

УДК 539.3

Д. В. Акимов¹, В. З. Грищак¹, д-р техн. наук,
И. Ф. Ларионов¹, канд. техн. наук, С. И. Гоменюк¹, д-р техн. наук,
Д. В. Клименко², канд. техн. наук, С. В. Чопоров¹, канд. техн. наук,
С. Н. Гребенюк¹, д-р техн. наук

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ АНАЛИЗА ПРОЧНОСТИ СИЛОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКОЙ ТЕХНИКИ

Обсуждаются специализированные численные подходы к расчету оболочечных конструкций ракетно-космической техники, находящихся под действием внутреннего давления. Предложены методики прочностных расчетов с учетом пластических деформаций материала. Определены напряженно-деформированное состояние конструкций, работающих в упругопластической области, и краевые эффекты в зонах переходов. На основе анализа результатов исследования предложена методика определения зон разрушения исследуемой оболочечной конструкции с визуализацией исследуемого процесса.

Ключевые слова: математическое обеспечение, силовые элементы, баки, напряженно-деформированное состояние, визуализация процесса.

Введение. Силовые элементы ракетно-космической техники (РКТ) представляют собой оболочечные конструкции, находящиеся под действием распределенных нагрузок. При геометрическом моделировании баков, находящихся под действием внутреннего давления, в данной работе конструкции представлены оболочками с постоянной толщиной с дальнейшим усовершенствованием геометрической модели с кусочно-постоянной толщиной, либо в виде оболочек, подкрепленных шпангоутами.

В [12, 14, 15] при построении аналитических моделей использованы упрощающие предположения (например, о малости деформаций и несжимаемости материала, о пределах текучести и т. п.). Аналитические модели, как правило, разрабатывались для определенных классов конструкций (например, оболочек вращения), которые могут быть использованы в качестве оценочных для создания эффективных численных методов исследования.

При рациональном проектировании силовых конструкций РКТ, таких как топливные баки, баллоны высокого давления и других, целью является увеличение полезного объема конструкции и уменьшение ее материалоемкости без потери прочностных характеристик. Для повышения прочности таких конструкций используются различные конструктивные решения: подкрепления торцовыми и промежуточными шпангоутами, использование переменной толщины оболочки и др.

При определении напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций в условиях комбинированного силового и температурного нагружения возникает ряд проблем математического характера. Отсутствие единой теории по описанию вышеуказанных процессов приводит к необходимости создания приближенных методов исследования. Наиболее общие теории деформирования сплошной среды [2, 8, 9] могут быть использованы при решении задач, если в них сформулировать основные соотношения, описывающие механические свойства материала, и законы, связывающие между собой компоненты тензоров деформаций и напряжений в дифференциальной, интегральной или интегро-дифференциальной форме. Моделирование процессов нелинейного деформирования твердых тел осуществляется на основе либо дифференциальных зависимостей, либо на основе инкрементальной теории (основные соотношения описываются в приращениях). На основе интегрирования полученных соотношений с использованием аппроксимаций функционала для описания напряженного состояния [8, 10] исследуется деформированное состояние в физически нелинейной постановке.

Решение подавляющего большинства нелинейных задач аналитическими методами представляется в исключительных случаях, поэтому широко применяемыми методами решения таких задач являются численные методы. Среди них выделяют основанный на вариационных принципах метод конечных элементов и его модификации.

На практике весьма распространены конечно-элементные (МКЭ) исследования НДС оболочечных конструкций в упругопластической постановке. Здесь следует отметить публикации [3 – 7, 13]. В частности, выполнены работы по локализации пластических деформаций на площадках течения. При помощи конечно-элементного анализа исследовано упругопластическое НДС отсеков ракетных конструкций с вырезами. Оценен ресурс конструкций РКТ при учете влияния концентраторов напряжений в виде отверстий. Исследовано взаимное влияние вырезов на прочность оболочечных конструкций при пластическом деформировании.

В развитие [1] в данной работе предложены модели НДС оболочек, находящихся под действием внутреннего давления, как совокупности плоских элементов. Разработан алгоритм визуализации полей деформаций и напряжений по поверхности конструкции. Исследованы крайние эффекты в зонах расположения распорных шпангоутов.

Моделирование тонких и средних оболочек как совокупностей плоских элементов. Дву- и трехмерные изопараметрические конечные элементы (КЭ) считаются весьма эффективными в анализе НДС сплошных тел. Эти элементы можно непосредственно применять при расчете оболочечных конструкций, уменьшая их размер в направлении толщины оболочки. Тем не менее, в общем трехмерном случае при применении таких КЭ возникают определенные трудности. Во-первых, наличие трех степеней свободы в каждом узле приводит к большим коэффициентам жесткости для перемещений по толщине оболочки, что может быть причиной плохой обусловленности матрицы системы уравнений, если тол-

щина оболочки мала по сравнению с остальными размерами КЭ. Во-вторых, использование нескольких узлов по толщине оболочки является неэкономичным. Это объясняет известный факт, что практически даже в случае толстых оболочек нормали к срединным поверхностям могут считаться прямыми [20].

Возможным способом решения этих вопросов является разработка модели НДС оболочечной конструкции, в которой оболочка представляется как совокупность плоских элементов. При этом предполагается, что поведение непрерывной криволинейной поверхности достаточно точно характеризуется поведением поверхности, составленной из малых плоских элементов. Из физических соображений следует, что с уменьшением размеров элемента решение должно сходиться и, как показывает опыт, такая сходимость действительно наблюдается [20].

