ISSN 2079–1836
2016, вип. 25

УДК 533.6.013.42

Ю. Н. Кононов[1], д-р физ.- мат. наук, А. А. Лимарь[2]

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, РАЗДЕЛЯЮЩЕЙ ИДЕАЛЬНЫЕ ЖИДКОСТИ РАЗНОЙ ПЛОТНОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ С ЖЕСТКИМИ ОСНОВАНИЯМИ

Получено частотное уравнение собственных колебаний пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с жесткими основаниями для различных способов закрепления её контуров. Показано, что для защемленных контуров частотное уравнение можно привести к единой форме, как для симметричных, так и несимметричных совместных колебаний пластины и жидкости. Получено условие устойчивости колебаний пластины и жидкости. Рассмотрены различные случаи вырождения пластины в мембрану, её отсутствие, отсутствие верхней или нижней жидкости, случай невесомости.

Ключевые слова: *гидроупругость, прямоугольная пластина, идеальная несжимаемая жидкость, плоские колебания.*

Введение. На основании единого Лагранжевого подхода задача о колебании прямоугольной пластины, разделяющей идеальные несжимаемые жидкости разной плотности в жестком прямоугольном канале с учетом свободной поверхности у верхней жидкости, по-видимому, впервые была рассмотрена в [1]. В [2] эта задача была решена на основе Эйлерова подхода. Наиболее полное исследование свободных колебаний мембраны на свободной поверхности жидкости в прямоугольном канале было проведено в [3]. В [4] эта задача была обобщена на случай двухслойной жидкости с мембранами на свободной и внутренней поверхностях, а в [5] – на случай упругого дна.

В данной статье продолжены исследования, начатые в [2, 4, 6 – 8], показана возможность упрощения частотного уравнения, выведены условия устойчивости колебаний пластины.

Постановка задачи. Рассмотрим плоские колебания тонкой упругой прямоугольной пластины, горизонтально разделяющей идеальные несжимаемые жидкости, плотности ρ_i $(i=1,2)$ в жестком прямоугольном канале шириной $2a$. Пластина обладает постоянной изгибной жесткостью D и подвержена растягивающим усилиям в срединной поверхности интенсивности T. Контуры пластины могут иметь произвольное закрепление, например, быть защемлены, оперты или свободны. Верхняя жидкость, плотности ρ_1, заполняет сосуд до глубины h_1, а нижняя жидкость, плотности ρ_2 до глубины h_2.

Систему координат $Oxyz$ расположим так, чтобы плоскость Oxy находилась на невозмущённой срединной поверхности пластины, ось Oy была направлена вдоль канала, а ось Oz – противоположно вектору ускорения силы тяжести $\vec{g}$. Колебания пластины и жидкости будем рассматривать в линейной постановке, считая совместные колебания пластины и жидкости безотрывными, а движения жидкостей потенциальными.

Уравнения плоских колебаний тонкой упругой пластины и жидкости имеют вид [2, 6 – 8]:

$$k_{01}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+D\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}-T\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=P_2-P_1 \quad \text{при} \quad z=0\,; \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2}=0 \quad (i=1,2) \tag{2}$$

с граничными условиями:

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}=\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \quad \text{при} \quad z=0\,; \tag{3}$$

$$\left(\mathfrak{L}_{jp}[W]\right)\Big|_{\gamma_j}=0 \quad (j,p=1,2)\,; \tag{4}$$

$$\int\limits_{-a}^{a} W dx=0\,; \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\right|_{x=\pm a}=0 \quad (i=1,2)\,; \tag{6}$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}=0 \quad \text{при} \quad z=h_1\,, \qquad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}=0 \quad \text{при} \quad z=h_2\,. \tag{7}$$

Здесь $k_{01}=\rho_0\cdot\delta_0$; $W(x,t)$, ρ_0, δ_0 – соответственно нормальный прогиб, плотность и толщина пластины; $\Phi_i\left(x,z,t\right)$ – потенциал скоростей i-ой жидкости ($i=1,2$); $P_i(x,z,t)$ – гидродинамическое давление в i-ой жидкости; $\mathfrak{L}_{j1}$ и $\mathfrak{L}_{j2}$ – дифференциальные операторы граничных условий закрепления пластины по контуру γ_j ($j=1,2$). Здесь для удобства записи введено обозначение контуров через γ_j (индекс $j=1$ соответствует контуру $x=-a$, а $j=1$ – $x=a$). Так, например, для наиболее интересного случая жесткого защемления пластины оператор $\mathfrak{L}_{j1}$ будет единичным, а $\mathfrak{L}_{j2}=\mathrm{d}/\mathrm{d}x$.

Давление $P_i(x,z,t)$ находится из интеграла Коши – Лагранжа

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial t}+gz+\frac{P_i}{\rho_i}=Q_i\,,$$

где Q_i – произвольная функция времени.

Не ограничивая общности эту функцию можно положить равной нулю.

Уравнение (3) показывает непрерывность нормальной составляющей скорости при переходе от первой жидкости ко второй.

С учетом интеграла Коши – Лагранжа уравнение (1) можно записать следующим образом

$$k_{01}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+D\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}-T\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+g\Delta\rho W=\rho_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}-\rho_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial t}\quad \text{при}\quad z=0\,. \tag{8}$$

Здесь $\Delta\rho=\rho_2-\rho_1$.

