход считается приемлемым для сравнительно жестких композитных материалов, которые разрушаются при сравнительно

малых деформациях. Наполнитель и связующее моделируются линейно упругими изотропными телами.

Сложность получения аналитических решений для задач указанного класса предполагает использование современных численных методов. В данной работе для численного решения рассматриваемых задач используется метод сеток на основе модифицированного вариационно-разностного подхода [5]. Этот подход к решению задач определения устойчивости композитов слоистой и волокнистой структуры при неоднородных докритических состояниях развит в [6 – 8].

Постановка задачи. Рассмотрим композитный материал, армированный в продольном направлении волокнами конечных размеров при малой концентрации наполнителя. При выполнении этого условия взаимодействием волокон можно пренебречь. Проведем исследование внутренней потери устойчивости композита, которое не связано с влиянием граничных поверхностей, и полностью определяются только свойствами материала. В связи с этим в декартовых координатах $Ox_1x_2x_3$ композитный материал моделируется бесконечной матрицей с одним коротким волокном квадратного поперечного сечения, направленным вдоль оси Ox_1 . «На бесконечности» композит нагружен в направлении Ox_1 сжимающей нагрузкой постоянной интенсивности P (рис. 1, 2). Исследование устойчивости выполним с применением статического метода трехмерной линеаризированной теории устойчивости [2]. Следует отметить, что в рамках модели волокон конечных размеров приходим к задаче устойчивости волокнистых материалов с неоднородным докритическим состоянием, которое определяется в результате решения соответствующей задачи о концентрации напряжений около волокон.

Рассмотрим постановку пространственной задачи. Переход к плоской задаче осуществляется очевидным образом. Соответствующие расчетные схемы для пространственной и плоской задачи представлены на рис. 1 и рис. 2. Размеры расчетных областей определяются в результате вычислительного эксперимента и удовлетворяют условиям затухания возмущений «на бесконечности». Композитный материал моделируем кусочно-однородной средой, когда материал в пределах компонента композита считается однородным и выполняются контактные условия на границе компонентов. Компоненты композита будем считать изотропными и линейно упругими.

Для модели волокон конечных размеров при анализе внутренней потери устойчивости вводится следующая величина

$$\varepsilon_{11}^{kp^a} = \varepsilon_{11}^{kp^a}(x) \text{ при } x = 0. \quad (1)$$

Величина (1) соответствует критическому значению укорочения волокна вдоль оси Ox_1 в средней точке $x = 0$ и характеризует только критическое значение укорочения вдоль оси Ox_1 для волокна и не характеризует критическое значение укорочения вдоль оси Ox_1 для матрицы, которое может достигать других значений.

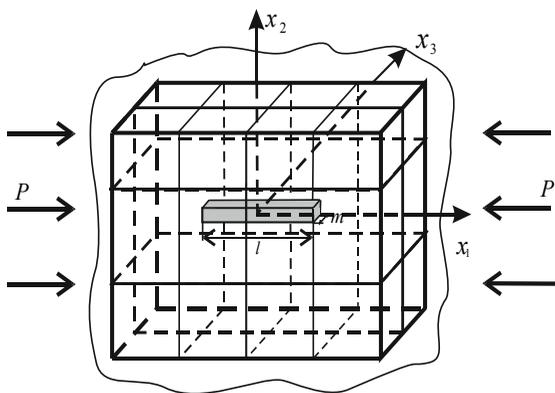


Рис. 1 – Расчетная область и условия нагружения композита для пространственной задачи