На первом этапе исследования принимаются следующие гипотезы:

- оболочка обладает постоянной толщиной;
- перемещения и деформации малы;
- перпендикулярные линии к срединной поверхности (нормали) до деформации остаются прямыми после деформации (но не обязательно перпендикулярными);
- нормали не меняют своих размеров после деформации.

Рассматривается плоский элемент оболочки, находящийся одновременно под действием мембранных (плоское напряженное состояние) и изгибающих сил (рис. 1). Локальная система координат выбирается таким образом, чтобы плоскость xOy совпадала с плоскостью элемента, ось Oz была параллельна нормали, начало координат совмещается с первым узлом.

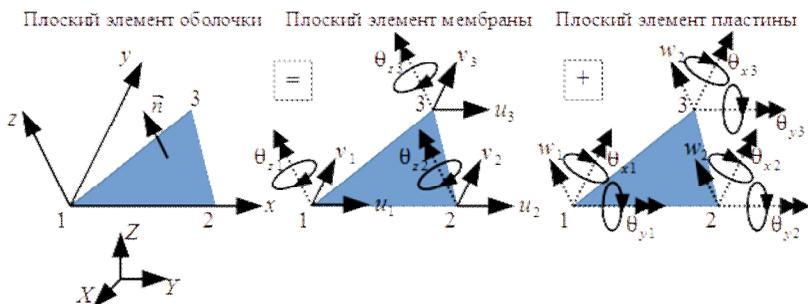


Рис.1 – Степени свободы элемента оболочки

Деформированное состояние под действием мембранных сил однозначно описывается перемещениями u_i и v_i (в плоскости xOy) для каждого i -го узла элемента. Аналогично изгиб вызовет деформированное состояние, которое определяется в каждом узле прогибом w_i и двумя углами поворота θ_x и θ_y .

При этом необходимо учесть два обстоятельства. Во-первых, перемещения, вызванные мембранными силами, и изгибные деформации считаются независимыми друг от друга. Во-вторых, угол поворота θ_z , который в локальной системе координат не входит в число параметров, определяющих НДС, введен как фиктивный поворот нормали вокруг своей оси для обеспечения ансамбля элементов.

Предполагается, что изгибные деформации подчинены положениям теории Рейсснера – Миндлина [17, 19] (теория сдвиговых деформаций второго порядка для тонких и средних пластин и оболочек). Тогда поле предполагаемых перемещений определится как

$$\begin{cases} u(x,y,z) = u(x,y) + z\theta_x(x,y); \\ v(x,y,z) = v(x,y) + z\theta_y(x,y); \\ w(x,y,z) = w(x,y). \end{cases}$$

В результате вектор обобщенных перемещений приобретает вид:

$$\{\mathbf{d}^e\}^T = \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{z1} \quad \dots \quad u_{n_e} \quad v_{n_e} \quad w_{n_e} \quad \theta_{x_{n_e}} \quad \theta_{y_{n_e}} \quad \theta_{z_{n_e}}\},$$

где n_e – количество узлов в элементе ($n_e = 3$ для треугольника и $n_e = 4$ для четырехугольника).

Вектор плоских деформаций определяется дифференцированием функций перемещений:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \{\boldsymbol{\varepsilon}_m\} + z\{\boldsymbol{\varepsilon}_b\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(m)} \\ \varepsilon_y^{(m)} \\ \gamma_{xy}^{(m)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(b)} \\ \varepsilon_y^{(b)} \\ \gamma_{xy}^{(b)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x \\ v_y \\ u_y + v_x \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

где $\{\boldsymbol{\varepsilon}_m\}$ – вектор мембранных деформаций; $\{\boldsymbol{\varepsilon}_b\}$ – вектор изгибных

деформаций; а также введены обозначения $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, $v_x = \frac{\partial v}{\partial x}$,

$$v_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \theta_{x,x} = \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \quad \theta_{x,y} = \frac{\partial \theta_x}{\partial y}, \quad \theta_{y,x} = \frac{\partial \theta_y}{\partial x}, \quad \theta_{y,y} = \frac{\partial \theta_y}{\partial y}.$$

Соответственно вектор сдвиговых деформаций представляется в виде

$$\{\boldsymbol{\gamma}\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_x + \theta_x \\ w_y + \theta_y \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

где введены обозначения: $w_x = \frac{\partial w}{\partial x}$, $w_y = \frac{\partial w}{\partial y}$.

Соотношения между напряжениями и деформациями для изотропного материала могут быть представлены как

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}; \quad (3)$$

$$\{\boldsymbol{\tau}\} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = [\mathbf{G}]\{\boldsymbol{\gamma}\} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

где E – модуль Юнга; μ – коэффициент Пуассона; $G = E/(2(1+\mu))$ – модуль сдвига.

Энергия деформации элементарного объема V_e оболочки, находящегося под действием внешних сил, представляется соотношением

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{V_e} \{\boldsymbol{\sigma}\}^T \{\boldsymbol{\varepsilon}\} dV_e + \frac{\kappa}{2} \int_{V_e} \{\boldsymbol{\tau}\}^T \{\boldsymbol{\gamma}\} dV - \mathbf{A}, \quad (5)$$

где $\kappa = 5/6$ – множитель коррекции энергии сдвига; \mathbf{A} – работа внешних сил [16].