М**етод решения.** Представим функцию $\Phi_i\left(x,z,t\right)$ в виде ряда Фурье по собственным функциям $\psi_n\left(x\right)$

$$\Phi_i=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{in}\left(t\right)\mathrm{e}^{k_n z}+B_{in}\left(t\right)\mathrm{e}^{-k_n z}\right]\psi_n\left(x\right)\quad (i=1,2\,), \tag{9}$$

где

$$\psi_n\left(x\right)=\cos k_n\left(x+a\right) \tag{10}$$

описывают колебания идеальной жидкости в прямоугольном канале; $k_n=\pi n/\left(2a\right)$ – соответствующие им собственные числа.

Представление функции $\Phi_i\left(x,z,t\right)$ в виде (9) с учетом (10) позволяет удовлетворить уравнению (2) и граничным условиям (6).

Подставив ряды (9) в (3) и (7) и, воспользовавшись ортогональностью функций $\psi_n\left(x\right)$, получим линейную систему уравнений относительно неизвестных A_{in}, B_{in} и $\dot{W}_n$

$$A_{1n}-B_{1n}=\frac{1}{k_n}\dot{W}_n\,;\qquad A_{1n}-B_{1n}=A_{2n}-B_{2n}\,;$$

$$A_{1n}\,\mathrm{e}^{\kappa_{1n}} - B_{1n}\,\mathrm{e}^{-\kappa_{1n}} = 0\,; \qquad A_{2n}\,\mathrm{e}^{-\kappa_{2n}} - B_{2n}\,\mathrm{e}^{\kappa_{2n}} = 0\,. \tag{11}$$

Разрешим систему (11) относительно A_{in}, B_{in}

$$A_{1n} = -\frac{\dot{W}_n\,\mathrm{e}^{-\kappa_{1n}}}{2k_n \sinh\kappa_{1n}},\ B_{1n} = -\frac{\dot{W}_n\,\mathrm{e}^{\kappa_{1n}}}{2k_n \sinh\kappa_{1n}}\ ;$$

$$A_{2n} = \frac{\dot{W}_n\,\mathrm{e}^{\kappa_{2n}}}{2k_n \sinh\kappa_{2n}},\ B_{2n} = \frac{\dot{W}_n\,\mathrm{e}^{-\kappa_{2n}}}{2k_n \sinh\kappa_{2n}}\,.$$

Здесь

$$W_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} W\psi_n dx\,,\quad \kappa_{in} = h_i k_n\,. \tag{12}$$

С учетом соотношений (9) и (12) уравнение (8) примет вид

$$k_{01}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + D\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - T\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + g\Delta\rho W = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n \ddot{W}_n}{k_n}\psi_n\,, \tag{13}$$

где $a_n = \rho_1 \coth\kappa_{1n} + \rho_2 \coth\kappa_{2n}$.

Таким образом, совместные колебания упругой пластины и жидкости находятся из системы интегро-дифференциальных уравнений (12), (13), граничных условий (4), условий несжимаемости жидкости (5) и заданных начальных условий.

Собственные совместные колебания упругой пластины и жидкости. Для нахождения собственных частот совместных колебаний упругой пластины и жидкости положим

$$W(x,t) = w(x)\mathrm{e}^{i\omega t}\,. \tag{14}$$

Подставив (14) в (13), (12), граничные условия (4) и в условия несжимаемости жидкости (5), получим

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - P\frac{d^2 w}{dx^2} + qw = \frac{\omega^2}{D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n w_n}{k_n}\psi_n\,; \tag{15}$$

$$w_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} w\psi_n dx\,; \tag{16}$$

$$\left(\mathfrak{L}_{jp}w\right)\Big|_{\gamma_j} = 0 \quad (j, p = 1,2)\,; \tag{17}$$

$$\int\limits_{-a}^{a} w dx = 0\,. \tag{18}$$

Здесь $P = T/D \geq 0$, $q = \left(k_{01}\omega^2 - g\Delta\rho\right)\Big/D$ ($D \neq 0$). Случай $D = 0$ рассмотрен в [6].

Общее решение уравнения (15) будем искать в виде линейной комбинации четырех решений w_k^0 ($k = \overline{1,4}$) соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - P\frac{d^2 w}{dx^2} + qw = 0 \tag{19}$$

и частного решения неоднородного уравнения в виде ряда по собственным формам колебаний идеальной жидкости

$$w = \sum_{k=1}^{4} A_k^0 w_k^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_n \psi_n\,. \tag{20}$$

Здесь A_k^0 и $\tilde{C}_n$ – неизвестные константы.

Подставив (20) в (15), воспользовавшись из (10) соотношениями $\dfrac{d^2\psi_n}{dx^2} = -k_n^2\psi_n$ и $\dfrac{d^4\psi_n}{dy^4} = k_n^4\psi_n$, найдем $\tilde{C}_n$

$$\tilde{C}_n = \frac{\omega^2 a_n w_n}{k_n d_n}\,, \tag{21}$$

где $d_n = \left(Dk_n^2 + T\right)k_n^2 + g\Delta\rho - k_{01}\omega^2$.

