

УДК 539.312

*В. І. Пожуєв, д-р фіз.-мат. наук,
А. В. Пожуєв, канд. фіз.-мат. наук, А. В. Фасоляк*

ДИНАМІКА ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ З ЦИЛІНДРИЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ, ПІДКРІПЛЕНОЮ ОБОЛОНКОЮ, ПРИ ПОВЕРХНЕВИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

Розглядається тривимірний пружний інерційний півпростір з циліндричною порожниною, підкріпленою оболонкою, причому вісь оболонки паралельна до поверхні півпростору. Вивчається випадок, коли до площини, що обмежує півпростір, прикладається імпульсне нормальне навантаження, яке залежить від часу як одинична функція Хевісайда. Задача розв'язана чисельно, в безрозмірних величинах, за допомогою метода скінченних елементів. Диференціальне матричне рівняння розв'язане θ -методом Вільсона. Встановлено збіжність переміщень та напружень до відповідного статичного розв'язку, що проілюстровано графічно. Проведено аналіз впливу глибини залягання оболонки від поверхні півпростору на динамічний напружено-деформований стан розглянутої системи.

Ключові слова: циліндрична оболонка, пружний півпростір, поверхня півпростору, динамічне навантаження, метод скінченних елементів.

Вступ. На сьогодні важливе значення для практики мають динамічні задачі для оболонок неглибокого залягання у пружному інерційному півпросторі. Подібним задачам для рухомих навантажень, які прикладені до внутрішньої поверхні оболонки присвячена робота [1]. В [8] розглянута подібна задача в нестационарній постановці.

Також важливе значення мають задачі, коли динамічне навантаження прикладене не до внутрішньої поверхні оболонки, а до поверхні півпростору. В [5] розглянута подібна задача у стаціонарній постановці, але при умові, що порожнина не підкріплена оболонкою.

Дана робота присвячена динамічним задачам для пружного півпростору, який має циліндричну порожнину підкріплену оболонкою, яка має невелику глибину залягання від навантаженої поверхні півпростору у нестационарній постановці. Також досліджується питання впливу глибини залягання на динамічний напружено-деформований стан системи оболонка-півпростір.

Постановка задачі. Розглядається динаміка пружного півпростору з циліндричною порожниною, підкріпленою пружною тонкою оболонкою, причому вісь оболонки паралельна границі півпростору, під дією наван-

тажень, що діють на поверхню півпростору та залежать від часу, як одинична функція Хевісайда. Нехай оболонка та півпростір віднесені до нерухомої декартової системи координат $\{x, y, z\}$. Внутрішня поверхня оболонки задається рівнянням $x^2 + y^2 = b^2$, а поверхня контакту між півпростором та оболонкою – $x^2 + y^2 = a^2$ ($h = a - b$ – товщина оболонки). Контакт між оболонкою та півпростором вважаємо жорстким. Площина, що обмежує півпростір задається рівнянням $y = l$ ($l > a$). В момент часу $t < 0$ оболонка та простір знаходяться в стані спокою та вільні від напружень. Потім в момент часу $t = 0$ прикладається імпульсивне навантаження, яке діє по нормалі до поверхні півпростору.

Слід зазначити, що в даній роботі приймається, що навантаження, яке діє на поверхню півпростору рівномірно розподілене за віссю Oz , тобто не залежить від змінної z , тому початкова задача зводиться до плоскої задачі теорії пружності.

Оскільки для оболонки і півпростору використовуються точні рівняння, тоді потрібно знайти такі вектор-функції $u^{(k)}(x, y, t) = (u_x^{(k)}(x, y, t), u_y^{(k)}(x, y, t))$, що задовольняють динамічному рівнянню теорії пружності, яке у векторній формі має вигляд [6]

$$(\lambda_k + 2\mu_k) \text{grad div} \left(\bar{u}^{(k)} \right) - \mu_k \text{rot rot} \left(\bar{u}^{(k)} \right) = \rho_k \frac{\partial^2 \bar{u}^{(k)}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

де λ_k, μ_k – параметри Ламе; ρ_k – щільність (тут значення індексу $k = 1$ відповідає оболонці, а $k = 2$ – півпростору, що оточує оболонку).