Обобщенные перемещения аппроксимируются при помощи интерполяции в узлах элемента в системе координат элемента (ζ, η) :

$$u = \sum_{i=0}^{n_e} N_i(\zeta, \eta) u_i; \quad v = \sum_{i=0}^{n_e} N_i(\zeta, \eta) v_i; \quad w = \sum_{i=0}^{n_e} N_i(\zeta, \eta) w_i; \quad \theta_x = \sum_{i=0}^{n_e} N_i(\zeta, \eta) \theta_{xi};$$

$$\theta_y = \sum_{i=0}^{n_e} N_i(\zeta, \eta) \theta_{yi}, \quad (6)$$

где $N_i(\zeta, \eta)$ – функция формы i -го узла конечного элемента.

В результате подстановки (1)-(4) и (6) в функционал энергии (5) после минимизации и интегрирования по толщине оболочки (в пределах от $-h/2$ до $h/2$) определяются матрицы жесткости элемента в локальной системе координат

$$[\mathbf{K}_e^{\text{local}}] = h \int_{S_e} [\mathbf{B}_m]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_m] dS_e + \frac{h^3}{12} \int_{S_e} [\mathbf{B}_b]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_b] dS_e + \kappa h \int_{S_e} [\mathbf{B}_c]^T [\mathbf{G}] [\mathbf{B}_c] dS_e, \quad (7)$$

где $[\mathbf{B}_m]$, $[\mathbf{B}_b]$ и $[\mathbf{B}_c]$ – матрицы связей между обобщенными перемещениями и, соответственно, мембранными, изгибными и сдвиговыми

деформациями; S_e – площадь срединной поверхности элементарного объема оболочки.

Матрицы связей между перемещениями и деформациями для вектора обобщенных перемещений в формуле (7) примут вид

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{B}_m] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_{n_e}}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_{n_e}}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_{n_e}}{\partial y} & \frac{\partial N_{n_e}}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\
 [\mathbf{B}_b] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_{n_e}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_{n_e}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_{n_e}}{\partial y} & \frac{\partial N_{n_e}}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}; \\
 [\mathbf{B}_c] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & N_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_{n_e}}{\partial x} & N_{n_e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_{n_e}}{\partial y} & 0 & N_{n_e} & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

После интегрирования (7) по площади элемента оболочки получим локальную матрицу жесткости (матрицу $6n_e \times 6n_e$) в местной системе координат. Для получения локальной матрицы жесткости в глобальной системе координат необходимо выполнить преобразование

$$[\mathbf{K}_e^{\text{global}}] = [\mathbf{R}]^T [\mathbf{K}_e^{\text{local}}] [\mathbf{R}],$$

где

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{R}] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{T}] & \mathbf{0}_{6 \times 6} & \dots & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{0}_{6 \times 6} & [\mathbf{T}] & \dots & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 6} & \dots & [\mathbf{T}] \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 0 & 0 & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

В формуле (8) под c_{ij} обозначены направляющие косинусы преобразования глобальной системы координат XYZ в локальную xyz .

Выше было замечено, что угол поворота θ_z в локальной системе координат не входит в число параметров, определяющих НДС. Это может приводить к сингулярности глобальной матрицы жесткости, когда оболочка близка к конструкции с малой кривизной [20]. Простейший метод устранения такой сингулярности – добавление малой фиктивной жесткости в позиции матрицы $[\mathbf{K}_e^{\text{local}}]$, соответствующие θ_z . Например, можно в таких позициях установить значение, равное $10^{-3} \max[\mathbf{K}_e^{\text{local}}]$.

Для вектора-столбца узловых нагрузок, если оболочка находится под действием распределенной по поверхности нагрузки $\bar{\mathbf{q}}$, записывается соотношение

$$[\mathbf{F}_e^{\text{local}}] = \int_{S_e} \{\mathbf{N}\} \bar{\mathbf{q}} dS_e, \quad (9)$$

где $\{\mathbf{N}\}^T = \{N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_{n_e}\}$ – вектор-столбец функций формы.

На основе приведенных соотношений выполняется численный расчет оболочечных конструкций РКТ с заданными геометрическими и механическими характеристиками в линейной постановке.

Алгоритм визуализации распределения полей деформаций и напряжений по поверхности конструкции. Результатом конечно-элементного анализа конструкции являются массивы числовой информации (например, перемещения, деформации и напряжения в узлах КЭ).

Наиболее часто числовые массивы визуализируют двумерными или трехмерными графиками, картинками линий уровня или векторными полями. Числовые величины, распределенные по некоторой дву- или трехмерной области, представляются полутоновыми или цветными картинками, в которых каждый цвет соответствует определенному диапазону значений. Как правило, видимая часть дискретной модели геометрического объекта, исследуемого МКЭ, является совокупностью плоских непересекающихся фигур простой формы (чаще всего треугольников или четырехугольников) – граней. Таким образом, задача визуализации конечно-элементной модели и соответствующей искомой величине картины распределений по этой модели сводится к построению закрасенных по определенному правилу видимых граней.

Математический аппарат, предназначенный для проецирования трехмерных геометрических фигур на экран и удаления невидимых линий, весьма эффективно реализован средствами таких графических библиотек, как OpenGL [18]. Учитывая, что наиболее распространенные формы граней могут быть легко представлены треугольниками (например, четырехугольные грани при визуализации можно автоматически менять на две треугольные при помощи разбиения вдоль одной из диагоналей), достаточно рассмотреть способ визуализации треугольных граней.