Подставив (20) в (16) и, принимая во внимание (21), получим выражение для w_n

$$w_n = \frac{k_n d_n}{k_n d_n - \omega^2 a_n} \sum_{k=1}^{4} A_k^0 E_{kn}^0\,. \tag{22}$$

Здесь

$$E_{kn}^0 = \frac{1}{a}\int\limits_{-a}^{a} w_k^0 \psi_n dx \quad (k = \overline{1,4}). \tag{23}$$

Окончательное выражение для формы прогиба пластины w (формула (20)), с учетом (21) и (22), примет вид

$$w = \sum_{k=1}^{4} \left(w_k^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_{kn}^0 \psi_n \right) A_k^0 , \tag{24}$$

где $\alpha_n = a_n \Big/ \left(\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n \right)$, $\tilde{a}_n = a_n + k_n k_{01}$, $\tilde{d}_n = \left(D k_n^2 + T \right) k_n^2 + g \Delta \rho$.

В формулу (24) входят четыре неизвестные константы A_k^0 . Из условия закрепления пластинки (18) получим четыре линейных уравнения относительно A_k^0

$$\sum_{k=1}^{4} \left(\mathfrak{L}_{jpk}^0 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_{kn}^0 \mathfrak{L}_{jpn} \right) A_k^0 = 0 \quad (j, p = 1, 2) . \tag{25}$$

Здесь $\mathfrak{L}_{jpk}^0 = \left(\mathfrak{L}_{jp} \left[w_k^0 \right] \right) \Big|_{\gamma_j}$, $\mathfrak{L}_{jpn} = \left(\mathfrak{L}_{jp} \left[\psi_n \right] \right) \Big|_{\gamma_j}$.

Из равенства нулю определителя однородной системы (25) следует частотное уравнение собственных совместных колебаний упругой пластинки и жидкости

$$\left| \left\| C_{qk} \right\|_{q,k=1}^{4} \right| = 0 , \tag{26}$$

где $C_{qk} = \mathfrak{L}_{jpk}^0 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_{kn}^0 \mathfrak{L}_{jpn}$, $(k = \overline{1,4};\ q = q(j,p);\ j, p = 1, 2)$;

$$q(j,p) = \begin{cases} j + p - 1, & (j, p = 1, 2) \\ 4, & j = p = 2 \end{cases} .$$

Запишем операторы $\mathfrak{L}_{jp}$ ($p = 1, 2$) и значения функций $\mathfrak{L}_{jpn}$ для защемленного, опертого и свободного края:

– защемленный край:

$$\mathfrak{L}_{j1} \equiv 1,\ \mathfrak{L}_{j2} = \mathrm{d}/\mathrm{d}x , \quad \mathfrak{L}_{11n} = 1 , \quad \mathfrak{L}_{21n} = (-1)^n , \quad \mathfrak{L}_{12n} = 0 , \quad \mathfrak{L}_{22n} = 0 ;$$

– опертый край:

$$\mathfrak{L}_{j1} \equiv 1,\ \mathfrak{L}_{j2} = \mathrm{d}^2 \big/ \mathrm{d}x^2 , \quad \mathfrak{L}_{11n} = 1 , \quad \mathfrak{L}_{21n} = (-1)^n , \quad \mathfrak{L}_{12n} = -k_n^2 ,$$

$$\mathfrak{L}_{22n} = (-1)^{n+1} k_n^2 ;$$

– свободный край:

$$\mathfrak{L}_{j1} = \mathrm{d}^2 / \mathrm{d}\,x^2 , \quad \mathfrak{L}_{j2} = \mathrm{d}^3 / \mathrm{d}\,x^3 , \quad \mathfrak{L}_{11n} = -k_n^2 , \quad \mathfrak{L}_{21n} = (-1)^{n+1} k_n^2 ,$$
$$\mathfrak{L}_{11n} = 0 , \quad \mathfrak{L}_{22n} = 0 .$$

В дальнейшем остановимся на случае защемленных контуров, т.к. на практике он наиболее часто используется. Коэффициенты определителя частотного уравнения (26) в этом случае примут вид

$$C_{1k} = B_{1k} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_{kn}^0 , \; C_{2k} = C_{1k}^0 ;$$

$$C_{3k} = B_{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha_n E_{kn}^0 , \; C_{4k} = C_{2k}^0 \quad (k = \overline{1,4}).$$

Здесь $B_{jk} = w_k^0 \big|_{\gamma_j}$, $C_{jk}^0 = \left.\dfrac{\mathrm{d}\,w_k^0}{\mathrm{d}\,x}\right|_{\gamma_j}$.

Для упрощения частотного уравнения (26) в случае защемленных контуров разложим функцию w_k^0 в ряд по полной и ортогональной системе собственных функций ψ_n , воспользуемся условием $\int\limits_{-a}^{a} \psi_n dx = 0$, обозначением (23) и запишем форму прогиба пластинки w в виде

$$w = \sum_{k=1}^{4} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n E_{kn}^0 \psi_n \right) A_k^0 , \tag{27}$$

где $\beta_n = k_n d_n \Big/ \left(\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n \right)$.

