

УДК 539.3

С. В. Лавренчук

ТИСК ПЛОСКОГО ШТАМПА З СИСТЕМОЮ ВІЙМОК НА ПРУЖНУ ПІВПЛОЩИНУ

Досліджено контактну поведінку скінченного по ширині жорсткого штампа, основа якого ускладнена геометричною неоднорідністю у вигляді макровідхилень, та пружної півплощини. Знаходження розподілів відносних контактних напружень зводиться до розв'язування задачі квадратичного програмування. Розглянуто випадки штампів: із закругленими краями та з сукупністю виїмок, без закруглень на краях, без виїмок. Вивчено вплив геометрії виїмки на розподіл напружень.

Ключові слова: плоска контактна взаємодія, регулярний рельєф, півплощина, альтернативна система рівнянь та нерівностей, коефіцієнт тертя.

Вступ. Текстурування поверхонь є одним із методів підвищення працездатності контактних з'єднань. Воно зводиться до формування на поверхні контактної взаємодії періодично розташованих дискретних (виїмок) або неперервних (канавок) мікрозаглибин. Для цього використовують різні технології: лазерне текстурування, поверхнево-пластичне деформування, хімічне травлення тощо. Мета роботи – дослідити контактну поведінку під час взаємодії штампа з регулярною геометричною неоднорідністю основи та пружної півплощини з урахуванням кулонівського тертя за допомогою розробленої у [7, 9] числово-аналітичної методики.

Аналіз досліджень та публікацій. Існує багато методик, які спрямовані на знаходження розподілів контактних напружень під час взаємодії тіл з регулярно розташованими мікроставпками або з хвилястістю на їхніх поверхнях. Початківцями в цьому напрямку вважаються Н. М. Westergaard [16] та І. Я. Штаєрман [11]. В основі розроблених ними технологій розв'язування таких задач лежить лінійний закон залежності деформування шорсткостей від зовнішнього навантаження, в якому коефіцієнтом пропорційності є контактна податливість поверхневого шару.

Проте експериментальні дослідження виявили [4, 8], що залежність між деформацією мікронерівностей та притискальними навантаженнями описується степеневою функцією. Такі задачі було вперше сформульовано Л. О. Галінім [1] і розглянуто в [3, 10]. У вищезгаданих роботах найчастіше досліджуються різні види геометричної неоднорідності (як правило, це хвилястість або іншого виду періодичні задачі). Але ідеї та методики, запропоновані в них, суттєво впливають на технології розв'язування досліджуваного в даній праці класу контактних задач. Розглянемо всі вищеописані види геометричної неоднорідності та інші (наприклад, періодичні) суміжні з даним класом контактні задачі.

Найбільш широко огляд літературних джерел в даному напрямку наведено в [2, 12]. Вперше аналітичний розв'язок такої плоскої контактної задачі для синусоїдального штампа без урахування тертя було побудовано у [16]. У [2] розповідається про різні узагальнення задачі [16] та аналітичні методи її розв'язування. В [11] вперше розв'язування задачі [16] зведено до розв'язування сингулярного інтегрального рівняння з ядром Гільберта відносно контактних напружень. До багатократного розв'язування таких задач зводяться більш складні задачі теорії пружності.

Слід зазначити, що в основному у вищезгаданих роботах розглядалися випадки контактної взаємодії з неузгодженими поверхнями (ця термінологія була введена К. Джонсоном [5]). Контактна взаємодія поверхонь починається з точок, поширюється в їхньому okolí і розміри цих околів є значно меншими порівняно з кривиною поверхонь в цих точках. Випадок узгодженості поверхонь згідно з [5] означає, що розміри ділянки контакту є близькими до розмірів тіл, що взаємодіють. У цьому випадку навпаки – незначними є розміри ділянок, на яких відсутній контакт. Узгоджена контактна взаємодія є не менш практично значимою, про що свідчать сучасні найвагоміші, на нашу думку, праці у даному напрямку [6, 13 – 15].

Аналітико-числовий алгоритм, історичний огляд його розвитку та апробацію детально описано у [7, 9].

Постановка задачі. Розглянемо контактну взаємодію жорсткого штампа, основа якого задається рівнянням $f(x,y) = 0$, та пружної півплощини в умовах плоскої деформації. Вважатимемо, що відомими є головний вектор P_y та момент всіх сил M , що прикладені до штампа. Пружне тіло та жорсткий індентор до контактної взаємодії зображено на рис. 1.

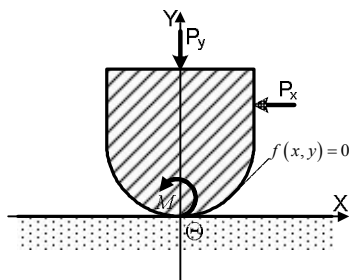


Рис. 1 – Схема взаємодії

При формулюванні крайових умов під штампом будемо виходити із того, що після деформування точки, які знаходяться на межі тіла і перебувають в умовах контакту, задовольняють рівняння основи штампа з урахуванням його зміщення в напрямку координатної осі Oy та повороту на деякий кут. Крім цього вважатимемо, що:

- під штампом, крім нормальних напружень σ , виникають за рахунок тертя ще й дотичні напруження τ , які пов'язані між собою згідно закону Кулона – Амонтона співвідношенням $\tau = \rho \sigma$, де ρ – коефіцієнт тертя;

- межа тіла поза штампом вільна від навантаження.