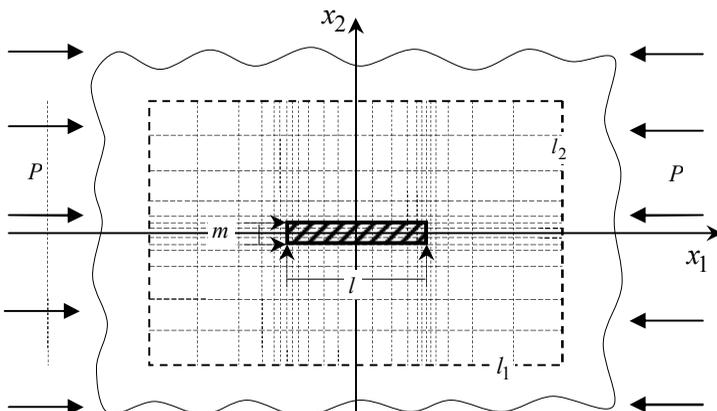


Рис. 2 – Расчетная область и условия нагружения композита для плоской задачи

Исследование докритического состояния выполняется в рамках классической линейной теории упругости изотропного тела, для которой уравнения равновесия и соотношения упругости запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ij}^0 = 0, \quad x \in \Omega; \quad (2)$$

$$\sigma_{ij}^0 = \delta_{ij} \lambda \varepsilon_{nn}^0 + 2\mu \varepsilon_{ij}^0, \quad 2\varepsilon_{ij}^0 = \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_i}, \quad i, j, n = \overline{1,3}. \quad (3)$$

В случае плоской задачи индексы в (2), (3) и выражениях, приведенных ниже, изменяются от 1 до 2.

Для перехода в выражениях (2), (3) к матрице и наполнителю необходимо все величины обозначить соответствующими индексами « m » и « a ». Поскольку для матрицы в соответствии с расчетными схемами, представленными на рис. 1 и рис. 2, исследование выполняется для бесконечной области, то напряжения и перемещения в матрице удобно представить в виде суммы

$$\sigma_{ij}^{0m} = \sigma_{ij}^{\infty} + \sigma_{ij}^{10m}; \quad u_j^{0m} = u_j^{\infty} + u_j^{10m}, \quad (4)$$

где σ_{ij}^{∞} и u_j^{∞} соответствуют внешней нагрузке P , заданной для матрицы «на бесконечности»; σ_{ij}^{10m} и u_j^{10m} – возмущениям напряженно-деформированного состояния, обусловленным наличием волокна конечного размера.

Отметим, что величины с индексами « ∞ » и «1» также определяются соотношениями (3). Величины σ_{ij}^{∞} и u_j^{∞} в соответствии с расчетной схемой на рис. 1 определяются следующими выражениями для пространственной задачи:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{\infty} = -P; \quad \sigma_{22}^{\infty} = 0; \quad \sigma_{33}^{\infty} = 0; \quad \sigma_{12}^{\infty} = 0; \quad \sigma_{13}^{\infty} = 0; \quad \sigma_{23}^{\infty} = 0; \\ u_1^{\infty} = A_1 x_1; \quad u_2^{\infty} = A_2 x_2; \quad u_3^{\infty} = A_3 x_3, \end{aligned} \quad (5)$$

где величины A_1 , A_2 , A_3 определяются из первого выражения (3) с учетом первых шести выражений (5).

В случае плоской задачи имеют место следующие соотношения:

$$\sigma_{11}^{\infty} = -P; \quad \sigma_{22}^{\infty} = 0; \quad \sigma_{12}^{\infty} = 0; \quad u_1^{\infty} = A_1 x_1; \quad u_2^{\infty} = A_2 x_2, \quad (6)$$

где величины A_1 и A_2 определяются из первого выражения (3) с учетом первых трех выражений (6).

Таким образом, для матрицы получаем выражения (3) с величинами σ_{ij}^{10m} , ε_{ij}^{10m} , u_j^{10m} , λ_m , μ_m и для волокна – с величинами σ_{ij}^{0a} , ε_{ij}^{0a} , u_j^{0a} , λ_a , μ_a . Следовательно, исследование докритического состояния проводится с применением вышеуказанных величин и основных соотношений (2), (3).