Тоді граничні умови мають вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(1)}(x, y, t) \Big|_{\omega_1} &= \sigma_{yy}^{(1)}(x, y, t) \Big|_{\omega_1} = \sigma_{xy}^{(1)}(x, y, t) \Big|_{\omega_1} = 0; \\ \sigma_{xx}^{(1)}(x, y, t) \Big|_{\omega_2} &= \sigma_{xx}^{(2)}(x, y, t) \Big|_{\omega_2}, \sigma_{yy}^{(1)}(x, y, t) \Big|_{\omega_2} = \sigma_{yy}^{(2)}(x, y, t) \Big|_{\omega_2}; \\ \sigma_{xy}^{(1)}(x, y, t) \Big|_{\omega_2} &= \sigma_{xy}^{(2)}(x, y, t) \Big|_{\omega_2}; \\ u_x^{(1)}(x, y, t) \Big|_{\omega_2} &= u_x^{(2)}(x, y, t) \Big|_{\omega_2}, u_y^{(1)}(x, y, t) \Big|_{\omega_2} = u_y^{(2)}(x, y, t) \Big|_{\omega_2}; \\ \sigma_{yy}^{(2)}(x, l, t) &= -f(x, t), \sigma_{xx}^{(2)}(x, l, t) = \sigma_{xy}^{(2)}(x, l, t) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут ω_1 – внутрішня поверхня оболонки; ω_2 – границя контакту між оболонкою та півпростором; $f(x, y, t)$ – навантаження, яке діє по нормалі до поверхні півпростору.

При цьому необхідні для задоволення граничним умовам напруження виражаються через переміщення згідно формул:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(k)} &= \frac{2G_k(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} \frac{\partial u_x^{(k)}}{\partial x} + \frac{2G_k\nu_k}{1-2\nu_k} \frac{\partial u_y^{(k)}}{\partial y}; \\ \sigma_{yy}^{(k)} &= \frac{2G_k(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} \frac{\partial u_y^{(k)}}{\partial y} + \frac{2G_k\nu_k}{1-2\nu_k} \frac{\partial u_x^{(k)}}{\partial x}; \\ \sigma_{xy}^{(k)} &= G_k \left(\frac{\partial u_x^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(k)}}{\partial x} \right),\end{aligned}\quad (3)$$

де ν_k – коефіцієнти Пуассона; G_k – модулі зсуву матеріалу.

Початкові умови приймаються нульовими, тобто всі шукані величини та їх перші похідні за змінною часу при $t=0$ дорівнюють нулю.

Перейдемо тепер до безрозмірних величин:

$$\begin{aligned}\{U_x^{(k)}, U_y^{(k)}\} &= \frac{1}{a} \{u_x^{(k)}, u_y^{(k)}\}; \quad \{\sigma_{xx}^{(k)}, \sigma_{yy}^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}\} = \frac{1}{G_2} \{\sigma_{xx}^{(k)}, \sigma_{yy}^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}\}; \quad F = \frac{f}{G_2}; \\ \{x_*, y_*\} &= \frac{1}{a} \{x, y\}; \quad \tau = \frac{c_s}{a} t; \quad \kappa = \frac{h}{a}; \quad \gamma = \frac{G_1}{G_2}; \quad \rho^* = \frac{\rho_1}{\rho_2}; \quad d_1 = 1 - \kappa; \quad c_s = \frac{\sqrt{G_2}}{\sqrt{\rho_2}}; \quad L = \frac{l}{a}.\end{aligned}\quad (4)$$