Тоді умови контакту для цієї постановки матимуть вигляд [7, 9]

$$f(x+u(x,y)+(y+v(x,y))\theta, D_y + y+v(x,y)-(x+u(x,y))\theta) = 0. \quad (1)$$

Після лінеаризації умову (1) можна переписати у вигляді

$$f_1(x)\tilde{u}(x) + f_2(x)\tilde{v}(x) = -\tilde{f}(x) - D_y f_2(x) + \theta f_3(x) + \delta(x), \quad (2)$$

де $\tilde{f}(x) = f(x,0)$, $f_1(x) = f'_x(x,0)$, $f_2(x) = f'_y(x,0)$, $f_3(x) = x \cdot f_2(x,0)$; $\delta = o(\tilde{u}, \tilde{v})$; переміщення $\tilde{u}(x) = u(x,0)$ і $\tilde{v}(x) = v(x,0)$ задаються співвідношеннями [7, 9]

$$\begin{cases} \tilde{u}(x) = \frac{\chi-1}{4G} \int_0^x \sigma(t) dt + \frac{\chi+1}{4\pi G} \rho \int_{\Omega} \sigma(t) \ln|t-x| dt, \\ \tilde{v}(x) = \frac{\chi+1}{4\pi G} \int_{\Omega} \sigma(t) \ln|t-x| dt - \frac{\chi-1}{4G} \rho \int_0^x \sigma(t) dt. \end{cases} \quad (3)$$

Побудова інтегральних рівнянь та зведення їх до альтернативної системи рівнянь та нерівностей. Нехай рівняння штампа задається функцією $f(x,y) = y - f_{um}(x)$. Тоді для співвідношення (2) одержимо

$$\tilde{f}(x) = -f_{um}(x), \quad f_1(x) = -f'_{um}(x), \quad f_2(x) = 1, \quad f_3(x) = x. \quad (4)$$

Підставляючи співвідношення (3) і (4) в умову (2) та нехтуючи величиною δ , отримуємо інтегральне рівняння у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\chi+1}{4\pi G} (1 - \rho f'_{um}(x)) \int \sigma(t) \ln|t-x| dt - \frac{\chi-1}{4G} (\rho + f'_{um}(x)) \int_0^x \sigma(t) dt = \\ = f_{um}(x) - D_y + \theta x. \end{aligned} \quad (5)$$

Припустимо, що після деформування враховуються лише переміщення в напрямку координатної осі Oy , тоді рівняння (5) матиме вигляд

$$\frac{\chi+1}{4\pi G} \int_{\Omega} \sigma(t) \ln|t-x| dt - \frac{\chi-1}{4G} \rho \int_0^x \sigma(t) dt = f_{um}(x) - D_y + \theta x. \quad (6)$$

Для знаходження невідомих D_y і θ , що входять у рівняння (5) або (6), доповнимо ці співвідношення додатковими рівняннями, які випливають з умов рівноваги штампа

$$\int_{\Omega} \sigma(t) dt = P_y, \quad \int_{\Omega} \sigma(t) t dt = M. \quad (7)$$

Рівняння (6) разом із додатковими умовами (7) називаються лінійними класичними умовами контакту для півплощини. Така постановка широко досліджена в літературі. Визначення контактних напружень з класичних умов є досить складною задачею. Це пов'язано з тим, що область контакту наперед невідома і може мати місце контакт на декількох, довільним чином розташованих, ділянках. Тому для побудови альтернативної системи інтегральних рівнянь та нерівностей [7, 9] введемо в розгляд прогнозовану область D , яка покриватиме сукупність ділянок контакту Ω . Поклавши на множині D $\sigma(t) = 0$ при $t \notin \Omega$, одержимо відповідну альтернативну систему інтегральних рівнянь та нерівностей [7, 9] вигляду

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_D \sigma(t) J(x,t) dt + D_y f_2(x) - \theta f_3(x) = F(x), \quad \sigma(x) < 0 \\ \int_D \sigma(t) J(x,t) dt + D_y f_2(x) - \theta f_3(x) \leq F(x), \quad \sigma(x) = 0 \\ \int_D \sigma(t) dt = P_y, \quad \int_D \sigma(t) t dt = M, \end{array} \right. \quad (8)$$

де $J(x,t) = \frac{\chi+1}{4\pi G} \ln|t-x| - \rho \frac{\chi-1}{4G} K(x-t)$, $F(x) = -\tilde{f}(x)$; $K(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

Розв'язування задачі. За допомогою квадратурних формул [7, 9] систему (8) зведемо до її відповідного лінійного аналогу

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{N+2} A_{v,n} \sigma_n = F_v, \quad \sigma_v < 0 \\ \sum_{n=0}^{N+2} A_{v,n} \sigma_n \leq F_v, \quad \sigma_v = 0 \\ \sum_{n=0}^N \lambda_n^1 \sigma_n = P, \quad \sum_{n=0}^N \lambda_n^2 \sigma_n = M, \quad v = \overline{0, N}, \end{array} \right. \quad (9)$$

де $A_{v,n}$, $v, n = \overline{0, N}$, визначаються за квадратурними формулами [7, 9];

$A_{v,N+1} = 1$, $A_{v,N+2} = -(x_v + g_\varepsilon(x_v)) f'_{um}(x_v)$; $F_v = f_{um}(x_v) - g_\varepsilon(x_v)$; $\lambda_n^1 = h$, $\lambda_n^2 = hx_n$.

Як видно з [7, 9] система лінійних рівнянь та нерівностей (9) зводиться до задачі квадратичного програмування з додатньо визначеною цільовою функцією (яка описує потенціальну енергію в процесі контактної взаємодії) у вигляді величини

$$Y = \sum_{v=0}^N C_v \left(\left(\sum_{n=0}^{N+2} A_{v,n} \sigma_n - F_v \right) \sigma_v \right), \quad (10)$$

де C_v , ($v = \overline{0, N}$) – задані додатні сталі, вибір яких дозволяє покращити збіжність алгоритму.