С учетом (27) частотное уравнение запишется следующим образом

$$\left| \left\| C_{qk} \right\|_{q,k=1}^{4} \right| = 0 . \tag{28}$$

Здесь

$$C_{1k} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n E_{kn}^0 , \; C_{2k} = C_{1k}^0 ;$$

$$C_{3k} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n E_{kn}^0 (-1)^n , \; C_{4k} = C_{2k}^0 \quad (k = \overline{1,4}). \tag{29}$$

По формуле (23) вычислим коэффициенты E_{kn}^0. Для этого выпишем фундаментальную систему решений для уравнения (19). Решения этого уравнения зависят от знака величины q и знака выражения $p^2/4-q$. Рассмотрим различные варианты сочетаний знаков.

1. Пусть $q>0$ и $P^2/4-q>0$. В этом случае фундаментальная система решений уравнения (19) имеет вид

$$w_k^0=\{\sinh p_1x, \cosh p_1x, \sinh p_2x, \cosh p_2x\},$$

а коэффициенты E_{kn}^0 :

$$E_{1n}^0=\frac{p_1\cosh p_1^*}{a\left(k_n^2+p_1^2\right)}\left[(-1)^n-1\right],\quad E_{2n}^0=\frac{p_1\cosh p_1^*}{a\left(k_n^2+p_1^2\right)}\left[(-1)^n+1\right];$$

$$E_{3n}^0=\frac{p_2\cosh p_2^*}{a\left(k_n^2+p_2^2\right)}\left[(-1)^n-1\right],\quad E_{4n}^0=\frac{p_2\sinh p_2^*}{a\left(k_n^2+p_2^2\right)}\left[(-1)^n+1\right]. \qquad (30)$$

Здесь $p_{1,2}^2=P/2\pm\sqrt{P^2/4-q}$, $p_i^*=ap_i$ ($i=1,2$).

2. Пусть $q<0$. В этом случае фундаментальная система решений уравнения (19) имеет вид $w_k^0=\{\sinh\tilde{p}_1x, \cosh\tilde{p}_1x, \sin\tilde{p}_2x, \cos\tilde{p}_2x\}$, а коэффициенты E_{kn}^0:

$$E_{1n}^0=\frac{\tilde{p}_1\cosh\tilde{p}_1^*}{a\left(k_n^2+\tilde{p}_1^2\right)}\left[(-1)^n-1\right],\quad E_{2n}^0=\frac{\tilde{p}_1\cosh\tilde{p}_1^*}{a\left(k_n^2+\tilde{p}_1^2\right)}\left[(-1)^n+1\right];$$

$$E_{3n}^0=\frac{\tilde{p}_2\cosh\tilde{p}_2^*}{a\left(k_n^2+\tilde{p}_2^2\right)}\left[(-1)^n-1\right],\quad E_{4n}^0=\frac{\tilde{p}_2\cosh\tilde{p}_2^*}{a\left(k_n^2+\tilde{p}_2^2\right)}\left[(-1)^n+1\right], \qquad (31)$$

где $p_{1,2}^2=\pm P/2+\sqrt{P^2/4-q}$, $\tilde{p}_i^*=a\tilde{p}_i$ ($i=1,2$).

3. Пусть $P^2/4-q<0$ (как следствие этого – $q>0$). В этом случае фундаментальная система решений уравнения (19) имеет вид,

$$w_k^0=\{\cosh\hat{p}_1x\cdot\sin\hat{p}_2x, \sinh\hat{p}_1x\cdot\sin\hat{p}_2x, \sinh\hat{p}_1x\cdot\cos\hat{p}_2x, \cosh\hat{p}_1x\cdot\cos\hat{p}_2x\},$$

а коэффициенты E_{kn}^0:

$$E_{1n}^0 = \frac{\hat{p}_1 k_{n1} \sinh \hat{p}_1^* \sin \hat{p}_2^* + \hat{p}_2 k_{n2} \cosh \hat{p}_1^* \cos \hat{p}_2^*}{\hat{p}_{12}} \left[(-1)^n - 1 \right];$$

$$E_{2n}^0 = \frac{\hat{p}_1 k_{n1} \cosh \hat{p}_1^* \sin \hat{p}_2^* - \hat{p}_2 k_{n2} \sin \hat{p}_1^* \cos \hat{p}_2^*}{\hat{p}_{12}} \left[(-1)^n - 1 \right];$$

$$E_{3n}^0 = \frac{\hat{p}_1 k_{n1} \cosh \hat{p}_1^* \cos \hat{p}_2^* + \hat{p}_2 k_{n2} \sinh \hat{p}_1^* \sin \hat{p}_2^*}{\hat{p}_{12}} \left[(-1)^n - 1 \right]; \qquad (32)$$

$$E_{4n}^0 = \frac{\hat{p}_1 k_{n1} \sinh \hat{p}_1^* \cos \hat{p}_2^* + \hat{p}_2 k_{n2} \cosh \hat{p}_1^* \sin \hat{p}_2^*}{\hat{p}_{12}} \left[(-1)^n - 1 \right].$$