Возможным решением построения картины распределения значений искомой функции по треугольнику, является следующий подход. Пусть искомая функция u представлена числовым массивом, значения которого располагаются в интервале $[u_{min}; u_{max}]$ и задано n -ое количество используемых для визуализации цветов, тогда диапазоном значений закрашиваемых цветом i , будет интервал $[u_i; u_{i+1}]$, где $u_i = u_{min} + ih$, $h = (u_{max} - u_{min}) / (n - 1)$. Следовательно, номер цвета, соответствующий некоторому значению $u \in [u_{min}; u_{max}]$, определим при помощи функции $color(u) = \lfloor (u - u_{min}) / h \rfloor$, где $\lfloor x \rfloor$ – целая часть числа x .

Пусть треугольник задан узлами A , B и C , которым соответствуют узловые значения u_A , u_B и u_C , тогда воспользуемся следующей рекурсивной схемой. Если $color(u_A) = color(u_B)$ и $color(u_A) = color(u_C)$, то рисуется на экране треугольник $(A; B; C)$ цветом равным $color(u_A)$. Иначе последовательно применяется эта процедура к треугольникам:

- 1) $\left(A; \frac{A+B}{2}; \frac{A+C}{2} \right)$ с узловыми значениями u_A , $\frac{u_A + u_B}{2}$ и $\frac{u_A + u_C}{2}$;
- 2) $\left(B; \frac{B+C}{2}; \frac{A+B}{2} \right)$ с узловыми значениями u_B , $\frac{u_B + u_C}{2}$ и $\frac{u_A + u_B}{2}$;
- 3) $\left(C; \frac{A+C}{2}; \frac{B+C}{2} \right)$ с узловыми значениями u_C , $\frac{u_A + u_C}{2}$ и $\frac{u_B + u_C}{2}$;
- 4) $\left(\frac{A+B}{2}; \frac{B+C}{2}; \frac{A+C}{2} \right)$ с узловыми значениями $\frac{u_A + u_B}{2}$, $\frac{u_B + u_C}{2}$ и $\frac{u_A + u_C}{2}$.

В качестве дополнительной точки остановки добавляется ограничение на максимальную глубину рекурсии. Примеры визуализации распределения значений в треугольнике с использованием различных цветовых схем показаны на рис. 2.

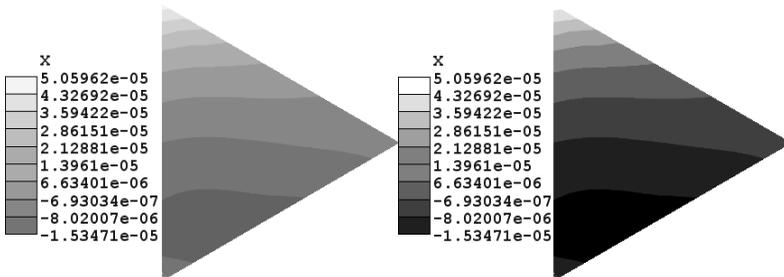


Рис. 2 – Примеры визуализации картины распределения значений на треугольнике

Усовершенствованная модель тонких и средних по толщине оболочек как совокупностей плоских элементов. Конечно-элементная модель, представленная формулами (7) – (9), выведена с предположением, что оболочка конструкции обладает постоянной толщиной. Однако во многих практических задачах толщина оболочки конструкции может варьироваться с точки зрения рационального проектирования. На данном этапе исследования принимается, что толщина оболочки конструкции является кусочно-постоянной функцией координат

$$h = h(x, y, z)$$

и соотношение (7) примет вид

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_e^{\text{local}}] = & h(x, y, z) \int_{S_e} [\mathbf{B}_m]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_m] dS_e + \frac{h^3(x, y, z)}{12} \int_{S_e} [\mathbf{B}_b]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_b] dS_e + \\ & + \kappa h(x, y, z) \int_{S_e} [\mathbf{B}_c]^T [\mathbf{G}] [\mathbf{B}_c] dS_e. \end{aligned} \quad (10)$$

Исследование НДС гладкого бака под действием внутреннего давления. Оболочка бака представляется совокупностью треугольных элементов, образующих срединные поверхности конструктивных элементов (рис. 3).

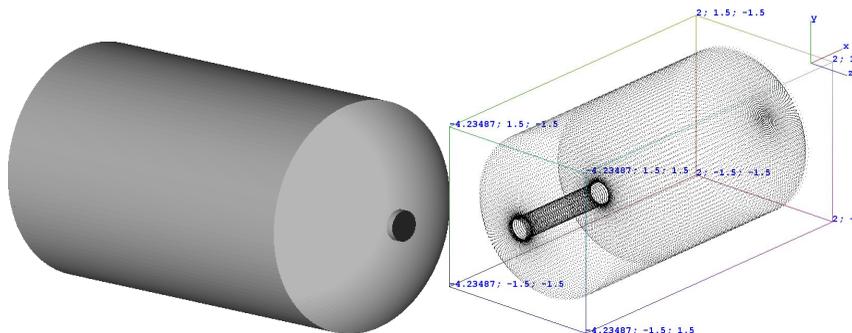


Рис. 3 – Гладкий бак РКТ

При анализе гладкого бака (рис. 3) можно принять

$$h(x, y, z) = \begin{cases} h_0, & (x, y, z) \notin \Omega, \\ 2h_0, & (x, y, z) \in \Omega, \end{cases}$$

где Ω – окрестность стыка днищ с корпусом бака (рис. 4).