Ця величина досягає свого мінімуму, який дорівнює 0, тоді, коли σ_n задовільняють умові (9). Тому очевидно, що розв'язок такої задачі існує і він єдиний. А умови, при яких величина Y досягає свого мінімуму, можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{N+2} A_{v,n} \sigma_n \leq F_v, & v = \overline{0, N} \\ \sum_{n=0}^N \lambda_n^1 \sigma_n = P \\ \sum_{n=0}^N \lambda_n^2 \sigma_n = M \\ \sigma_n \leq 0, & n = \overline{0, N}, \end{cases} \quad (11)$$

де λ_i^j ($i = \overline{0, n}$, $j = \overline{1, 2}$) – коефіцієнти квадратурних формул [7, 9].

Прийmemo, що основа штампа задається рівнянням [7, 9]

$$f_{um}(x) = R \left(1 - \sqrt[n]{1 - (x/R)^n} \right) \text{ при } |x/R| \leq 1, \quad (12)$$

де R – стала, n – ціле парне число (при $n=2$ одержимо круговий штамп, при $n \rightarrow \infty$ – плоский штамп, при всіх інших значеннях цього параметра одержимо проміжний випадок – майже плоский штамп із закругленими краями).

Якщо змінювати в рівнянні (12) значення параметра n , то можна прослідкувати яким чином на краях області контакту відбувається перехід від обмежених контактних напружень до нескінченних і як цьому сприяє радіус закруглення на краях штампа.

Очевидно, що знаходження контактних напружень (для випадку ігнорування дотичних переміщень) під штампом, основа якого задається рівнянням (12), зводиться до відповідної підстановки в інтегральне рівняння (6), та розв'язання одержаної відповідної задачі квадратичного програмування (10), (11). Якщо дотичні переміщення потрібно врахувати, то необхідно робити підстановку у рівняння (5). Але, як видно з [9], це зайве, оскільки похибка між розв'язками відповідної класичної та уточненої постановки для таких задач становить менше 3%. Тому надалі користуватимемося лише класичною постановкою.

Нехай основа вищеописаного штампа має регулярний рельєф, що утворений деякою сукупністю однакових виїмок. Для опису форми таких штампів використаємо рівняння

$$f_{um}(x) = R \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R} \right)^n} \right) + \sum_{k=1}^3 \tilde{f}_{um}^k(x, x_k^*) \quad \text{при} \quad \left| \frac{x}{R} \right| \leq 1, \quad (13)$$

$$\text{де} \quad \tilde{f}_{um}^k(x, x_k^*) = \begin{cases} \varepsilon \left(1 - \left(\frac{x - x_k^*}{\delta} \right)^2 \right)^{n_0 + 1/2}, & |x - x_k^*| \leq \delta, \\ 0, & |x - x_k^*| > \delta; \end{cases}$$

ε , δ та $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots)$ – відповідно максимальна глибина, півширина та масив центрів виїмок; величина $n_0 = \overline{1,3}$ визначає характер виїмок.

При $\delta/R = 0,2$, $\varepsilon = 0,00005$ та $x^*/R = 0$ праву половину виїмки для вказаних значень величини n_0 зображено на рис. 2.

Розглянемо як поява та зміна кількості і характеру виїмок впливають на розподіл контактних напружень.

Аналіз контактної поведінки. Для проведення числових розрахунків введені наступні безрозмірні величини: координата x , межі a і b прогнозованого інтервалу контакту, що покриває всі ділянки фактичного контакту, півширина виїмок δ , масив центрів виїмок $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots)$ віднесені до так званого радіуса R , а також невідомі нормальні напруження у вузлових точках σ_n , віднесені до подвійного модуля зсуву G . Числові розрахунки проведені для коефіцієнта Пуассона $\nu = 0,25$, максимальної (безрозмірної) глибини виїмок $\varepsilon = 0,00005$ та різних значеннях коефіцієнта тертя ρ відносного головного вектора вертикальних сил $Q_y = P_y / (2GR)$.

Прийmemo $N = 553$, $x^*/R = (x_1^*/R, x_2^*/R, x_3^*/R) = (-0,5; 0; 0,5)$, $\delta/R = 0,2$, $\varepsilon = 0,00005$, $n = 50$, $\chi = 2$, $\rho = 0$, $Q_y = 0,0008$ та при $b = -a = 0,92R$.

Наведеним на рис. 3 розподілам безрозмірних (відносних) контактних напружень (1 – 3) відповідають значення величин $n_0 = \overline{1,3}$. Мінімальними по величині є напруження в центрі виїмок. При збільшенні n_0 збільшується крутизна меж цих виїмок. Також має місце залежність: чим меншою є величина n_0 , тим більшими по величині є напруження на її краях. Крім того видно, що змінюється знак кривини на краях виїмок при зміні значення величини n_0 з 1 на 2.