Здесь $\hat{p}_{1,2} = \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{q} \pm P}$ (знак плюс выбирается для $\hat{p}_1$),

$$k_{n1} = \hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + k_n^2, \quad k_{n2} = \hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 - k_n^2,$$
$$\hat{p}_{12} = \left[\hat{p}_1^2 + \left(\hat{p}_2 - k_n \right)^2 \right] \left[\hat{p}_1^2 + \left(\hat{p}_2 + k_n \right)^2 \right], \quad \hat{p}_i^* = a\hat{p}_i.$$

В случае 1 коэффициенты C_{qk} согласно (29) примут вид:

$$C_{11} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{1,2m-1}^0, C_{12} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{2,2m}^0, C_{13} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{3,2m-1}^0, C_{14} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{4,2m}^0$$

$$C_{21} = p_1 \cosh p_1^*, C_{22} = -p_1 \sinh p_1^*, C_{23} = p_2 \cosh p_2^*, C_{24} = -p_2 \sinh p_2^*;$$

$$C_{31} = -\sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{1,2m-1}^0, C_{32} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{2,2m}^0; \qquad (33)$$

$$C_{33} = -\sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{3,2m-1}^0, C_{34} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{4,2m}^0;$$

$$C_{41} = p_1 \cosh p_1^*, \ C_{42} = p_1 \sinh p_1^*, \ C_{43} = p_2 \cosh p_2^*, \ C_{44} = p_2 \sinh p_2^*.$$

Приводя определитель к блочному виду с двумя нулевыми блоками, получим

$$\left(p_2 \cosh p_2^* \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{1,2m-1}^0 - p_1 \cosh p_1^* \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{3,2m-1}^0 \right) \times$$

$$\times\left(-p_1 \cosh p_1^* \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{4,2m}^0 + p_2 \cosh p_2^* \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{2,2m}^0\right) = 0. \qquad (34)$$

Уравнение (34) распадается на два описывающих несимметричные и симметричные частоты. С учетом соотношений (30) будем иметь

$$\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\beta}_{2m-1} = 0 \text{ и } \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\beta}_{2m} = 0. \qquad (35)$$

Здесь $\tilde{\beta}_n = k_n \Big/ \left(\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n\right)$.

Таким образом, частотное уравнение (35) не зависит от условий $q > 0$ и $P^2 \big/ 4 - q > 0$, распадается на четные и нечетные частоты и может быть записано в единой форме

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n} = 0. \qquad (36)$$

В случае 2 коэффициенты C_{qk} запишутся в виде (33) при условии, что p_i и p_i^* соответственно равны $\hat{p}_i$ и $\hat{p}_i^*$.

Проведя, как и в первом случае, аналогичные преобразования со строками и столбцами определителя, получим

$$\left(\tilde{p}_2 \cos \tilde{p}_2^* \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{1,2m-1}^0 - \tilde{p}_1 \cosh \tilde{p}_1^* \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{3,2m-1}^0\right) \times$$

$$\times\left(-\tilde{p}_1 \cos \tilde{p}_1^* \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{4,2m}^0 + \tilde{p}_2 \sin \tilde{p}_2^* \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{2,2m}^0\right) = 0. \qquad (37)$$

Уравнение (37) распадается на два описывающих несимметричные и симметричные частоты, и с учетом соотношений (31) будут иметь вид (36).

В случае 3 коэффициенты C_{1k} и C_{3k} примут вид (33), а C_{2k} и C_{4k} $(k = \overline{1,4})$ запишутся следующим образом:

$$C_{21} = \hat{p}_1 \sinh \hat{p}_1^* \sin \hat{p}_2^* + \hat{p}_2 \cosh \hat{p}_1^* \cos \hat{p}_2^*;$$

$$C_{22} = -\hat{p}_1 \cosh \hat{p}_1^* \sin \hat{p}_2^* - \hat{p}_2 \sinh \hat{p}_1^* \cos \hat{p}_2^*;$$

$$C_{23} = \hat{p}_1 \cosh \hat{p}_1^* \cos \hat{p}_2^* - \hat{p}_2 \sinh \hat{p}_1^* \sin \hat{p}_2^*;$$

$$C_{24} = -\hat{p}_1 \sinh \hat{p}_1^* \cos \hat{p}_2^* + \hat{p}_2 \cosh \hat{p}_1^* \sin \hat{p}_2^* ;$$
$$C_{41} = C_{21},\ C_{42} = -C_{22},\ C_{43} = C_{23},\ C_{44} = -C_{24} .$$

Проведя аналогичные преобразования, как и в случае 1, получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} \left(C_{23} E_{1,2m-1}^0 - C_{21} E_{3,2m-1}^0 \right) \times \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} \left(C_{22} E_{4,2m-1}^0 - C_{24} E_{2,2m-1}^0 \right) = 0 \,. \quad (38)$$

Уравнение (38) также распадается на два, описывающих несимметричные и симметричные частоты.

Таким образом, для защемленных контуров, для условий 1 – 3 частотное уравнение (28) распадается на нечетные и нечетные частоты и может быть записано в единой форме (36).