Тоді співвідношення (3) приймуть вигляд:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{x_*x_*}^{(1)} &= \frac{2\gamma(1-\nu_1)}{1-2\nu_1} \frac{\partial U_{x_*}^{(1)}}{\partial x_*} + \frac{2\gamma\nu_1}{1-2\nu_1} \frac{\partial U_{y_*}^{(1)}}{\partial y_*}; \\ \bar{\sigma}_{x_*x_*}^{(2)} &= \frac{2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \frac{\partial U_{x_*}^{(2)}}{\partial x_*} + \frac{2\nu_2}{1-2\nu_2} \frac{\partial U_{y_*}^{(2)}}{\partial y_*}; \\ \bar{\sigma}_{y_*y_*}^{(1)} &= \frac{2\gamma(1-\nu_1)}{1-2\nu_1} \frac{\partial U_{y_*}^{(1)}}{\partial y_*} + \frac{2\gamma\nu_1}{1-2\nu_1} \frac{\partial U_{x_*}^{(1)}}{\partial x_*}; \\ \bar{\sigma}_{y_*y_*}^{(2)} &= \frac{2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \frac{\partial U_{y_*}^{(2)}}{\partial y_*} + \frac{2\nu_2}{1-2\nu_2} \frac{\partial U_{x_*}^{(2)}}{\partial x_*}; \\ \bar{\sigma}_{x_*y_*}^{(1)} &= \gamma \left(\frac{\partial U_{x_*}^{(1)}}{\partial y_*} + \frac{\partial U_{y_*}^{(1)}}{\partial x_*} \right); \quad \bar{\sigma}_{x_*y_*}^{(2)} = \left(\frac{\partial U_{x_*}^{(2)}}{\partial y_*} + \frac{\partial U_{y_*}^{(2)}}{\partial x_*} \right).\end{aligned}\quad (5)$$

При цьому граничні умови (2) переписуться так:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{x_*x_*}^{(1)}(x_*, y_*, \tau) \Big|_{\omega_1} &= \bar{\sigma}_{y_*y_*}^{(1)}(x_*, y_*, \tau) \Big|_{\omega_1} = \bar{\sigma}_{x_*y_*}^{(1)}(x_*, y_*, t) \Big|_{\omega_1} = 0; \\
\bar{\sigma}_{x_*x_*}^{(1)}(x_*, y_*, \tau) \Big|_{\omega_2} &= \bar{\sigma}_{x_*x_*}^{(2)}(x_*, y_*, \tau) \Big|_{\omega_2}; \\
\bar{\sigma}_{y_*y_*}^{(1)}(x_*, y_*, \tau) \Big|_{\omega_2} &= \bar{\sigma}_{y_*y_*}^{(2)}(x_*, y_*, \tau) \Big|_{\omega_2}; \\
\bar{\sigma}_{x_*y_*}^{(1)}(x_*, y_*, \tau) \Big|_{\omega_2} &= \bar{\sigma}_{x_*y_*}^{(2)}(x_*, y_*, \tau) \Big|_{\omega_2}; \\
U_{x_*}^{(1)}(x_*, y_*, \tau) \Big|_{\omega_2} &= U_{x_*}^{(2)}(x_*, y_*, \tau) \Big|_{\omega_2}; \\
U_{y_*}^{(1)}(x_*, y_*, \tau) \Big|_{\omega_2} &= U_{y_*}^{(2)}(x_*, y_*, \tau) \Big|_{\omega_2}; \\
\bar{\sigma}_{y_*y_*}^{(2)}(x_*, L, \tau) &= -F(x_*, \tau), \bar{\sigma}_{x_*x_*}^{(2)}(x_*, L, \tau) = \bar{\sigma}_{x_*y_*}^{(2)}(x_*, L, \tau) = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Тут ω_1 – безрозмірна внутрішня поверхня оболонки ($x_*^2 + y_*^2 = d_1^2$), ω_2 – безрозмірна границя контакту між оболонкою та півпростором ($x_*^2 + y_*^2 = 1$).

Варіаційна постановка задачі. Перейдемо тепер до варіаційної постановки задачі. Нехай $\delta U^{(k)} = \left(\delta U_{x_*}^{(k)}, \delta U_{y_*}^{(k)} \right)$ – додаткові можливі безрозмірні переміщення точок тіла Ω . Тоді $\delta \varepsilon^{(k)} = \left(\delta \varepsilon_{x_*x_*}^{(k)}, \delta \varepsilon_{y_*y_*}^{(k)}, \delta \varepsilon_{x_*y_*}^{(k)} \right)$ – можливі безрозмірні деформації, які відповідають можливим переміщенням $\delta U^k = \left(\delta U_{x_*}^{(k)}, \delta U_{y_*}^{(k)} \right)$, та задаються наступними співвідношеннями:

$$\delta \varepsilon_{x_*x_*}^{(k)} = \frac{\partial \left(\delta U_{x_*}^{(k)} \right)}{\partial x_*}; \quad \delta \varepsilon_{y_*y_*}^{(k)} = \frac{\partial \left(\delta U_{y_*}^{(k)} \right)}{\partial y_*}; \quad \delta \varepsilon_{x_*y_*}^{(k)} = \frac{\partial \left(\delta U_{x_*}^{(k)} \right)}{\partial y_*} + \frac{\partial \left(\delta U_{y_*}^{(k)} \right)}{\partial x_*}.$$