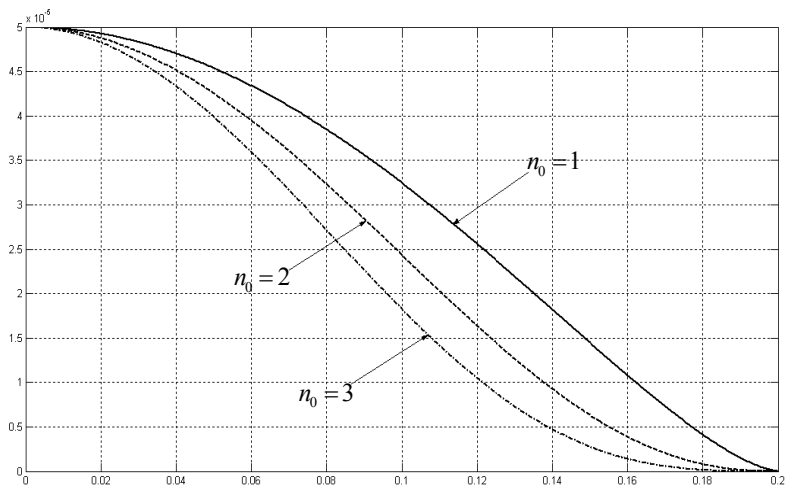


Рис. 2 – Геометричний характер різновиду виїмок

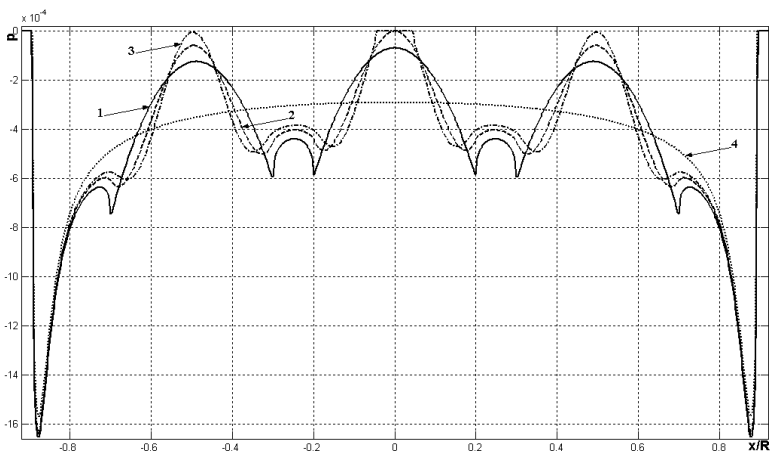


Рис. 3 – Контактні напруження під штапом із заокругленнями на краях та з 3-ма виїмками різного виду

Дослідження контактної поведінки під такими штапами мають більшу практичну цінність, ніж розв'язування періодичних контактних задач [2, 5, 11, 16]. Максимальні по величині біля країв області контакту напруження, які майже не залежать від величини n_0 , суттєво відрізняються від подібних напружень в центральних ділянках контактної взаємодії. Тому проблема розв'язування таких задач аналітичними методами на даний час не є вирішеною.

На рис. 3 кривій 4 відповідає розподіл відносних контактних напружень, знайдених під штапом, на основі якого відсутні виїмки, тобто вона задається рівнянням (12). Аналізуючи рис. 3, можна стверджувати,

що хоч характер виїмок (при різних значеннях n_0) майже не впливає на максимальні по величині напруження біля країв області, їхня відсутність на ці напруження впливає більш суттєво.

Збільшимо кількість виїмок від 3-х до 7-ми для того щоб більш наочноше дослідити процес наростання напружень від центральних ділянок контакту до крайніх.

На рис. 4, а, 5, а та 6, а зображено форми штампів, основа яких описується рівнянням (13), при значеннях величини $n_0 = \overline{1,3}$ відповідно, та пружна основа, в яку втискають штамп. Розрахунки проведені при $N=553$, $x^*/R = (-0,75; -0,5; -0,25; 0; 0,25; 0,5; 0,75)$, $\varepsilon = 0,00005$, $\delta = 0,2$, $n = 50$, $b = -a = 0,92R$, $\chi = 2$, при різних значеннях коефіцієнта тертя ($\rho = 0,1$ відповідає рис. 4, б, 5, б та 6, б, а $\rho = 0,3$ – рис. 4, в, 5, в та 6, в і відносного головного вектора вертикальних сил $Q_y^k = 10^{-4} \cdot (-1+7k)$. На рис. 4, б і 4, в, 5, б і 5, в та 6, б і 6, в суцільним кривим 1–6 відповідають розподіли відносних контактних напружень, знайдені під штампом, основа якого задається рівнянням (13). А штриховим кривим 1'–6' відповідають розподіли відносних контактних напружень, знайдені під штампом, основа якого задається рівнянням (12). Тут розподілам 1, 1' і 4, 4' відповідає відносний головний вектор сили Q_y^1 , розподілам 2, 2' і 5, 5' – Q_y^2 , розподілам 3, 3' і 6, 6' – Q_y^3 .

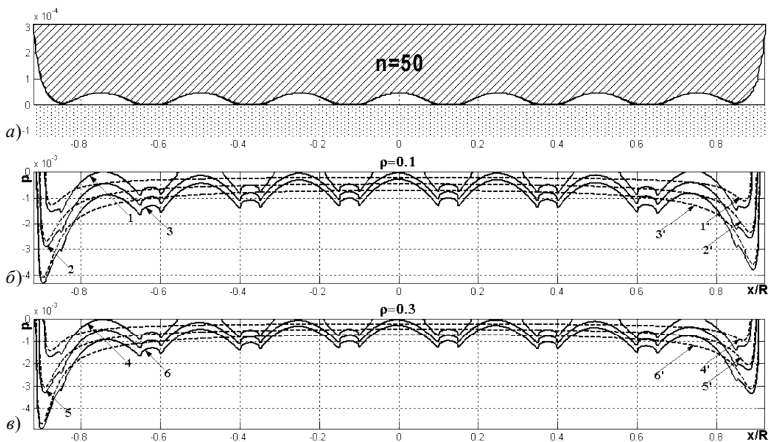


Рис. 4 – Контактні напруження під штампом із заокругленнями на краях та з 7-ма виїмками 1-го виду

На рис. 4 для розподілів відносних контактних напружень 2, 3, 5 і 6 характерною є суцільна область контакту. Для розподілу (1) область контакту складається з 8-ми ділянок контакту, а для розподілу (4) – з 7-ми.

Очевидно, що при невеликому навантаженні різниця між максимальними напруженнями в центральних та крайніх ділянках є незначною. Рівномірне збільшення навантаження призводить до різкого нелінійного відносно навантаження приросту напружень на крайніх ділянках та появи суцільної області контакту. Також з одержаних результатів (розподілів напружень) можна зробити висновок про візуальну близькість відповідних усереднених напружень на окремих ділянках для випадку фрагментів штампа з виїмками та відповідних фрагментів штампа без виїмок (аналогічно, як у [7]). Для аналізу характеру і кількості таких ділянок в залежності від коефіцієнта тертя обчислимо значення величин зазорів між цими ділянками для розподілів 1 і 4 і подамо їх у вигляді табл. 1.