Задача линейной теории упругости в перемещениях обычно сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{F}\}, \quad (11)$$

где $[K]$ – глобальная матрица жесткости; $\{d\}$ – вектор-столбец узловых перемещений; $\{F\}$ – вектор-столбец узловых нагрузок, обусловленных внешними силами, температурными деформациями и т. д.



Рис. 4 – Зоны изменения толщины оболочки гладкого бака (светлые полосы – зоны двойной толщины)

В то же время при выводе основных соотношений МКЭ для решения задач линейной теории упругости предполагают существование линейной связи между деформациями и перемещениями, то есть используется линейный закон в виде

$$\{\sigma\} = [D]({\epsilon} - \{\epsilon_0\}) + \{\sigma_0\}, \quad (12)$$

где $\{\sigma\}$ – матрица напряжений; $\{\epsilon\}$ – вектор деформаций; $\{\sigma_0\}$ – начальные напряжения; $\{\epsilon_0\}$ – начальные деформации; $[D]$ – матрица связей между напряжениями и деформациями.

Для моделирования поведения конструкций из материалов, уже при малых деформациях, отличающихся от закона Гука, зависимость (12) заменяется соотношением вида

$$F(\{\sigma\}, \{\epsilon\}) = 0. \quad (13)$$

В тех случаях, когда для полных деформаций соотношения вида (12) и (13) не удастся установить, применяется итерационный метод для каждого приращения нагрузки.

Метод переменной жесткости используется в случае, когда связь между напряжениями и деформациями, характеризующая поведение материала, может быть представлена в форме (12), где матрица упругости зависит от достигнутого уровня деформаций, т. е. имеет вид

$$[D] = D(\{\epsilon\}) = D(\{d\}).$$

Так как матрица упругости влияет на окончательный вид матрицы жесткости, то (11) примет вид уравнения

$$K(\{d\})\{d\} - \{F\} = 0, \quad (14)$$

которое можно решить при помощи итерационного метода.

Простейший итерационный процесс решения (14) состоит из следующих действий:

1. Полагается $\{\mathbf{d}_0\} = \{0\}$. Вычисляется матрица упругости $[\mathbf{D}_0] = D(\mathbf{d}_0)$ и строится матрица жесткости $[\mathbf{K}_0] = \mathbf{K}(\{0\})$.

2. До достижения предела прочности: $\{\mathbf{d}_i\} = [\mathbf{K}_{i-1}]^{-1} \{\mathbf{F}\}$, $[\mathbf{D}_i] = D(\{\mathbf{d}_i\})$, $[\mathbf{K}_i] = \mathbf{K}(\{\mathbf{d}_i\})$.

При исследовании на прочность этот процесс применяется для малого приращения нагрузки. При этом используется стандартная процедура построения глобальной матрицы жесткости на каждом шаге итерационного процесса.

Для численного исследования прочности оболочечной конструкции гладкого бака принимается зависимость между напряжениями и деформациями для алюминиевого сплава, представленная в табл. 1, и матрица упругости, соответствующая нулевой итерации, строится при $E = 130 : 0,002 = 65000 \text{ МПа}$ (коэффициент Пуассона принимается независимым от деформаций и равным 0,3). Далее, для каждого КЭ определяется матрица упругости $[\mathbf{D}]$, исходя из деформаций в узлах этого элемента, вычисленных на предыдущем шаге.

Таблица 1 – Зависимость между напряжениями и деформациями материала

σ , МПа	0	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	270	309	330
ε , %	0	0,2	0,24	0,3	0,4	0,55	0,79	1,3	1,5	2,48	3,2	3,61	5,0	10	15

Описанный выше итерационный процесс при исследовании прочности гладкого бака под внутренним давлением (рис. 3) (считается, что труба зашпандорена на конце) позволил получить разрушающее давление равное 0,42 МПа (для сравнения, линейная теория дает значение 0,35 МПа), (рис. 5). В свою очередь, нелинейный расчет гладкого бака без распорного шпангоута показал разрушающее давление равным 0,23 МПа (рис. 6).

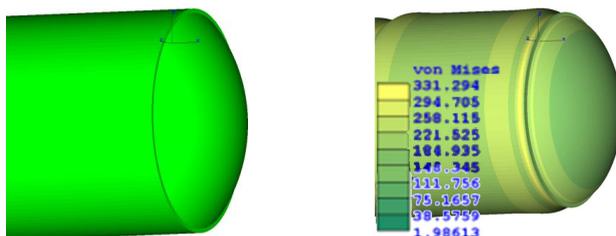


Рис. 5 – Исходное состояние и НДС оболочки гладкого бака под действием внутреннего давления (метод переменной жесткости)

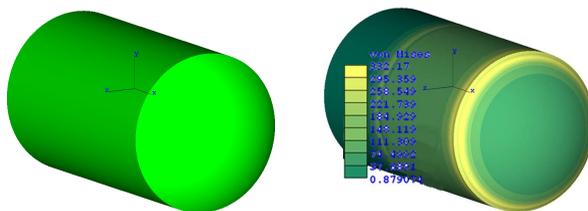


Рис. 6 – Исходное состояние и НДС оболочки гладкого бака под действием внутреннего давления без учета шпангоута

Выводы. Основными результатами работы является создание подходов и методик определения разрушающих нагрузок при деформировании топливных баков под действием внутреннего давления с учетом пластических деформаций материала, и разработка методик численного прогнозирования зон разрушения, а именно:

- для определения НДС оболочечных конструкций РКТ, в частности, предложена геометрическая модель гладкого бака, основанная на учете оболочечных эффектов;