Нехай тіло знаходиться у рівновазі під дією поверхневих сил F та внутрішніх сил R . Причому поверхневі сили діють на поверхні ϖ (в даному випадку $\varpi = \varpi_1 \cup \left\{ (x_*, y_*) \in R^2 \mid y_* = L \right\}$), що обмежує тіло Ω , а внутрішні всередині області Ω . Розглянемо тепер варіаційне рівняння Лагранжа [7]:

$$\delta \bar{V}^{(k)} = 0, \quad (7)$$

де $\bar{V}^{(k)} = \bar{U}^{(k)} + \Pi^{(k)}$ – повна безрозмірна потенціальна енергія оболонки та півпростору, що оточує оболонку. Перетворимо вираз (7) наступним чином:

$$\delta \bar{V}^{(k)} = \delta \left(\bar{U}^{(k)} + \Pi^{(k)} \right) = \delta \bar{U}^{(k)} + \delta \Pi^{(k)},$$

де

$$\delta \bar{U}^{(k)} = \iint_{\Omega} \left(\bar{\sigma}_{x^*x^*} \delta \varepsilon_{x^*x^*} + \bar{\sigma}_{y^*y^*} \delta \varepsilon_{y^*y^*} + \bar{\sigma}_{x^*y^*} \delta \varepsilon_{x^*y^*} \right) d\Omega; \quad (8)$$

$$\delta \Pi^{(k)} = - \iint_{\omega} \left(\delta U^{(k)} \right)^T F d\omega - \iint_{\Omega} \left(\delta U^{(k)} \right)^T R d\Omega. \quad (9)$$

Вираз (8) є варіацією безрозмірної енергії деформації, а (9) – варіація безрозмірної роботи зовнішніх сил. Тоді, згідно до варіаційного принципу Лагранжа [7] потрібно знайти такі значення переміщень $\delta U^{(k)}$, для яких повна енергія системи мінімальна, тобто такі переміщення, які задовольняють варіаційному рівнянню Лагранжа (7).

Розв'язання задачі методом скінченних елементів. Для розв'язання поставленої задачі методом скінченних елементів (МСЕ) проводимо дискретизацію області, в якій розташоване тіло, шляхом розбиття на трикутники, причому оболонка та півпростір розбиваються окремими трикутниками. Також будемо припускати, що на відстані 10 радіусів від границі контакту оболонки та півпростору переміщення дорівнюють нулю. Далі, на основі отриманої триангуляції тіла, будуємо безрозмірну матрицю жорсткості, безрозмірну матрицю мас та вектор статичних і динамічних еквівалентних вузлових навантажень на основі схеми, наведеної в [8]. Оскільки матриця жорсткості є симетричною та додатньо визначеною [4], тоді для розв'язання СЛАР, отриманої для статичної задачі, використовуємо метод спряжених градієнтів [2], алгоритм якого наведено, зокрема в [8].

Для розв'язку диференційного матричного рівняння [4], яке виникає при розв'язанні динамічних задач теорії пружності, застосовується θ -метод Вільсона [3]. Цей метод є ітераційним методом за змінною часу та дозволяє звести розв'язування нестационарної задачі до розв'язування ітераційної послідовності квазістатичних задач [8]. Для розв'язування СЛАР, які виникають в ітераційному процесі, застосовуємо метод спряжених градієнтів [2].

Результати числового аналізу. Розглянемо випадок, коли у момент часу $\tau = 0$ прикладається імпульсне навантаження $F(x_*, y_*, \tau) = F(x_*, y_*)H(\tau)$, яке діє по нормалі до поверхні півпростору на ділянці $x_* \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $y_* = L$, та залежить від часу як одинична функція Хевісайда. Оскільки навантаження діє симетрично відносно осі Oy_* , тому можна зробити розріз області Ω по цій осі, та врахувати цей розріз за допомогою умови $\delta U_{x_*} \Big|_{x_*=0} = 0$.

Розрахунки, зокрема формування матриць жорсткості та мас, було проведено для таких значень безрозмірних величин:

$$\kappa = 0,02; \gamma = 30; \rho^* = 4; d_1 = 1 - \kappa = 0,98.$$

Величини x_*, y_*, τ, L – змінювались.