Таблиця 1 – Розміри ділянок без контакту в розподілах (1 і 4) з рис. 4

	1-й зазор	2-й зазор	3-й зазор	4-й зазор	5-й зазор	6-й зазор	7-й зазор
$\rho = 0,1$	$1/75$	$11/100$	$19/150$	$19/150$	$37/300$	$17/150$	$13/300$
$\rho = 0,3$	0	$11/100$	$37/300$	$19/150$	$19/150$	$7/60$	$17/300$

Як видно з табл. 1, величина центрального зазору не залежить від коефіцієнта тертя. Щодо інших величин, то можна зробити припущення, що збільшення коефіцієнта тертя призводить до збільшення асиметрії, аналогічно (з точністю до лінійної регресії), як і для відповідних розподілів відносних контактних напружень $1'$ і $4'$. Якщо прийняти, що величини зазорів та значення для вищевказаних розподілів відносних контактних напружень в їх центрах є значеннями випадкових величин відповідно X та Y , то відповідні коефіцієнти кореляції між цими величинами можна подати у вигляді табл. 2.

Таблиця 2 – Коефіцієнти кореляції між значеннями розмірів ділянок без контакту та контактного напруження у центрі відповідної ділянки

	$\frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$
$\rho = 0,1$	0,8484221
$\rho = 0,3$	0,8468685

Оскільки коефіцієнти кореляції в обох випадках є близькими до 1, то вищесказане припущення є вірним і між величинами X та Y дійсно можна побудувати прямолінійну регресію. Причому можна зробити припущення, що при збільшенні кількості точок розбиття і точності збору даних вибірки для величини Y відповідні коефіцієнти кореляції будуть ближчими до 1.

Для цих же розподілів можна обчислити ліві та праві максимальні за величиною значення відносних контактних напружень, що відповідають внутрішнім ділянкам контакту в розподілах 1 і 4, та прийняти їх за значення випадкової величини Z ; у тих же точках порахувати відносні контактні

напруження для розподілів 1' і 4' і прийняти їх за значення випадкової величини Y . З цих міркувань можна не зупинятися на значенні відносно головного вектора Q_y^1 , тобто можна працювати з розподілами 2, 5, 2', 5' або 3, 6, 3', 6'. У будь-якому випадку, аналогічно до вищеописаних міркувань до рис. 4, очевидно, що відповідні коефіцієнти кореляції також будуть близькими до 1, а це означає, що між величинами Z та Y можна побудувати пряму лінійну регресію.

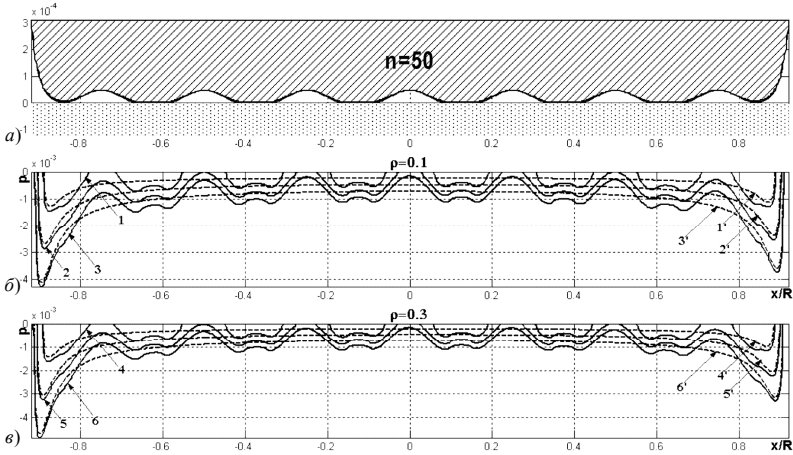


Рис. 5 – Контактні напруження під штапом із заокругленнями на краях та з 7-ма виймками 2-го виду

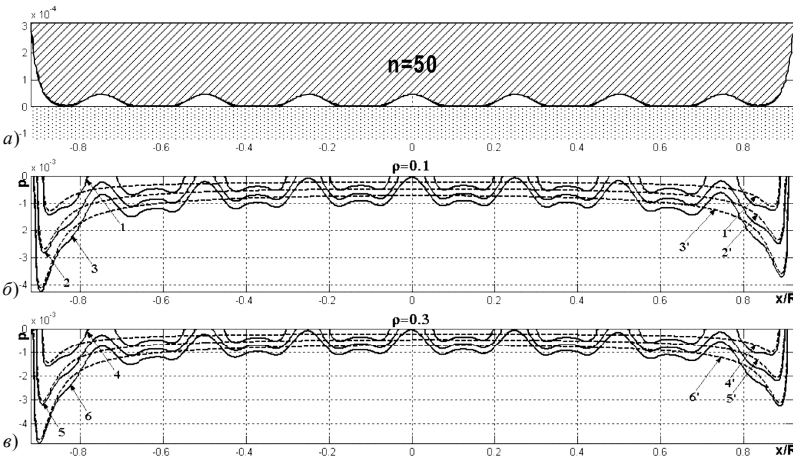


Рис. 6 – Контактні напруження під штапом із заокругленнями на краях та з 7-ма виймками 3-го виду

Зі всього сказаного вище можна стверджувати, що для аналізу характеру утворення ділянок контакту або максимальних за величиною контактних напружень на окремих ділянках, достатньо відповідного розподілу відносних контактних напружень, що утворилися під аналогічним штампом але без виїмок. Крім того, за цим розподілом можна також визначати з великою точністю крайні ліві та праві межі для розподілів під штампом з виїмками.