- представлены усовершенствованные геометрические модели топливных баков с кусочно-постоянной толщиной, либо подкрепленных шпангоутами;

- разработана физическая модель деформирования оболочек, учитывающая изменение механических характеристик материала в результате перехода в пластическое состояние материала под действием силовых нагрузок. Данная модель реализована в виде итерационного процесса, согласно которому нелинейная задача сводится к решению последовательности линеаризованных задач;

- показано, что зона возможного разрушения конструкции гладкого бака при наличии шпангоута смещается от стыкового сечения (днище-корпус), что соответствует физическим представлениям. При этом разрушающая нагрузка увеличивается до 20%;

- представлен алгоритм визуализации полей деформаций и напряжений по поверхности конструкции.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Акимов Д. В.** Конечно-элементный анализ и экспериментальное исследование прочности трехслойной сотовой конструкции переходного отсека космического летательного аппарата / Д. В. Акимов, В. З. Грищак, С. И. Гоменюк, И. Ф. Ларионов, Д. В. Клименко, В. Н. Сиренко // Проблемы прочности. – 2016. – № 3. – С. 52-57.

2. **Грин А. Е.** Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды / А. Е. Грин, Дж. Е. Адкинс. – М.: Мир, 1985. – 455 с.

3. **Гудрамович В. С.** Конечно-элементный анализ упруго-пластического напряженно-деформированного состояния отсеков ракетных конструкций с вырезами / В. С. Гудрамович, Э. Л. Гарт, Д. В. Клименко, А. М. Тонконоженко, С. А. Рябокоть // Техническая механика. – 2011. – № 4. – С. 52-61.

4. **Гудрамович В. С.** Применение проекционно-итерационных схем МКЭ к решению задач упругопластического деформирования оболочек с отверстиями / В. С. Гудрамович, Э. Л. Гарт, С. А. Рябокоть // Вісн. Київськ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер.: Фіз.-мат. науки. – 2013. – Вип. 3. – С. 55-58.

5. **Гудрамович В. С.** Моделирование напряженно-деформированного состояния оболочечных конструкций ракетной техники и энергетики / В. С. Гудрамович // Техническая механика. – 2013. – № 4. – С. 97-104.

6. **Гудрамович В. С.** Оценка ресурса конструкций ракетно-космической техники при учете влияния концентраторов напряжений в виде отверстий / В. С. Гудрамович, А. В. Репринцев, С. А. Рябоконь, Е. В. Самарская // Техническая диагностика и неразрушающий контроль. – 2016. – № 2. – С. 28-36.

7. **Гудрамович В. С.** Взаимное влияние вырезов на прочность оболочечных конструкций при пластическом деформировании / В. С. Гудрамович, Э. Л. Гарт, Д. В. Клименко, С. А. Рябоконь // Проблемы прочности. – 2013. – № 1. – С. 5-16.

8. **Васидзу К.** Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – М.: Мир, 1987. – 542 с.

9. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М.: Наука, 1980. – 512 с.

10. **Оден Дж.** Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Дж. Оден. – М.: Мир, 1976. – 464 с.

11. **Сегерлинд Л.** Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М.: Мир, 1979. – 392 с.

12. **Тимошенко С. П.** Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 636 с.

13. **Черняков Ю. А.** Локализация пластической деформации на площадке течучести в условиях плоского напряженного состояния / Ю. А. Черняков, А. Г. Шевченко // Вісн. Запорізьк. нац. ун-ту: зб. наук. статей. Фіз.-мат. науки. – Запоріжжя: Запорізький нац. ун-т. – 2016. – № 1. – С. 264–271.

14. **Bailey R. W.** Creep Relationships and their Application to Pipes, Tubes and Cylindrical Parts under Internal Pressure / R. W. Bailey // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. – 1951. – Vol. 164. – P. 425–431.

15. **Derrington M. G.** The onset of yield in a thick spherical shell subject to internal pressure and uniform heat flow / M. G. Derrington, W. Johnson // Applied Scientific Research. – 1958. – Vol. 7, Issue 6. – P. 408-420.

16. **Ferreira A. J. M.** Matlab Codes for Finite Element Analysis / A. J. M. Ferreira. – Springer, 2009. – 236 p.

17. **Mindlin R. D.** Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates / R. D. Mindlin // ASME Journal of Applied Mechanics. – 1951. – Volume 18. – P. 31-38.

18. OpenGL - The Industry Standard for High Performance Graphics [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.opengl.org/>

19. **Reissner E.** The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates / E. Reissner // ASME Journal of Applied Mechanics. – 1945. – Vol. 12. – P. 68-77.

20. **Zienkiewicz O. C.** The Finite Element Method / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. – Vol. 2 – Solid Mechanics – London: Butterworth-Heinemann, 2000. – 460 p.

УДК 539.3

*Д. В. Акімов, В. З. Гришак д-р техн. наук,
Ларіонов І. Ф., канд. техн. наук, С. І. Гоменюк, д-р техн. наук,
Д. В. Клименко, канд. техн. наук, С. В. Чопоров, канд. техн. наук,
С. М. Гребенюк., д-р техн. наук*

МАТЕМАТИЧНЕ ЗАБАЗПЕЧЕННЯ АНАЛИЗУ МІЦНОСТІ СИЛОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ РАКЕТНО-КОСМІЧНОЇ ТЕХНІКИ

Обговорюються спеціалізовані числові підходи до розрахунку оболонкових конструкцій ракетно-космічної техніки, що знаходяться під дією внутрішнього

тиску. Запропоновані методика розрахунків на міцність з урахуванням пластичних деформацій матеріалу. Визначено напружено-деформований стан конструкцій, які працюють в пружно-пластичній області, і крайові ефекти в зонах переходів. На основі аналізу результатів дослідження запропонована методика визначення зон руйнування досліджуваної оболонкової конструкції з візуалізацією досліджуваного процесу.