Рис. 1,а ілюструє деформацію границі контакту оболонки та півпростору, при глибині залягання оболонки $L = 2$, причому крива 3 – $\tau = 0,5$, крива 2 – $\tau = 1$, крива 1 – $\tau = 5$, пунктиром позначено статичний розв'язок, а точками – початкове положення границі контакту. На рис. 1,б наведені аналогічні графіки для глибини залягання оболонки $L = 6$.

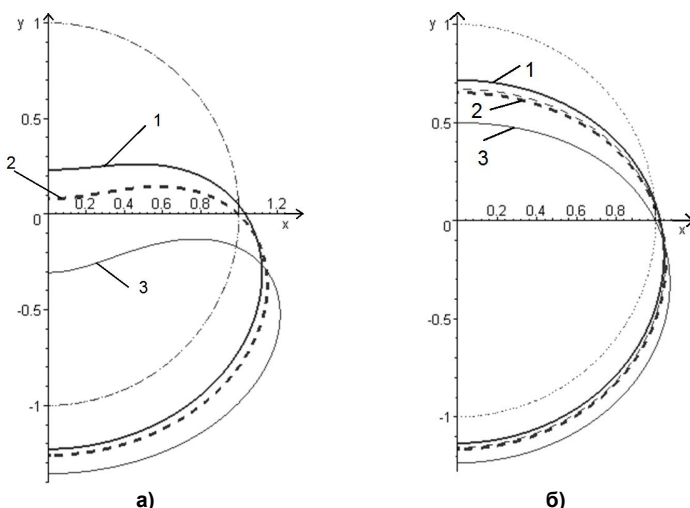


Рис. 1 – Деформація границі контакту оболонки та півпростору в різні моменти часу, для навантаження, що залежить від часу як одинична функція Хевісайда: а) оболонка на глибині $L = 2$; б) оболонка на глибині $L = 6$

На рис 2,а проілюстровано переміщення поверхні півпростору у моменти часу, аналогічні до рис. 1 для глибини залягання оболонки $L = 2$.

На рис. 2,б наведено аналогічні результати для глибини залягання оболонки $L = 6$.

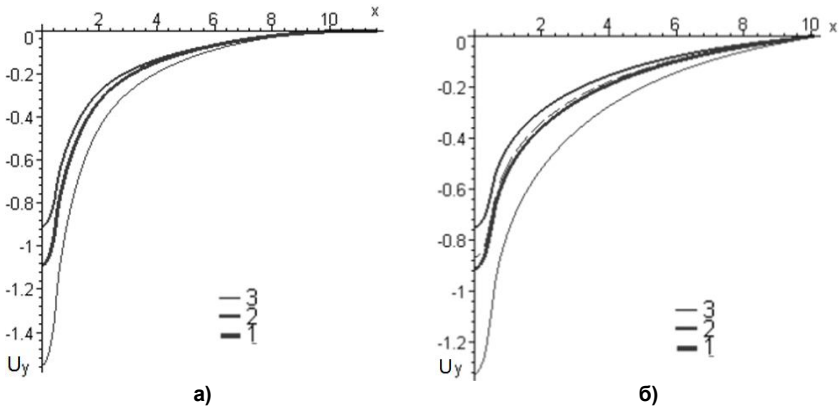


Рис. 2 – Переміщення поверхні півпростору в різні моменти часу, для навантаження, що залежить від часу як одинична функція Хевісайда: а) оболонка на глибині $L = 2$; б) оболонка на глибині $L = 6$

На рис. 3 проілюстровано напруження, що виникають на границі контакту між оболонкою та півпростором у моменти часу, аналогічні рис. 1 у порівнянні зі статичним розв'язком, причому глибина залягання оболонки $L = 2$.