Если в ряде уравнения (36) удержать два члена, то из неравенства $\omega^2 > 0$ следуют, с достаточной для практики точностью, условия устойчивости плоской формы равновесия пластины. Для нечетных и четных форм колебаний они соответственно примут вид

$$2.05\pi^2 \frac{D}{a^2} + T > \frac{4g(\rho_1 - \rho_2)a^2}{5\pi^2} \quad (n = 1,3); \qquad (39)$$

$$3.4\pi^2 \frac{D}{a^2} + T > \frac{2g(\rho_1 - \rho_2)a^2}{5\pi^2} \quad (n = 2,4). \qquad (40)$$

Условия устойчивости (39), (40) не зависят от глубины заполнения жидкостей и массы пластины. Из этих условий видно, что для устойчивости несимметричных колебаний нужно значительно большая изгибная жесткость и величина предварительного натяжения, чем для симметричных. Неравенства (39), (40) можно уточнить с учетом трех и более членов ряда, но при этом необходимо воспользоваться условиями положительности корней полиномов n-ой степени, что значительно усложнит аналитические исследования. Из условий (39) и (40) следует, что, с учетом принятой точности, при естественной стратификации $\rho_1 \le \rho_2$ частотное уравнение всегда имеет положительные корни и плоская форма равновесия упругой пластины устойчива. Неустойчивость может иметь место только при нарушении естественной стратификации, т.е. при условии $\rho_1 > \rho_2$. Выписанные неравенства (39), (40) совпадают с ранее полученными в [1, 2] при наличии свободной поверхности у верхней жидкости.

Выведенное частотное уравнение (36) и условия устойчивости (39), (40) являются общими и включают в себя ряд частных случаев исходной задачи, а именно: вырождение пластины в мембрану, ее отсутствие, отсутствие нижней или верхней жидкости, влияние перегрузки и случай невесомости. Положив нулю изгибную жесткость ($D = 0$) в уравнении (36) и в условиях (39), (40), получим случай вырождения пластины в мембрану. Этот случай был детально исследован в [6]. При отсутствия пластины необходимо в уравнении (36) и в условиях (39), (40) положить $D = 0$, $T = 0, k_{01} = 0$. Из равенства нулю знаменателя уравнения (36) получим квадрат частоты колебаний двухслойной идеальной жидкости в жестком прямоугольном канале в виде $\omega_n^2 = g k_n \Delta\rho / a_n$ [6], а из неравенств (39), (40) следует очевидное условие устойчивости $\rho_1 \le \rho_2$. Положив плотность нижней жидкости равной нулю ($\rho_2 = 0$) в уравнении (36) и в условиях (39), (40), получим новую задачу о колебании жидкости в прямоугольном канале с жестким верхним и упругим нижним основаниями, а положив плотность верхней жидкости равной нулю ($\rho_2 = 0$) – получим известную задачу, исследованную в [3]. Если в уравнении (36) и в условиях (39), (40) положить $g = n_x g_0$ (n_x – величина перегрузки, $g_0 = 9{,}81$), то можно оценить влияние перегрузки и невесомости ($n_x = 0$) на собственные частоты колебаний и на условия устойчивости. Из неравенств (39), (40) следует, что при естественной стратификации ($\rho_1 \le \rho_2$) и положительной перегрузке ($n_x > 0$), а также при $\rho_1 > \rho_2$ и отрицательной ($n_x < 0$) или нулевой перегрузке ($n_x = 0$), они всегда выполнены.

Выводы. В линейной постановке получено и исследовано частотное уравнение собственных колебаний прямоугольной тонкой пластины между жидкостями разной плотности для различных способов закрепления пластины. Показано, что для защемленных контуров пластины частотное уравнение можно привести к единой форме как для симметричных, так и несимметричных колебаний пластины и жидкости. Получены условия устойчивости колебаний пластины и жидкости. Рассмотрены и проанализированы различные предельные случаи вырождения пластины в мембрану, ее отсутствие, отсутствие верхней или нижней жидкости, случай невесомости.

Представляет интерес упрощение частотного уравнения для случаев опертого и свободных контуров и получение для них условий устойчивости.

Публикация содержит результаты исследований, проведенных при грантовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований по конкурсному проекту Ф71 / 80-2016.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. ***Ильгамов М. А.*** Об устойчивости упругой пластины между жидкостями разной плотности / М. А. Ильгамов, Ж. М. Сахабутдинов // Изб. проблемы прикл. механики. Сб. статей к шестидесятилетию акад. Н. Челомея − М.: Машиностроение. – 1974. – С. 341–346.

2. ***Кононов Ю. Н.*** Свободные колебания двухслойной жидкости, разделенной упругой пластинкой в прямоугольном канале / Ю. Н. Кононов, Е. А. Татаренко // Теор. и прикл. механика. – 2002. – Вып. 36. – С. 170-176.

3. ***Троценко В. А.*** Свободные колебания жидкости в прямоугольном канале с упругой мембраной на свободной поверхности / В. А. Троценко // Прикл. механика. – 1995. – Т. 31. №8 – С.74–80.

4. ***Кононов Ю. Н.*** Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими мембранами на «свободной» и внутренней поверхностях / Ю. Н. Кононов, Е. А. Татаренко // Акустичний вісник. – 2003. – Т. 6, №4 . – С. 44–52.