Ключові слова: математичне забезпечення, силові елементи, баки, напружено-деформований стан, візуалізація процесу.

UDC 539.3

*D. V. Akimov, V. Z. Gristchak, Dr. Sci. (Tech.), Larionov I. F., PhD (Tech.),
S. I. Gomenyuk, Dr. Sci. (Tech.), D. V. Klymenko, PhD (Tech.),
S. V. Choporov, PhD (Tech.), S. M. Grebenyuk, Dr. Sci. (Tech.)*

MATHEMATICAL METHOD FOR ANALYSIS OF STRENGTH OF SPACE TECHNIQUE

This article describes numerical approach for an investigation of shell structures. Particularly, it is used the finite element method for determining of the stress-strain state of a thin shell under internal pressure. We also describe the numerical scheme for analysis of elastic and plastic strains. In addition, we show an influence of ring stiffeners on potential fracture zones of the rocket's tank.

Keywords: mathematical method, space structures, tank, stress-strain state, visualization.

We consider a thin shell as a set of thin plane elements (plates). Let the local coordinate system for some element of the shell is chosen with following restrictions: the plane of the element and the plane xOy are congruent, the normal to the element and the Oz axis are parallel. Hence, the first-order shear deformation theory of thin plates can be employed.

The first-order shear deformation theory of thin plates is an extension of the Mindlin's plate theory [17, 19]. The theory includes the effect of transverse shear deformations with the following assumptions and restrictions [20]:

- strains and displacements are small;
- straight lines perpendicular to the midsurface (i.e., transverse normals) before deformation remain straight after deformation;
- transverse normals do not experience elongation (i.e., they are inextensible);
- transverse normals do not remain perpendicular to the midsurface after deformation.

The assumed displacement field is defined as

$$\begin{cases} u(x,y,z) = u(x,y) + z\theta_x(x,y); \\ v(x,y,z) = v(x,y) + z\theta_y(x,y); \\ w(x,y,z) = w(x,y). \end{cases}$$

Generalized displacements are written as

$$\{\mathbf{d}^e\}^T = \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{z1} \quad \dots \quad u_{n_e} \quad v_{n_e} \quad w_{n_e} \quad \theta_{x_{n_e}} \quad \theta_{y_{n_e}} \quad \theta_{z_{n_e}}\},$$

where n is a number of nodes in the element.

The in-plane strain vector is obtained by derivation of displacements as

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \{\boldsymbol{\varepsilon}_m\} + z\{\boldsymbol{\varepsilon}_b\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(m)} \\ \varepsilon_y^{(m)} \\ \gamma_{xy}^{(m)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(b)} \\ \varepsilon_y^{(b)} \\ \gamma_{xy}^{(b)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x \\ v_y \\ u_y + v_x \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

where $\{\boldsymbol{\varepsilon}_m\}$ is the membrane strain vector; $\{\boldsymbol{\varepsilon}_b\}$ is the bending strain vector

(curvatures); $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, $v_x = \frac{\partial v}{\partial x}$, $v_y = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\theta_{x,x} = \frac{\partial \theta_x}{\partial x}$, $\theta_{x,y} = \frac{\partial \theta_x}{\partial y}$,

$$\theta_{y,x} = \frac{\partial \theta_y}{\partial x}, \quad \theta_{y,y} = \frac{\partial \theta_y}{\partial y}.$$

The transverse shear vector is given as

$$\{\boldsymbol{\gamma}\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_x + \theta_x \\ w_y + \theta_y \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

where $w_x = \frac{\partial w}{\partial x}$, $w_y = \frac{\partial w}{\partial y}$.

The stress-strain relations can be expressed as

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}; \quad (3)$$

$$\{\boldsymbol{\tau}\} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = [\mathbf{G}]\{\boldsymbol{\gamma}\} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

where E is the Young's modulus; μ is the Poisson's ratio; $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ is

the shear modulus.

The strain energy for a plate can be written as

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{2} \int_{V_e} \{\boldsymbol{\sigma}\}^T \{\boldsymbol{\varepsilon}\} dV_e + \frac{\kappa}{2} \int_{V_e} \{\boldsymbol{\tau}\}^T \{\boldsymbol{\gamma}\} dV_e - \mathbf{A}, \quad (5)$$

where $\kappa = 5/6$ is a shear correction factor; \mathbf{A} is a work of external forces [16].

By minimization (5) and substitution relations from (1) – (5) into (5) and integration over the plate thickness we obtain relations for the global stiffness matrix as

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_e^{\text{local}}] = & h \int_{S_e} [\mathbf{B}_m]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_m] dS_e + \frac{h^3}{12} \int_{S_e} [\mathbf{B}_b]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_b] dS_e + \\ & + \kappa h \int_{S_e} [\mathbf{B}_c]^T [\mathbf{G}] [\mathbf{B}_c] dS_e. \end{aligned} \quad (7)$$

By integration (7) we get the element stiffness matrix in the local coordinate system. The element stiffness matrix in the global coordinates can be expressed

$$[\mathbf{K}_e^{\text{global}}] = [\mathbf{R}]^T [\mathbf{K}_e^{\text{local}}] [\mathbf{R}],$$

where

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{T}] & 0_{6 \times 6} & \dots & 0_{6 \times 6} \\ 0_{6 \times 6} & [\mathbf{T}] & \dots & 0_{6 \times 6} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_{6 \times 6} & 0_{6 \times 6} & \dots & [\mathbf{T}] \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 0 & 0 & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (8)$$

and c_{ij} denotes cosines of the local coordinate system.