Полная формулировка задач также включает условия непрерывности векторов напряжений и перемещений на границах раздела, которые для расчетной схемы на рис. 1 представим в следующем виде:

$$\sigma_{1j}^{\infty} + \sigma_{1j}^{10m} = \sigma_{1j}^{0a}, \quad u_j^{\infty} + u_j^{10m} = u_j^{0a}$$

$$\text{при } x_1 = \pm \frac{l}{2} \text{ и } |x_2| \leq \frac{m}{2}, \quad |x_3| \leq \frac{m}{2}; \quad (7)$$

$$\sigma_{2j}^{10^m} = \sigma_{2j}^{0^a}, \quad u_j^\infty + u_j^{10^m} = u_j^{0^a}$$

$$\text{при } x_2 = \pm \frac{m}{2} \text{ и } |x_1| \leq \frac{l}{2}, \quad |x_3| \leq \frac{m}{2}; \quad (8)$$

$$\sigma_{3j}^{10^m} = \sigma_{3j}^{0^a}, \quad u_j^\infty + u_j^{10^m} = u_j^{0^a}$$

$$\text{при } x_3 = \pm \frac{m}{2} \text{ и } |x_1| \leq \frac{l}{2}, \quad |x_2| \leq \frac{m}{2}. \quad (9)$$

Условия затухания напряжений и перемещений на «бесконечности» для матрицы будут следующими:

$$\sigma_{ij}^{10^m} \rightarrow 0 \text{ и } u_j^{10^m} \rightarrow 0 \text{ при } \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Для расчетной схемы, представленной на рис. 2, имеют место соотношения (7), (8) при условии $|x_3| \leq \infty$, которое обеспечивает плоскую деформацию в плоскости Ox_1x_2 . Условия затухания примут следующий вид:

$$\sigma_{ij}^{10^m} \rightarrow 0 \text{ и } u_j^{10^m} \rightarrow 0 \text{ при } \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Вышеизложенная постановка задачи по определению докритического состояния соответствует общепринятому подходу при исследовании задач концентрации напряжений около отверстий и включений.

После определения докритического состояния исследование задачи устойчивости будем проводить в рамках второго варианта теории малых докритических деформаций [2] при моделировании матрицы и волокон линейно упругими изотропными телами, что согласовано с постановкой задачи определения докритического состояния. Таким образом, имеют место основные соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\omega_{ij\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} u_\alpha \right) = 0, \quad x \in \Omega, \quad i, j, \alpha, \beta = \overline{1,3}. \quad (12)$$

В этом случае компоненты несимметричного тензора напряжений для задачи устойчивости имеют вид

$$t_{ij} = \omega_{ij\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} u_\alpha. \quad (13)$$

Отметим, что выражения (12) и (13) записаны в общем виде для матрицы и наполнителя. При исследовании задачи устойчивости основ-

ные соотношения (12) и (13) следует применять отдельно для матрицы, записав их применительно к величинам σ_{ij}^{1m} , ε_{ij}^{1m} , u_j^{1m} , $\omega_{ij\alpha\beta}^{1m}$, λ_m , μ_m . Также основные соотношения (12) и (13) следует отдельно применять для волокна, записавши их применительно к величинам σ_{ij}^a , ε_{ij}^a , u_j^a , $\omega_{ij\alpha\beta}^a$, λ_a , μ_a . Таким образом, имеют место следующие выражения для матрицы

$$\begin{aligned}\omega_{ij\alpha\beta}^{1m} &= \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}\lambda_m + (\delta_{i\beta}\delta_{\alpha j} + \delta_{i\alpha}\delta_{\beta j})\mu_m + \delta_{\alpha j}\sigma_{i\beta}^{0m}; \\ \sigma_{i\beta}^{0m} &= -\delta_{i\beta}\sigma_{\beta\beta}^0 P + \sigma_{i\beta}^{1m}\end{aligned}\quad (14)$$

и для волокна

$$\omega_{ij\alpha\beta}^a = \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}\lambda_a + (\delta_{i\beta}\delta_{\alpha j} + \delta_{i\alpha}\delta_{\beta j})\mu_a + \delta_{\alpha j}\sigma_{i\beta}^{0a}. \quad (15)$$