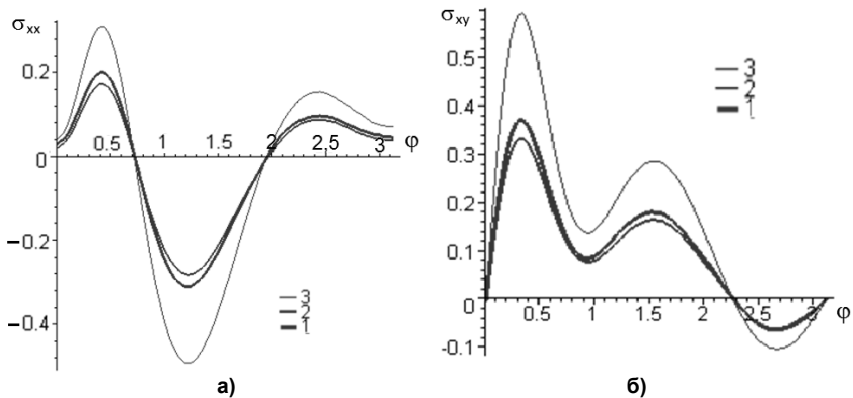


Рис. 3 – Розподіл напружень оболонки на гранці контакту з півпростором за кутовою координатою в різні моменти часу, для навантаження, що залежить від часу, як одинична функція Хевісайда: а) $\sigma_{x^*x^*}$; б) $\sigma_{x^*y^*}$

На рис. 4 проілюстровано розподіл переміщень U_{y^*} півпростору по осі Oy^* від границі контакту оболонки і півпростору до поверхні півпрос-

тору в моменти часу, як і на рис. 1. Зокрема, на рис. 4,а $L = 4$, а на рис. 4,б – $L = 6$.

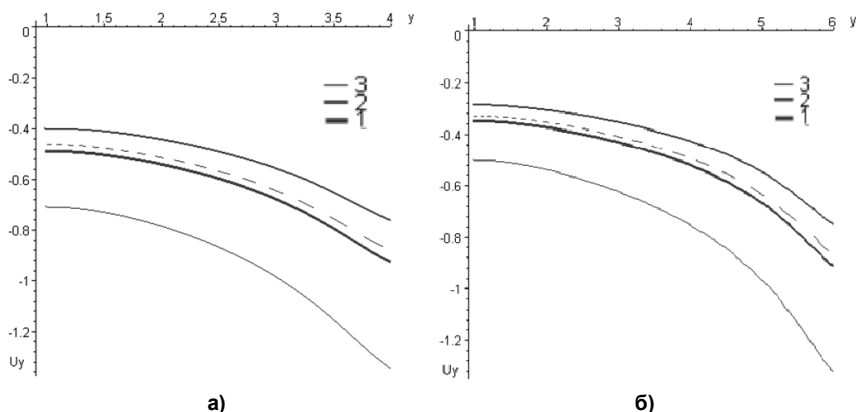


Рис. 4 – Розподіл переміщень U_{y*} півпростору по осі Oy_* в різні моменти часу, для навантаження, що залежить від часу, як одинична функція Хевісайда: а) оболонка на глибині $L = 4$; б) оболонка на глибині $L = 6$

Висновки. Отримано розв'язок нестационарної задачі для пружного інерційного півпростору з циліндричною порожниною, яка підкріплена оболонкою. Для аналізу динамічного напружено-деформованого стану даної системи застосовано метод скінченних елементів. Для навантаження, яке залежить від часу як одинична функція Хевісайда отримано збіжність переміщень та напружень півпростору на навантаженій поверхні до відповідного статичного розв'язку. Аналогічна збіжність переміщень і напружень прослідковується і на границі контакту оболонки та півпростору. Проаналізовано залежність величини переміщень вільної поверхні від глибини залягання оболонки. Встановлено, що на глибині залягання оболонки понад 6 радіусів вплив напружено-деформованого стану оболонки на переміщення вільної поверхні є відносно незначним. Отримані результати можуть використовуватись при динамічному розрахунку підземних споруд, зокрема тунелів метро та підземних трубопроводів.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Алексеева Л. А.** Математическое моделирование динамики тоннелей и трубопроводов мелкого заложения / Л. А. Алексеева, В. Н. Украинец // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. – 2011 – № 4-5. – С. 1954-1956.
2. **Баладин М. Ю.** Методы решения СЛАУ большой размерности / М. Ю. Баладин, С. П. Шурина – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000 – 70 с.
3. **Бате К.** Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Е. Вильсон – М.: Стройиздат, 1982 – 448 с.
4. **Зинкевич О.** Метод конечных элементов в технике / О. Зинкевич – М.: Мир, 1975 – 543 с.