Аналізуючи рис. 2–6, звернемо увагу на те, що при $n_0 = 1$ та $n_0 = 2, 3$ суттєво різняться характер згладженості одержаних розподілів, тому можна зробити висновок, що при дослідженні напружень під різного роду виїмками актуальним залишається питання пошуку таких параметрів кривизни виїмки, при яких зникають зубці (як в одержаних розподілах при $n_0 = 1$). Очевидно, що для даних форм макровідхилень шукати критичне значення параметра n_0 необхідно з проміжку (1; 2).

Прийmemo, що у рівнянні основи (13) $n \rightarrow \infty$. Тоді при $N = 501$, $b = -a = 0,995R$ та при всіх вищеписаних для рис. 4 характеристиках, одержимо, що розподілам відносних контактних напружень з рис. 4, б і 4, в, 5, б і 5, в та 6, б і 6, в, відповідають розподіли з рис. 7, а і 7, б, 8, б і 8, в та 9, б і 9, в.

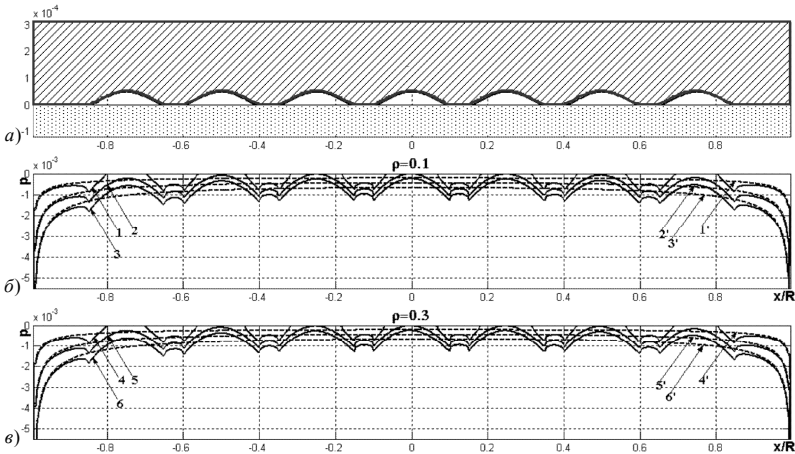


Рис. 7 – Контактні напруження під плоским штампом з 7-ма виїмками 1-го виду

З отриманих розподілів, зображених при $n_0 = \sqrt{1,3}$ та при $n = \infty$ відповідно на рис. 7 – 9 та з вищесказаного, можна зробити висновок, що не залежно від форми закруглення штампа на його крайніх межах, геометричної форми виїмок чи їхньої відсутності, величини навантаження та коефіцієнта кулонівського тертя:

– по-перше, розподіли на крайніх ділянках фактично не змінюються (очевидно, зміни спричинені крайніми виїмками швидко затухають, що не суперечить в деякому розумінні принципу Сен–Венана);

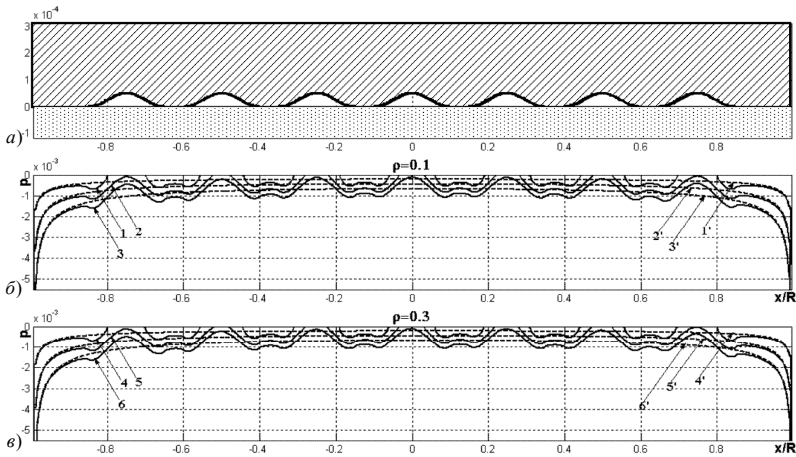


Рис. 8 – Контактні напруження під плоским штапом з 7-ма виїмками 2-го виду

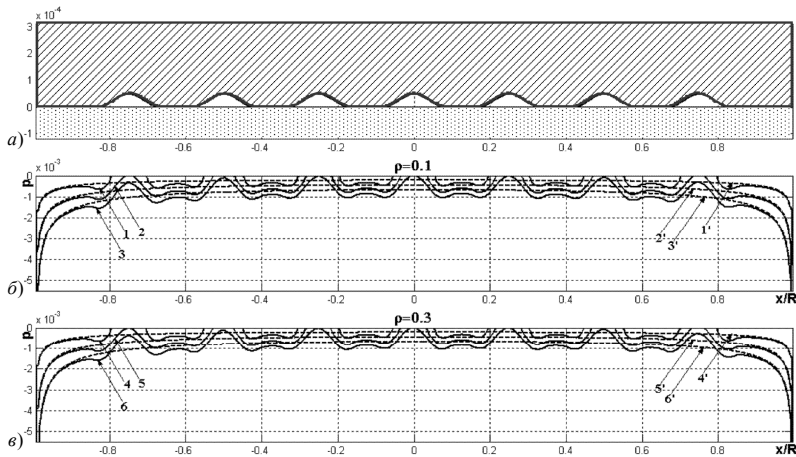


Рис. 9 – Контактні напруження під плоским штапом з 7-ма виїмками 3-го виду

– по-друге (як і в [7]), усереднені напруження на окремих ділянках для відповідних розподілів з виїмками та без виїмок ведуть себе однаково, а це, в свою чергу, дозволяє стверджувати, що для практичних розрахунків числа дискретизація результатів має більшу значимість, ніж аналітичні відповідні розрахунки, тому що шуканий розподіл у вигляді аналітичного (неперервного) запису має на практиці місце лише для ідеально відшліфованих поверхонь контактної взаємодії (а дискретизація або поточковий пошук контактних напружень прирівнюється до пошуку усереднень на відповідних ділянках).