Полная формулировка задачи устойчивости с применением основных соотношений в виде (12) и (13) с учетом (14) для матрицы и (15) для волокна конечных размеров также включает условия непрерывности векторов напряжений и перемещений на границах раздела, которые для расчетной схемы на рис.1 представим в следующем виде:

$$t_{1j}^{1m} = t_{1j}^a, \quad u_j^{1m} = u_j^a$$

$$\text{при } x_1 = \pm l/2 \text{ и } |x_2| \leq m/2, \quad |x_3| \leq m/2; \quad (16)$$

$$t_{2j}^{1m} = t_{2j}^a, \quad u_j^{1m} = u_j^a$$

$$\text{при } x_2 = \pm m/2 \text{ и } |x_1| \leq l/2, \quad |x_3| \leq m/2; \quad (17)$$

$$t_{3j}^{1m} = t_{3j}^a, \quad u_j^{1m} = u_j^a$$

$$\text{при } x_3 = \pm m/2 \text{ и } |x_1| \leq l/2, \quad |x_2| \leq m/2. \quad (18)$$

Условия затухания возмущения перемещений «на бесконечности» для матрицы имеют вид

$$u_j^{1m} \rightarrow 0, \quad \text{при } \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Для расчетной схемы, представленной на рис. 2, имеют место соотношения (16), (17) при условии $|x_3| \leq \infty$. Условия затухания примут следующий вид:

$$\sigma_{ij}^{10m} \rightarrow 0 \text{ и } u_j^{10m} \rightarrow 0, \text{ при } \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Сформулированная задача устойчивости в виде (12) – (20) включает уравнения (12), коэффициенты которых зависят от переменных x_i , поскольку в силу обозначений (14) и (15) в эти коэффициенты входят величины $\sigma_{i\beta}^{10m}$ и $\sigma_{i\beta}^{0a}$, которые определяются в результате решения соответствующей задачи о концентрации напряжений докритического состояния.

Рассматривая расчетную область с начальными напряжениями $\lambda\sigma_{ij}^0$ и поверхностной нагрузкой λP , где λ – монотонно возрастающий коэффициент пропорциональности, задачу устойчивости (12 – 20) сводим к обобщенной задаче на собственные значения. Критическое значение параметра λ является собственным значением задачи, а форма потери устойчивости u_α – соответствующей собственной функцией. При этом критическая нагрузка определяется из выражения

$$P_{кр} = \min|\lambda|P, \quad (21)$$

где $\min|\lambda|$ – минимальное по модулю собственное число задачи на собственные значения; P – интенсивность внешней нагрузки, приложенной на бесконечности к композитному материалу.

При исследовании потери устойчивости волокна критическую деформацию будем определять соотношением

$$\varepsilon_{11}^{kp} = P_{кр}(1 - \nu)/(2G), \quad (22)$$

где G , ν – модуль сдвига и коэффициент Пуассона волокна.

Постановка разностной задачи. Задачи (2) – (11), (12) – (22) решаем методом сеток с использованием концепции базовой схемы [5]. При таком подходе разностную схему для расчетной области строим в каждом сеточном узле как определенную сумму значений базовой схемы, представляющей собой разностную схему, полученную вариационно-разностным способом на шаблоне ячейки разностной сетки.

При использовании численного подхода задача для исходной бесконечной модели композитного материала сводится к задаче для ограниченной расчетной области. Размер этой области определяем в результате вычислительного эксперимента, исходя из условия, что расчетные параметры принимают установившееся значение относительно

увеличения размеров расчетной области в направлении осей Ox_i . Такими расчетными параметрами являются размер области неоднородного докритического состояния в окрестности волокна и критические нагрузки.

На рис. 2 для случая плоской задачи представлена расчетная область, в которой введена неравномерная разностная сетка. В случае пространственной задачи процедура дискретизации расчетной области осуществляется аналогично. На прямоугольной неравномерной разностной сетке $\bar{\omega} = \omega + \gamma$, которая аппроксимирует область $\bar{\Omega}$, задачам (2) – (11), (12) – (20) ставим в соответствие разностные задачи вида:

$$A_i \mathbf{y}^0 = \Phi_i, \quad x \in \bar{\omega}; \quad (23)$$

$$A_i \mathbf{y} = \lambda B_i \mathbf{y}, \quad x \in \bar{\omega}; \quad (24)$$