5. ***Кононов Ю. Н.*** Свободные колебания упругих мембран и двухслойной жидкости в прямоугольном канале с упругим дном / Ю. Н. Кононов, Е. А. Татаренко // Прикл. гідромеханіка. – 2008. – №1 . – С. 33–38.

6. ***Кононов Ю. Н.*** Колебания прямоугольной мембраны, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с жесткими основаниями / Ю. Н. Кононов, А. А. Лимарь // Вісн. Донецького ун-ту. Сер. А. Природничі науки, №1-2. – 2015 – С. 97–108.

7. ***Кононов Ю. М.*** Стійкість коливань пластини, яка розділяє ідеальні рідини різною густини у прямокутному каналі [Електронний ресурс] / Ю. М. Кононов, О. О. Лимар // Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2016» – Режим доступу: http://iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Lymar.pdf.

8. ***Кононов Ю. Н.*** Колебания пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале / Ю. Н. Кононов, А. А. Лимарь // Матем. пробл. техн. мех. – 2016: Матеріали XVI Міжнародної наукової конференції. – 2016. – Дніпродзержинськ. – С. 14.

Ю. М. Кононов, д-р фіз.-мат. наук, О. О. Лимар,

ПРО СТІЙКІСТЬ КОЛИВАНЬ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ, ЩО РОЗДІЛЯЄ ІДЕАЛЬНІ РІДИНИ РІЗНОЇ ЩІЛЬНОСТІ В ПРЯМОКУТНОМУ КАНАЛІ З ЖОРСТКИМИ ОСНОВАМИ

Для різних способів закріплення контурів пластини виведено частотне рівняння власних коливань пластини, що розділяє ідеальні рідини різної щільності в прямокутному каналі з жорсткими основами. Показано, що для затиснених контурів пластини частотне рівняння можна привести до єдиної формі як для симетричних, так і несиметричних спільних коливань пластини і рідини. Отримано умова стійкості коливань пластини і рідини. Розглянуто різні випадки виродження пластини в мембрану, її відсутність, відсутність верхньої або нижньої рідини, випадок невагомості.

Ключові слова*: гідропружність, прямокутна пластина, плоскі коливання, ідеальна нестислива рідина.*

Yu. N. Kononov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), A. A. Lymar

ON THE STABILITY OF OSCILLATIONS OF RECTANGULAR PLATE THAT SEPARATES THE IDEAL LIQUID OF DIFFERENT DENSITY IN A RECTANGULAR CHANNEL WITH RIGID BASES

For different ways to fix the plate contours the frequency equation of natural oscillations of the plate separating the ideal liquid of different density in a rectangular channel with rigid bases was derived. It is shown that for the clamped plate contours the frequency equation can be reduced to a single form for both symmetrical and asymmetrical joint oscillations of the plate and liquid. A condition for the stability of the oscillation plate and liquid was obtained. Various cases of degeneration of

the plate in the membrane, its absence, the absence of the top or bottom of the liquid, in case of weightlessness were considered.

Keywords: *hydroelasticity, rectangular plate, flat oscillations, ideal incompressible fluid.*

The stability of an elastic rectangular plate, separating the ideal incompressible fluid of different density in a rectangular channel with a hard base is studied. The case of a hard top base and the case of free surface at the liquid top presence are shown. The frequency equations are obtained for the cases of symmetric and non-symmetric oscillations of plate and liquid combinations. Various cases of plate loops fixation (clamped, simply supported and the free edge), the case of the plate change into the membrane, the cases of the top or bottom liquid absence and the case of liquid weightlessness have also been studied. The analytical and numerical investigations have been obtained for a large range of mechanical system parameters. In this article we continue the investigations started in [2, 4, 6-8]. The possibility of simplifying the frequency equation was considered, the stability conditions for oscillations of the plate and a number of new results were obtained.

Free joint oscillations of elastic plates and a two-layer fluid can be found from the following boundary value problem:

$$\frac{d^4w}{dx^4} - P\frac{d^2w}{dx^2} + qw = \frac{\omega^2}{D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n w_n}{k_n}\psi_n\,,\quad \int_{-a}^{a} w dx = 0\,;$$

$$\left(\mathfrak{L}_{jp}w\right)\Big|_{\gamma_j} = 0 \quad (j,p=1,2)\,. \tag{1}$$

Here $P = \dfrac{T}{D} \ge 0$, $q = \dfrac{k_{01}\omega^2 - g\Delta\rho}{D}$, $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$, $\psi_n(x) = \cos k_n(x+a)$, $k_n = \pi n/(2a)$, $a_n = \rho_1 \coth\kappa_{1n} + \rho_2\coth\kappa_{2n}$, $w_n = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{-a}^{a} w\psi_n dx$, $2a$ – the channel width; $\mathfrak{L}_{jp}$ – the differiential operators, describing the plate loop boundary conditions**.** The case of $D=0$ and $\mathfrak{L}_{j1}=1$, $\mathfrak{L}_{j2}=0$ has been studied in [6].