5. **Никитин И. С.** Задача о подвижной нагрузке на границе упругого полупространства с цилиндрической полостью / И. С. Никитин // Изв. А.Н. СССР. Механика твердого тела, 1984. – №3. – С. 93-99.

6. **Новацкий В.** Теория упругости / В. Новацкий – М.: Мир, 1975. – 872 с.

7. **Образцов И. Ф.** Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов / И. Ф. Образцов, Л. М. Савельев, Х. С. Хазанов – М.: Высшая школа, 1985. – 393 с.

8. **Пожуев В. І.** Нестационарна деформація циліндричної оболонки у пружному півпросторі з вільною поверхнею / В. І. Пожуєв, А. В. Пожуєв, А. В. Фасоляк // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні, 2016. – №1. – С. 119-126.

УДК 539.312

В. И. Пожуев, д-р физ.-мат. наук,

А. В. Пожуев, канд. физ.-мат. наук, А. В. Фасоляк

ДИНАМИКА УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ОБОЛОЧКОЙ, ПРИ ПОВЕРХНОСТНЫХ НАГРУЗКАХ

Рассматривается трехмерное упругое инерциальное полупространство с цилиндрической полостью, подкреплённой оболочкой, причём ось оболочки параллельна поверхности полупространства. Изучается случай, когда к плоскости, которая ограничивает полупространство, прикладывается импульсная нормальная нагрузка, которая зависит от времени как единичная функция Хевисайда. Задача решена численно, в безразмерных величинах, при помощи метода конечных элементов. Дифференциальное матричное уравнение решено θ -методом Вильсона. Установлена сходимость перемещений и напряжений к соответствующему статическому решению, что проиллюстрировано графически. Проведен анализ влияния глубины заложения оболочки от поверхности полупространства на динамическое напряженно-деформированное состояние рассмотренной системы.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, упругое полупространство, поверхность полупространства, динамическая нагрузка, метод конечных элементов.

UDC 539.312

V. I. Pozhuev, Dr. Sci. (Phys.-Math.),

A. V. Pozhuev, PhD (Phys.-Math.), A. V. Fasoliak

DYNAMIC OF THE ELASTIC HALF-SPACE WITH CYLINDRICAL CAVITY, SUPPORTED BY THE SHELL, UNDER SURFACE LOADS

Three-dimensional elastic inertial half-space with a cylindrical cavity, supported by the shell, at that the shell axis is parallel to the surface of the half-space is considered. Case of normal load, which depends on time as unit Heaviside function is applied to a plane which limits the half-space, is studied. The problem is solved numerically in dimensionless quantities, using the finite element method. Differential matrix equation is solved by Wilson θ -method. Convergence of displacements and stresses to the appropriate static solution has been established, which was shown graphically. Influence of the depth of the shell from the surface of the half-space on the dynamic stress-strain state of the considered system is analyzed.

Keywords: cylindrical shell, elastic half-space, surface of the half-space, dynamic loads, finite element method.

Today very important problem is the definition of the dynamic stress-strain state of the elastic half-space with a cylindrical cavity, supported by an elastic shell, located at a shallow depth from the surface of the half-space. In [5] solved such problem for the moving loads with cavity without shell.

In this paper the dynamic of elastic half-space with cylindrical cavity, supported by elastic shell, under surface normal loads, is studied. Influence of the depth of the shell from the surface of the half-space on the dynamic stress-strain state of the considered system is also studied.

Dynamic of the elastic half-space with cylindrical cavity, supported by the thin elastic shell is considered. It is assumed, that half-space is limited by the plane and the shell axis is parallel to this plane. Suppose that the system is attributed to the Cartesian coordinate system $\{x, y, z\}$. Then, inner surface of the shell is described by equation $x^2 + y^2 = b^2$, $x^2 + y^2 = a^2$ – contact boundary between shell and half-space ($h = a - b$ – thickness of the shell). Plane, which is limited the half-space is described by $y = l (l > a)$.

Case, when to the plane, which limits the half-space the impulsive normal load is applied is studied. The load depends on time as unit Heaviside function. It is also assumed, that the load evenly distributed on axis Oz , so we have plane problem of the elastic theory. It is assumed, that contact between shell and half-space is rigid.