$$A_i \mathbf{y}^0 = \begin{cases} \sum_{\xi \in x} a_i(\xi) \mathbf{y}^0, & \mathbf{x} \in \bar{\omega} - \gamma_{y_i^0} \\ E y_i^0, & \mathbf{x} \in \gamma_{y_i^0} \end{cases}; \quad A_i \mathbf{y} = \begin{cases} \sum_{\xi \in x} a_i(\xi) \mathbf{y}, & \mathbf{x} \in \bar{\omega} - \gamma_{y_i} \\ E y_i, & \mathbf{x} \in \gamma_{y_i} \end{cases};$$

$$B_i \mathbf{y} = \begin{cases} \sum_{\xi \in x} b_i(\xi) \mathbf{y}, & \mathbf{x} \in \bar{\omega} - \gamma_{y_i} \\ E y_i, & \mathbf{x} \in \gamma_{y_i} \end{cases}; \quad \Phi_i = \sum_{\xi \in x} \phi_i(\xi), \quad \mathbf{x} \in \bar{\omega} - \gamma_{y_i};$$

$$a_i(\xi) \mathbf{y} = -H \frac{\sigma_{ji} + \sigma_{ji}^{\xi_j}}{\eta_{\xi_j}}; \quad b_i(\xi) \mathbf{y} = -H \frac{\sigma_{jk}^0 y_{i,\xi_k} + (\sigma_{jk}^0 y_{i,\xi_k})^{\xi_j}}{\eta_{\xi_j}};$$

$$\phi_i(\xi) = -2H \frac{P_{ji}}{\eta_{\xi_j}};$$

$$\sigma_{ii} = A_{ik} \varepsilon_{kk}; \quad \sigma_{12} = 2G \varepsilon_{12}; \quad \varepsilon_{ij} = 0,5(u_{i,\xi_j} + u_{j,\xi_i});$$

$$z_{,\xi_i} = -\text{sign}(\xi_i) \frac{z^{-\xi_i} - z}{h_i}. \quad (25)$$

В (23) – (25) переменные обозначаем так же, как соответствующие континуальные переменные, что, по-видимому, не должно привести к недоразумениям; y^0, y – разностные аналоги перемещений для докритического состояния и возмущения перемещений при потере устойчивости; $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ – разностные аналоги компонент напряжений, деформаций; a_i, b_i – компоненты базовых операторов \mathbf{a}, \mathbf{b} ; H – площадь ячейки; h_i – шаг ячейки в направлении x_i ; $z_{,\xi_i}$ – разностная производная сеточной функции $z(\xi)$ в направлении x_i , правая – при $\xi_i \leq 0$;

$\xi = (\xi_1, \xi_2)$ $\xi_i = \pm i$ – параметр узла ячейки; знак $\sum_{\xi \in x}$ – суммирование

компонент базовой схемы по тем параметрам ξ , которые совпадают с сеточным узлом x ; $\xi_{-i} = -\xi_i$; E – тождественный оператор; γ_{y_i} – участок границы γ , на котором m -ая компонента разностного аналога граничного условия задана в смещениях.

Для решения дискретных задач применены эффективные численные методы [9] в соответствии с методикой, представленной в работе [5]. В рассматриваемом случае алгебраическая задача определения начального состояния решалась прямым методом Холецкого, а после сгущения разностной сетки применялся итерационный метод сопряженных градиентов. Решение задачи определения докритического состояния после интерполяции принималось в качестве начального приближения для решения дискретной задачи устойчивости на собственные значения методом итерирования подпространства.

Численные результаты. Расчеты были выполнены для следующих значений механических и геометрических характеристик компонентов композита: $E_a E_m^{-1} = 30, 50, 100$ – отношение модулей Юнга наполнителя и матрицы; $\nu_a = \nu_m = 0, 4$ – коэффициенты Пуассона волокна и матрицы; геометрические параметры волокна изменялись в интервале $10 \leq lm^{-1} \leq 100$.

Полученные результаты расчетов представлены в виде зависимостей величины критической деформации от механических и геометрических параметров композитного материала. Величина критической деформации $\varepsilon_{11}^{kp^a}(x)$ рассматривалась в средней точке армирующего волокна, т.е. при $x = 0$.