Frequency equation of elastic plates and the liquid joint oscillations has the form

$$\left|\left\|C_{qk}\right\|_{q,k=1}^{4}\right| = 0\,, \tag{2}$$

where $C_{qk} = \mathfrak{L}^0_{jpk} - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E^0_{kn} \mathfrak{L}_{jpn}$, $(k = \overline{1,4};\ q = q(j,p);\ j,p = 1,2)$,

$q(j,p) = \begin{cases} j+p-1, & (j,p=1,2) \\ 4, j=p=2 \end{cases}$, $\alpha_n = \dfrac{a_n}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n}$, $\mathfrak{L}^0_{jpk} = \left(\mathfrak{L}_{jp}\left[w^0_k\right]\right)\Big|_{\gamma_j}$,

$\mathfrak{L}_{jpn} = \left(\mathfrak{L}_{jp}\left[\psi_n\right]\right)\Big|_{\gamma_j}$.

It is shown that for clamped loops ($\mathfrak{L}_{j1} \equiv 1,\ \mathfrak{L}_{j2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$) frequency equation (2) is divided into odd ($n = 2m-1$) and even ($n = 2m$) frequencies and it can be written in a single form for these frequencies

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n} = 0 . \qquad (3)$$

Here $\tilde{a}_n = a_n + k_n k_{01},\ \tilde{d}_n = \left(Dk_n^2 + T\right)k_n^2 + g\Delta\rho$.

If in the equation (3) the two terms in the number were kept, it follows from $\omega^2 > 0$ the conditions of stability of flat plate shape equilibrium with accuracy sufficient for the practic. For odd and even modes of vibration, they respectively take the form

$$2.05\pi^2 \frac{D}{a^2} + T > \frac{4g\left(\rho_1 - \rho_2\right)a^2}{5\pi^2} \quad (n = 1,3); \qquad (4)$$

$$3.4\pi^2 \frac{D}{a^2} + T > \frac{2g\left(\rho_1 - \rho_2\right)a^2}{5\pi^2} \quad (n = 2,4). \qquad (5)$$

The stability conditions (4) and (5) do not depend on the depth of filling liquid and the mass of the plate. From these conditions can be seen, for example, that the stability of asymmetric membrane vibrations ($D = 0$) needs twice membrane tension, than of symmetric ones. Inequality (4), (5) can be specified and based on three, four or more terms of the series, but it will have to use the terms of the positive roots of polynomials $2,3,...n$ – degrees, which greatly complicate the analyses. From these conditions it follows that, in view of highest accuracy, with the natural stratification $\rho_1 \le \rho_2$ frequency equation always has positive roots and flat shape of the elastic plate equilibrium is stable. The instability may occur only in case of violation of the natural stratification, i.e., under condition $\rho_1 > \rho_2$.

REFERENCES

1. ***Il'gamov M. A.*** On the stability of elastic plates between liquids of different density / M. A. Il'gamov, J. M. Sahabutdinov // Selected Problems of Applied Mechanics. Collection of articles on sixtieth of Acad. Chelomei - Moskow: Mashinostroenie. – 1974. – P. 341–346. (in Russian).

2. ***Kononov Yu. N.*** Free oscillations of a two-layer fluid divided by elastic plate in a rectangular channel / Yu. N. Kononov, C. A. Tatarenko // Teoret. i prikladnaya mekhanika. – 2002. – № 36. – P. 170–176. (in Russian).

3. ***Trotsenko V. A.*** Free oscillations fluid in a rectangular channel with an elastic membrane on the free surface / V. A. Trotsenko // Prikladnaya mekhanika. – 1995. – Vol. 31. – №8 – P. 74–80. (in Russian).

4. ***Kononov Yu. N.*** Free oscillations of a two-layer fluid with elastic membranes on the «free» and the inner surfaces / Yu. N. Kononov, C. A. Tatarenko // Akustichesky vestnik. – 2003 – Vol. 6, №4. - P. 44–52. (in Russian).

5. ***Kononov Yu. N.*** Free oscillations of elastic membranes and two-layer liquid in a rectangular channel with elastic bottom / Yu. N. Kononov, C. A. Tatarenko // Prikladnaya gidromehanika. – 2008. – №1. – P. 33–38. (in Russian).

6. ***Kononov Yu. N.*** Oscillations of a rectangular membrane separating the ideal fluid of different density in a rectangular channel with rigid bases / Yu. N. Kononov, A. A. *Lymar* // Visnuk Donetskogo natsionalnogo universitetu. Ser. A. Prirodnichi nauki, №1, 2. – 2015 – P. 97–108. (in Russian).

7. ***Kononov Yu. M.*** Stability of oscillation plate that separates the ideal fluid of different density in a rectangular channel [electronic resource] / Yu. M. Kononov, A. A. Lymar // Conference of Young Scientists «Pidstryhachivski reading». – 2016. – Access: http://iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/ Lymar.pdf (in Ukranian).

8. ***Kononov Yu. N.*** Oscillations of the plate separating the ideal liquid of different density in a rectangular channel / Yu. N. Kononov, A. A. Lymar // Mathematical problems of Engineering Mechanics. – 2016: Material of XVI International Conference (18–21 aiprile, 2016, Dniprodzerzhinsk) – P. 14. (in Russian).

[1]Донецкий национальный университет им. В. Стуса, Винница, Украина,

[2]Николаевский национальный аграрный университет, Украина

Поступила в редколлегию 31.10.2016