Висновки. Таким чином, розроблений у [7, 9] та розвинутий для неузгоджених поверхонь контакту числово-аналітичний алгоритм дозволяє знаходити розподіли напружень з урахуванням різного роду геометричної неоднорідності як поверхні жорсткого штампа, так і поверхні пружного тіла (наприклад, півплощини). Також встановлено, що незалежно від узгодженості чи неузгодженості поверхонь контактної взаємодії та від інших параметрів (наприклад, головного вектора сили чи кулонівського коефіцієнта тертя), розглянутих в даній праці усереднені значення напружень на окремих ділянках фактично не залежать від того, є на цій ділянці виїмка чи хвилястість [7], чи немає.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Галин Л. А.** Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л. А. Галин. – М.: Наука, 1980. – 303 с.
2. **Горячева И. Г.** Контактное взаимодействие тел с периодическим рельефом при частичном проскальзывании / И. Г. Горячева, Н. И. Маланчук, Р. М. Мартыняк // Прикл. матем. и механика. – 2012. – Т. 76, № 5. – С. 695–709.
3. **Горячева И. Г.** Контактные задачи в трибологии / И. Г. Горячева, М. Н. Добычин. – М.: Машиностроение, 1988. – 256 с.
4. **Демкин Н. Б.** Контактное шероховатых поверхностей / Н. Б. Демкин. – М.: Наука, 1970. – 227 с.
5. **Джонсон К.** Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
6. **Козачок О. П.** Взаимодействие упругих тел с периодическим рельефом при наличии жидкостных мостиков в межконтактных зазорах / О. П. Козачок, Б. С. Слободян, Р. М. Мартыняк // Теорет. и прикл. механика. – 2013. – Вып. 7 (53). – С. 45–52.
7. **Коцюба А. Ю.** Плоскі контактні задачі теорії пружності для тіл складної форми за незаданих ділянок їхньої взаємодії / А. Ю. Коцюба // Прикладні проблеми механіки і математики : зб. наук. праць. – Львів, 2010. – Вип. 8. – С. 7–13.
8. **Крагельский И. В.** Основы расчетов на трение и износ / И. В. Крагельский, М. Н. Добычин, В. С. Комбалов. – М.: Машиностроение, 1977. – 526 с.
9. **Максимович В. М.** Плоскі контактні задачі теорії пружності для тіл складної форми / В. М. Максимович, А. Ю. Коцюба, С. В. Лавренчук. – Луцьк: ЛНТУ, 2012. – 98 с.
10. **Рабинович А. С.** О решении контактных задач для шероховатых тел / А. С. Рабинович // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. – 1979. – № 1. – С. 52–57.
11. **Штаерман И. Я.** Контактная задача теории упругости / И. Я. Штаерман. – М.: Гостехиздат, 1949. – 270 с.
12. **Block J. M.** Periodic contact problems in plane elasticity / J. M. Block, L. M. Keer // J. Mech. Mater. Struct. – 2008. – Vol. 3, № 7. – P. 1207–1237.
13. **Ciavarella M.** The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I – theory / M. Ciavarella // International Journal of Solids and Structures. – 1998. – Vol. 35, № 18. – P. 2349–2362.
14. **Ciavarella M.** The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. II – examples / M. Ciavarella // International Journal of Solids and Structures. – 1998. – Vol. 35, № 18. – P. 2363–2378.
15. **Pauk V. J.** Wybrane zagadnienia kontaktu ciał odkształcalnych / V. J. Pauk. – Politechnika świętokrzyska. – Kielce, 2005. – 164 p.
16. **Westergaard H. M.** Bearing pressures and cracks / H. M. Westergaard // ASME J. Appl. Mech. – 1939. – Vol. 6, № 2. – P. A49–A53.

С. В. Лавренчук

ДАВЛЕНИЕ ПЛОСКОГО ШТАМПА С СИСТЕМОЙ ВЫЕМОК НА УПРУГУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ

Исследовано контактное поведение конечного по ширине жесткого штампа, основа которого осложнена геометрической неоднородностью в виде макроотклонений, и упругой полуплоскости. Определение распределений относительных контактных напряжений сводится к решению задачи квадратичного программирования. Рассмотрены случаи штампов: с закругленными краями и с совокупностью выемок, без закруглений на краях, без выемок. Изучено влияние геометрии выемки на распределение напряжений.

Ключевые слова: плоское контактное взаимодействие, регулярный рельеф, полуплоскость, альтернативная система уравнений и неравенств, коэффициент трения.

S. V. Lavrenchuk

PRESSURE OF A FLAT PUNCH CONTAINING A SYSTEM OF GROOVES ON AN ELASTIC HALF-PLANE

The contact behavior of the finite width rigid punch, which base is complicated by the heterogeneity in the form of the geometric macrodeflections and elastic half-plane is investigated. Finding the distributions of the relative contact pressure is reduced to solving a quadratic programming problem. Cases of punches with rounded edges and with grooves, without rounding at the edges, without grooves are analyzed. The influence of the geometry of the grooves on the distribution is studied.

Keywords: flat contact interaction, regular shape, half-plane, alternative system of equations and inequalities, coefficient of friction.

The texturing of the surfaces is the method of improving efficiency of contact connections and forming the surfaces together with discrete or continuous microholes.