На рис. 3 представлена зависимость величины $\left| \varepsilon_{11}^{kp^a} \right|$ от параметра lm^{-1} для разных значений $E_a E_m^{-1}$ (указаны возле соответствующих кривых). Штрихпунктирные линии соответствуют плоской задаче, сплошные – пространственной.

Как видно из рис. 3, с увеличением параметра $E_a E_m^{-1}$ величина критической деформации уменьшается. Величина $\left| \varepsilon_{11}^{kp^a} \right|$ для пространственной задачи меньше соответствующей величины для плоской задачи. Различие между значениями критических деформаций волокна для значений $E_a E_m^{-1} = 30, 50, 100$, полученных при решении плоской и пространственной задачи устойчивости, составило соответственно 8%, 7,5%, 5%.

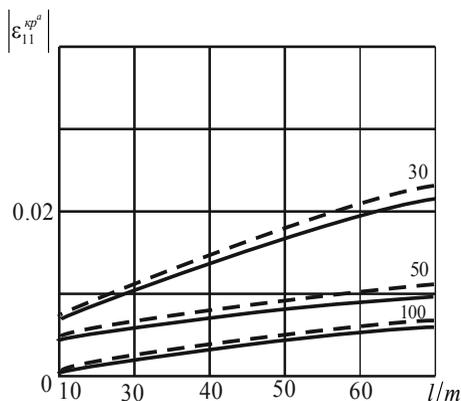


Рис. 3 – Зависимость величины $|\varepsilon_{11}^{кpa}|$ от параметра l/m ⁻¹ для разных значений $E_a E_m^{-1}$

Выводы. Для исследованного интервала изменения геометрических и механических характеристик композитного материала результаты пространственной задачи устойчивости изолированного волокна в бесконечной матрице при продольном сжатии можно приближенно заменить результатами плоской задачи устойчивости, полученными с заданной точностью в рамках «модели волокон конечных размеров».

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Guz A. N.** On Constructing of the Theory of Stability of the Unidirectional Fibrous Composites / A. N. Guz // Soviet Applied Mechanics. – 1969 – Vol.5, No.2. – P. 62–70.
2. **Guz A. N.** Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies / A. N. Guz – Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1999 – 555p.
3. **Guz A. N.** On Two Models in the Three-Dimensional Theory of Stability of Composite Materials / A. N. Guz, V. A Dekret // International Applied Mechanics. – 2008 – Vol. 44, No.8. – P.839–854.
4. **Guz A. N.** Finite – Fiber Model in the Three-Dimensional Theory of Stability of Composites / A. N. Guz // International Applied Mechanics. – 2016 – Vol. 52, No.1. – P.1–48.
5. **Guz A. N.** Numerical Solution of Three-Dimensional Stability Problems for Elastic body / A. N. Guz, Yu. V. Kokhanenko // International Applied Mechanics. – 2001 – Vol. 37, No.11. – P.1369–1399.
6. **Dekret V. A.** Plane Instability for a Composite Reinforced with a Periodic Row of Short Parallel Fibers / V. A Dekret // International Applied Mechanics. – 2008 – Vol.44, No.5. – P.498–504.
7. **Dekret V. A.** Near-Surface Instability of Composite Materials Weakly Reinforced with Short Fibers / V. A Dekret // International Applied Mechanics. – 2008 – Vol.44, No.6. – P. 609-625.
8. **Dekret V. A.** Numerical Analysis of Stability of a Laminated Composite with Compressed Reinforcement Plies / V. A Dekret, V.S. Zelenskii, V.M. Bystrov // Int. Appl. Mech. – 2015. – Vol. 51, No 5. – P. 561–566.
9. **Pissanetzky S.** Sparse Matrix Technology / S. Pissanetzky – London: Academic Press, 1984. – 321 p.