In the final section of the article, the incremental variable stiffness method is used for the nonlinear elastic and plastic analysis of shells. Particularly, we investigate a space rocket's tank under internal pressure. We consider the tank with a ring stiffener and without it. Such consideration allows to study influence of the stiffener on the state of the tank.

REFERENCES

1. **Akimov D. V.** Finite element analysis and experimental research for strength of three layered honeycomb structure of transitional module space flying apparatus / D. V. Akimov, V. Z. Grishhak, S. I. Gomenyuk, I. F. Larionov, D. V. Klimenko, V. N. Sirenko // Problems of Strength. – 2016. - No 3. – P. 52–57. (In Russian).
2. **Grin A. E.** Large elastic deformations and nonlinear solid mechanics y / A. E. Grin, Dj. E. Adkins. – M.: Mir, 1985. – 455 p. (In Russian).
3. **Hudramovich V. S.** The finite element analysis for elastic-plastic stress-strain states of space modules with cutouts / V. S. Hudramovich, E. L. Hart, D. V. Klimenko, A. M. Tonkonozhenko, S. A. Ryabokon' // Technical Mechanics. – 2011. – No 4. – P. 52–61. (In Russian).

4. **Hudramovich V. S.** Application of projection-iteration scheme FEM to solution of elastic-plastic problems for deformable shells with cutouts / V. S. Hudramovich, E. L. Hart, S. A. Ryabokon' // *Announcer of National University*. Ser.: Phys.-math. sciences. – 2013. – V. 3. – P. 55–58. (In Russian).

5. **Hudramovich V. S.** Modelling for stress-strain states shells structures in rocket techniques and energetic / V. S. Hudramovich // *Technical Mechanics*. – 2013. – No 4. – P. 97–104. (In Russian).

6. **Hudramovich V. S.** Estimation of rocket-space structures resource with influence of stress concentrators by cutouts / V. S. Hudramovich, A. V. Reprincev, S. A. Ryabokon', E. V. Samarskaya // *Technical diagnostic and non-destructive control*. – 2016. – No 2. – P. 28–36. (In Russian).

7. **Hudramovich V. S.** Cross-coupling of cuts on strength of shell structures at plastic deformation / V. S. Hudramovich, E. L. Hart, D. V. Klimenko, S. A. Ryabokon' // *Problems of Strength*. – 2013. – No1. – P. 5–16. (In Russian).

8. **Vasidzu K.** Variational methods in the theories of elasticity and plasticity / K. Vasidzu. – M.: Mir, 1987. – 542 p. (In Russian).

9. **Lur'e A. I.** Nonlinear theory of elasticity / A. I. Lur'e. – M.: Nauka, 1980. – 512 p. (In Russian).

10. **Oden Dzh.** Finite elements in solid nonlinear mechanics / Dj. Oden. – M.: Mir, 1976. – 464 p. (In Russian).

11. **Segerlind L.** Application of finite elements method / L. Segerlind. – M.: Mir, 1979. – 392 p. (In Russian).

12. **Timoshenko S. P.** Plates and shells / S. P. Timoshenko, S. Vojnovskij – Kriger [ed. G. S. Shapiro]. – M.: Nauka, 1966. – 636 p. (In Russian).

13. **Chernyakov Yu. A.** Localization of plastic deformation on yield under plane stress-strain state / Yu. A. Chernyakov, A. G. Shevchenko // *Visnyk Zaporizhzhzhye National university: Phys.-math. sciences*, 2016. – No 1. – P. 264–271. (In Russian).

14. **Bailey R. W.** Creep Relationships and their Application to Pipes, Tubes and Cylindrical Parts under Internal Pressure / R. W. Bailey // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*. – 1951. – Vol. 164. – P. 425–431.

15. **Derrington M. G.** The onset of yield in a thick spherical shell subject to internal pressure and uniform heat flow / M. G. Derrington, W. Johnson // *Applied Scientific Research*. – 1958. – Vol. 7, Issue 6. – P. 408–420.

16. **Ferreira A. J. M.** Matlab Codes for Finite Element Analysis / A. J. M. Ferreira. – Springer, 2009. – 236 p.

17. **Mindlin R. D.** Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates / R. D. Mindlin // *ASME Journal of Applied Mechanics*. – 1951. – Vol. 18. – P. 31–38.

18. OpenGL - The Industry Standard for High Performance Graphics. Available from: <https://www.opengl.org/>

19. **Reissner E.** The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates / E. Reissner // *ASME Journal of Applied Mechanics*. – 1945. – Vol. 12. – P. 68–77.

20. **Zienkiewicz O. C.** The Finite Element Method / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. – Vol. 2 – *Solid Mechanics* – London: Butterworth-Heinemann, 2000. – 460 p.

¹*Запорожский национальный университет,
Запорожье, Украина*

²*Государственное предприятие
«Конструкторское Бюро «Южное»
им. М. К. Янгеля»,
Днепр, Украина*

Поступила в редколлегию 22.02.2017