Beginners towards developing the methods of distribution of stresses during contact interaction of bodies with regularly spaced microlugs or undulation on their surfaces are considered H. M. Westergaard [16] and the I. J. Shtayerman [11]. These methods for cases of different geometrical inhomogeneity are studied in the works [1, 3, 4, 8, 10]. The most extensive reviews of the literature in this area are in the works [2, 12]. Particular attention should be paid to work [11], because it was the first solving [16], that was reduced to solving of singular integral equation with kernel Hilbert's regarding contact stresses. K. Johnson [5] introduced the concept of contact interaction withinconsistent surfaces. This kind of interaction is seen in the above-mentioned works. Agreed contact interaction is almost equally significant too [6, 13 – 15]. Setting such problems, numerical and analytical algorithm for the solving, its historical overview of the development and the testing are detailed in the [7, 9].

Let the basis of the stamp has a regular relief, formed by some set of identical slots. For description of forms of such stamps we use an equation

$$f_{um}(x) = R \left(1 - \sqrt[1 - \left(\frac{x}{R} \right)^n] \right) + \sum_{k=1}^3 \tilde{f}_{um}^k(x, x_k^*) \text{ with } \left| \frac{x}{R} \right| \leq 1,$$

where

$$\tilde{f}_{um}^k(x, x_k^*) = \begin{cases} \varepsilon \left(1 - \left(\frac{x - x_k^*}{\delta} \right)^2 \right)^{n_0 + 1/2}, & |x - x_k^*| \leq \delta \\ 0, & |x - x_k^*| > \delta, \end{cases}$$

ε , δ and $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots)$ – accordingly the maximum depth, half-width and

complex of centers of slots; value $n_0 = \overline{1,3}$ determines the geometric character of slots.

The contact behaviours under the rounded at the edges of the punches with 3 – 7 periodically distributed grooves of different geometric nature was investigated. The different values of the main vectors of force and friction coefficient are taken into consideration. In cases of 7 slots the rounding at the edges is lifted. And for each tasks separately we considered appropriate setting without slots.

Thus, the numerical and analytical algorithm [7, 9] and the developed to inconsistent contact surfaces algorithm [7] allow you to find the stress distribution, taking into account the different kinds of geometric heterogeneity both a hard surface of the punch and the surface of the elastic body. Also it was founded that regardless of consistency or inconsistency of the contact surfaces and the interaction of other parameters considered in this paper that the average amount of tension in some areas does not actually depend on what is available on this site a groove or an undulation [7].

REFERENCES

1. **Galin L. A.** Contact problems of the theory of elasticity and viscoelasticity / L. A. Galin. – Moscow: Nauka, 1980. – 303 p. (in Russian).
2. **Goryacheva I. G.** Contact interaction of bodies with a periodic relief in case of partial slip / I. G. Goryacheva, N. I. Malanchuk, R. M. Martynyak // Applied Mathematics and Mechanics. – 2012. – Vol. 76, No 5. – P. 695–709. (in Russian).
3. **Goryacheva I. G.** Contact problems in tribology / I. G. Goryacheva, M. N. Dobychin. – Moscow: Mashinostroenie, 1988. – 256 p. (in Russian).
4. **Dyomkin N. B.** The contacting of rough surfaces / N. B. Dyomkin. – Moscow: Nauka, 1970. – 227 p. (in Russian).
5. **Johnson K.** Contact mechanics / K. Johnson. – Moscow: Mir, 1989. – 510 p. (in Russian).
6. **Kozachok O. P.** Interaction of elastic bodies with a periodic relief in the presence of liquid bridges in the contact gaps / O. P. Kozachok, B. S. Slobodyan, R. M. Martynyak // Theoretical and Applied Mechanics. – 2013. – Vol. 7 (53). – P. 45–52. (in Russian).

7. **Kotsyuba A. Y.** Flat contact problems of theory of elasticity for bodies with complex shape unset sections of their interaction / A. Y. Kotsyuba // Applied Mathematics and Mechanics : Collection of scientific works. – Lviv, 2010. – Vol. 8. – P. 7–13. (in Ukrainian).
8. **Kragelsky I. V.** Principles of calculations for friction and wear / I. V. Kragelsky, M. N. Dobychin, V. S. Kombalov. – Moscow: Mashinostroenie, 1977. – 526 p. (in Russian).
9. **Maksimovich V. M.** Flat contact problems of theory of elasticity for bodies with a complex form / V. M. Maksimovich, A. Y. Kotsyuba, S. V. Lavrenchuk. – Luck: LNTU, 2012. – 98 p. (in Ukrainian).
10. **Rabinovich A. S.** About the solution of contact problems for rough bodies / A. S. Rabinovich // The news of the USSR. Mechanics of Solids. – 1979. – No 1. – P. 52–57. (in Russian).
11. **Shtaerman I. Y.** Contact problem for theory of elasticity / I. Y. Shtaerman. – Moscow: Gostehyzdat, 1949. – 270 p. (in Russian).
12. **Block J. M.** Periodic contact problems in plane elasticity / J. M. Block, L. M. Keer // J. Mech. Mater. Struct. – 2008. – Vol. 3, No 7. – P. 1207–1237.
13. **Ciavarella M.** The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I – theory / M. Ciavarella // International Journal of Solids and Structures. – 1998. – Vol. 35, No 18. – P. 2349–2362.
14. **Ciavarella M.** The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. II – examples / M. Ciavarella // International Journal of Solids and Structures. – 1998. – Vol. 35, No 18. – P. 2363–2378.
15. **Pauk V. J.** Wybrane zagadnienia kontaktu ciał odkształcalnych / V. J. Pauk. – Politechnika świętokrzyska. – Kielce, 2005. – 164 p.
16. **Westergaard H. M.** Bearing pressures and cracks / H. M. Westergaard // ASME J. Appl. Mech. – 1939. – Vol. 6, No 2. – P. A49–A53.

Луцький національний,
технічний університет
Луцьк, Україна

Надійшла до редколегії 05.10.2016