*В. А. Декрет, д-р физ.-мат. наук, В. С. Зеленский, канд. физ.-мат. наук,
В. М. Быстров, канд. физ.-мат. наук*

СТІЙКІСТЬ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРІАЛУ СЛАБКОАРМОВАНОГО КОРОТКИМИ ВОЛОКНАМИ

Розглянуто плоску та просторову задачі стійкості короткого волокна квадратного поперечного перерізу у нескінченній матриці при повздовжньому стисканні. Для розв'язання задачі застосовано статичний метод тривимірної лінеаризованої теорії стійкості в рамках моделі кусково-однорідного середовища. Проведено порівняльний аналіз критичних деформацій волокна при різних значеннях механічних і геометричних характеристик волокна для плоскої та просторової задачі.

Ключові слова: кусково-однорідна модель, тривимірна лінеаризована теорія стійкості, числові методи.

*V. A. Dekret, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
V. S. Zelenskii, PhD (Phys.-Math.), V. M. Bystrov, PhD (Phys.-Math.)*

STABILITY OF THE COMPOSITE MATERIAL WEAKLY REINFORCED BY SHORT FIBRES

Paper examines the plane and spatial problem of short fibers stability of square cross-section in the infinite matrix under longitudinal compression. To solve this problem it was applied a static method of three-dimensional linearized theory of stability within the model of piecewise-homogeneous medium. The comparative analysis of the critical fiber deformation for different values of its mechanical and geometrical characteristics of the component material for plane and spatial problem was carried out.

Keywords: piecewise-homogeneous model, the three-dimensional linearized stability theory, numerical methods.

The most rigorous and physically correct results under the theory of stability of laminated and fibrous composite materials under compression are received, involving the basic equations of three-dimensional linearized theory of stability of deformable bodies (for example, the monograph [2]) and the model of piecewise-homogeneous medium. This approach was first proposed in [1]. Currently, research on three-dimensional linearized theory of stability of laminated and fiber composite materials in the framework of the approach [1, 2] can be based on the model infinitely long fibers (infinite fibers) and models of finite size fibers (short fibers). The comparative analysis of the results, which were obtained with the assistance of the above two models presented in [3, 4]. The assumption is used in these studies the admission that the loss of stability study of the internal structure (internal instability) unidirectional composite fiber composite can be simulated plane problem for a layered composite. The validity of this assumption can be justified by the comparative analysis of the results of plane and spatial problems of sustainability.

In the present work according to the approach [1, 2] the plane and spatial stability problem of the isolated fiber in an infinite matrix under compression was solved. To study the stability problem applied the second variant of theory of small subcritical deformations [2], where subcritical state is determined by the geometrically linear theory. Such approach is considered to be comprehensible for the relatively hard composite material which mainly collapse at rather small deformations. Filler (reinforcing element) and a binder (matrix) is simulated by linear-elastic isotropic bodies.

The difficulty of obtaining analytical solutions for this class of problems involves the use of modern numerical methods. In this paper, for the numerical solution of these problems using the method of grids based on modified variational-difference approach [5]. This approach to solving the problem of determining the stability of layered composites and fiber structure with non-uniform subcritical state developed in [6 – 8].

The study subcritical state is performed in the framework of classical linear elasticity of isotropic body for which equilibrium equations and correlations of elasticity written in the following form:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ij}^0 = 0, \quad x \in \Omega; \quad (1)$$

$$\sigma_{ij}^0 = \delta_{ij} \lambda \varepsilon_{nn}^0 + 2\mu \varepsilon_{ij}^0, \quad 2\varepsilon_{ij}^0 = \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_i}, \quad i, j, n = \overline{1,3}. \quad (2)$$

In the case of a plane problem indexes in (1), (2) and expressions given below, change from 1 to 2.