Then we passed to dimensionless coordinate system $\{x_*, y_*\} = \frac{1}{a}\{x, y\}$,

$\tau = \frac{\sqrt{G_2}}{\sqrt{\rho_2} a} t$ – dimensionless time variable, where G_2 , ρ_2 – shear modulus and density of the half-space. Other corresponding dimensionless quantities defined by equations:

$$\left\{ U_x^{(k)}, U_y^{(k)} \right\} = \frac{1}{a} \left\{ u_x^{(k)}, u_y^{(k)} \right\}; \quad \left\{ \overset{-}{\sigma}_{xx}^{(k)}, \overset{-}{\sigma}_{yy}^{(k)}, \overset{-}{\sigma}_{xy}^{(k)} \right\} = \frac{1}{G_2} \left\{ \sigma_{xx}^{(k)}, \sigma_{yy}^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)} \right\};$$

$$F = \frac{f}{G_2}; \quad \kappa = \frac{h}{a}; \quad \gamma = \frac{G_1}{G_2}; \quad \rho^* = \frac{\rho_1}{\rho_2}; \quad d_1 = 1 - \kappa; \quad L = \frac{l}{a},$$

where $U_x^{(k)}, U_y^{(k)}$ – dimensionless field of displacement, $\overset{-}{\sigma}_{xx}^{(k)}, \overset{-}{\sigma}_{yy}^{(k)}, \overset{-}{\sigma}_{xy}^{(k)}$ – dimensionless stresses ($k=1$ corresponds to shell, $k=2$ – half-space), $F = F(x_*, y_*, \tau)$ – dimensionless normal load.

Using Lagrange's variation principle we solved previously described problem numerically by finite element method (FEM). Scheme of FEM for

static problem is described in [8]. For dynamic problem we use Wilson θ -method [8]. This method reduces differential matrix equation to iterative sequence of quasi-static problems. All systems of linear algebraic equations are solved by numerical method of conjugated gradients [2].

Calculations were carried out for the next values of dimensionless quantities:

$$\kappa = 0,02; \gamma = 30; \rho^* = 4; d_1 = 1 - \kappa = 0,98.$$

Results for the different values of dimensionless depth of the shell from the surface of the half-space were illustrated graphically and coincided.

Convergence of displacements and stresses to the appropriate static solution has been established, which was shown graphically. Influence of the depth of the shell from the surface of the half-space on the dynamic stress-strain state of the considered system is analyzed. It was determined that if the shell was situated on the depth more than five its radiuses, the influence of the shell on the stress-strain state of half-space was relatively small under surface loads.

REFERENCES

1. **Alekseeva L. A.** Mathematical modeling of dynamic of the shallow tunnels and pipelines / L. A. Alekseeva, V. N. Ukrainits // Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod. – 2011. – No 4-5. – P. 1954–1956. (in Russian).
2. **Baladin M. U.** Methods solutions SLAE large dimension / M. U. Baladin, E. P. Shurina – Novosibirsk: Publishing House of NSTU, 2000. – 70 p. (in Russian).
3. **Bate K.** Numerical methods of analysis and finite element method / K. Bate, E. Wilsonю – Moskow: Stroyizdat, 1982 – 448 p. (in Russian).
4. **Zienkiewicz O.** The finite element method in engineering science / O. Zienkiewicz – Moskow: Mir, 1975 – 543 p. (in Russian).
5. **Nikitin I. S.** The problem of the moving load on the boundary of an elastic half-space with cylindrical cavity / I. S. Nikitin // Proceedings of the S. A. of the USSR. Mechanics of solids. – 1984. – No3. – P. 93–99. (in Russian).
6. **Novatskiy V.** Elastic Theory / V. Novatskiy – Moskow: Mir, 1975. – 872 p. (in Russian).
7. **Obraztsov I. F.** Finite element method in problems of building mechanics of the aircrafts / I. F. Obraztsov, L. M. Savelyev, H. S. Yazanov. – Moskow: High school, 1985. – 393 p. (in Russian).
8. **Pozuev V. I.** Non-stationary not axisymmetrical deformation of a cylindrical shell in an elastic space under the action of moving surface loads / V. I. Pozhuev, A. V. Fasoliak // Innovative materials and technologies in metallurgy and mechanical engineering. – 2016. – No1. – P. 119–126. (in Ukrainian).

*Запорізький національний
технічний університет,
Запоріжжя, Україна*

Надійшла до редколегії 14.12.2016