Determining the subcritical state study of the stability problem is carried out in the framework of the second variant of theory of small subcritical deformations [2] in the simulation of the matrix and fibers as linearly elastic isotropic bodies. Thus, we have the basic relation in the form

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\omega_{ij\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} u_\alpha \right) = 0, \quad x \in \Omega, \quad i, j, \alpha, \beta = \overline{1,3}. \quad (3)$$

Consideration is being given to the computational domain with initial stresses $\lambda \sigma_{ij}^0$ and surface load λP , where λ – monotonically increasing the proportionality factor, the problem of stability (3) is reduced to a generalized eigenvalue problem. The critical value of the parameter λ is an eigenvalue problem and buckling u_α – corresponding eigenfunction. The critical load is determined from the expression

$$P_{kp} = \min |\lambda| P, \quad (4)$$

where $\min |\lambda|$ – the minimum module eigenvalue of the problem on own values, P – the intensity of the external loads applied at infinity to the composite material. In the study of fiber buckling critical strain will determine by ratio

$$\varepsilon_{11}^{kp} = P_{kp} (1 - \nu) / (2G), \quad (5)$$

where G , ν – shear module and Poisson's ratio of fiber.

The problems (1) – (5) we solve by method of grids with use of the concept of the basic scheme [5]. At such approach we build the differential scheme for settlement area in each net knot as a certain sum of values of the basic scheme representing the differential scheme received in the variational-difference approach on a template of a cell of a differential grid.

Calculations have been executed for the following values of mechanical and geometrical characteristics of components of a composite material: $E_a E_m^{-1} = 30, 50, 100$ – the ratio of Young's modulus of fiber and a matrix; $\nu_a = \nu_m = 0, 4$ – Poisson's coefficients of fiber and a matrix; geometrical parameters of fiber changed in an interval $10 \leq l m^{-1} \leq 100$.

The received results of calculations are presented in the form of dependences of size of critical strain on mechanical and geometrical parameters of a composite. The size of critical strain $\varepsilon_{11}^{kp^a}(x)$ was considered in an average point of the reinforcing fiber i.e. at $x = 0$.

The analysis of results of calculation is shown that value of $\left| \varepsilon_{11}^{kp^a} \right|$ for a spatial problem is less than corresponding value for a plane problem. Distinction between results for a plane and spatial problem for values has made respectively 8%, 7,5%, 5%.

For the investigated interval of variation of geometrical and mechanical characteristics of composite material the results of a spatial problem of stability of the isolated fiber in an infinite matrix at longitudinal compression can be replaced approximately with results of a plane problem of the stability, received with the set accuracy within the limits of «model of short fibers».

REFERENCES

1. **Guz A. N.** On Constructing of the Theory of Stability of the Unidirectional Fibrous Composites / A. N. Guz // Soviet Applied Mechanics. – 1969 – Vol.5, No.2. – P. 62–70.
2. **Guz A. N.** Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies / A. N. Guz – Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1999 – 555p.
3. **Guz A. N.** On Two Models in the Three-Dimensional Theory of Stability of Composite Materials / A. N. Guz, V. A Dekret // International Applied Mechanics. – 2008 – Vol. 44, No.8. – P.839–854.
4. **Guz A. N.** Finite – Fiber Model in the Three-Dimensional Theory of Stability of Composites / A. N. Guz // International Applied Mechanics. – 2016 – Vol. 52, No.1. – P.1–48.
5. **Guz A. N.** Numerical Solution of Three-Dimensional Stability Problems for Elastic body / A. N. Guz, Yu. V. Kokhanenko // International Applied Mechanics. – 2001 – Vol. 37, No.11. – P.1369–1399.
6. **Dekret V. A.** Plane Instability for a Composite Reinforced with a Periodic Row of Short Parallel Fibers / V. A Dekret // International Applied Mechanics. – 2008 – Vol.44, No.5. – P.498–504.
7. **Dekret V. A.** Near-Surface Instability of Composite Materials Weakly Reinforced with Short Fibers / V. A Dekret // International Applied Mechanics. – 2008 – Vol.44, No.6. – P. 609-625.
8. **Dekret V. A.** Numerical Analysis of Stability of a Laminated Composite with Compressed Reinforcement Plies / V. A Dekret, V.S. Zelenskii, V.M. Bystrov // Int. Appl. Mech. – 2015. – Vol. 51, No 5. – P. 561–566.
9. **Pissanetzky S.** Sparse Matrix Technology / S. Pissanetzky – London: Academic Press, 1984. – 321 p.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины
Киев, Украина

Поступила в редколлегию 13.09.2016