ISSN 2079–1836
2017, вип. 26

УДК 539.3

Н. А. Гук, д-р физ.-мат. наук, Н. И. Степанова

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТРЕЩИН В ТОНКИХ ПЛАСТИНАХ

Рассматривается задача идентификации трещин в тонких пластинах по результатам косвенных наблюдений. Для определения параметров (вершин) трещин используются результаты измерений поля нормальных перемещений тела. Модель пластины с трещиной формулируется в вариационной постановке, полученной в результате минимизации функционала энергии. Условия на берегах трещины задаются как условия на линии, имитирующей разрез в сплошной тонкостенной конструкции. Для дискретизации задачи используется метод конечных элементов.

Ключевые слова: *тонкая пластина, обратная задача, трещина, идентификация, метод конечных элементов, множители Лагранжа.*

Введение. Задачи определения местоположения дефектов в телах встречаются в геофизике, медицине, сейсморазведке, авиационной и строительной промышленности. Наиболее опасными с точки зрения механики разрушения являются дефекты в виде трещин, поскольку при действии нагрузок в вершинах трещин наблюдается концентрация напряжений, что может привести к разрушению конструкции. Поэтому разработка эффективных моделей и методов идентификации трещин является весьма актуальной задачей.

В литературе встречаются различные постановки задач идентификации трещин и методы их исследования. Первое направление основано на изучении особенностей строения физических полей (тепловых, электростатических) в телах с дефектами [8]. В такой постановке обратные задачи сводятся к задачам для уравнений Лапласа или Пуассона, однако их решение возможно только с использованием априорных предположений о форме (дуга окружности, эллипс, прямая), геометрических параметрах трещины (местоположение центра, линейный размер) или ее местоположении (принадлежность трещины некоторой плоскости). Разрабатываемые подходы к решению задач в такой постановке основаны на теории потенциала и позволяют определить параметры трещины с использованием аналитических соотношений в явном виде.

Второе направление связано с исследованием обратных геометрических задач для уравнений теории упругости в конечной области, слое [1], полупространстве [2]. Идентификация параметров трещины осуществляется с использованием косвенной информации о полях перемещений, тепловых, либо электростатических полях, заданных на части границы области. В [3] формулируется система нелинейных операторных уравнений, которая линеаризуется в окрестности трещины известной конфигурации (прямолинейной, дуги окружности или эллипса), при этом начальная конфигурация трещины определяется из условия минимума функционала невязки, зависящего от параметров трещины. В [12] сформулированы граничные интегральные уравнения для тел с малыми дефектами для статической задачи изотропной теории упругости.

Использование перечисленных подходов не дает возможность получить решение задачи в общем виде, построение решений возможно только в том случае, когда сформулированы априорные предположения о местоположении и форме трещины.

Для устранения указанных недостатков и организации процесса идентификации трещин по результатам наблюдений за состоянием конструкции весьма эффективным является использование аппарата обратных задач, позволяющего в автоматическом режиме выполнять процедуру идентификации параметров дефектов реальной тонкостенной системы по измеренным в эксперименте характеристикам напряженно-деформированного состояния. При этом обратная задача формулируется как геометрическая обратная задача (неизвестными являются параметры трещины), для их определения используются результаты измерений поля нормальных перемещений тела.

В настоящей работе для моделирования трещины используется функция, характеризующая координаты вершин трещины. Задача формулируется в вариационной постановке, при формировании математической модели прямой задачи развивается подход [6], который позволяет задать условия на берегах трещины как условия на линии, имитирующей разрез в сплошной тонкостенной конструкции. Условие равенства нулю среднеквадратического отклонения между измеренными и вычисленными с использованием математической модели прямой задачи значениями нормальных перемещений присоединяется к функционалу задачи с использованием множителей Лагранжа.

Постановка задачи. Рассматривается тонкая прямоугольная пластина толщины $h << a,b$, занимающая пространственную область $\Omega = \left\{ X = \left(x_1, x_2, z\right) \middle| -a \le x_1 \le a, -b \le x_2 \le b, -h/2 \le z \le h/2 \right\}$, с границей Γ, где a,b – линейные размеры пластины; h – толщина пластины.

Пластина находится под действием нормальной распределенной нагрузки q и продольной нагрузки N, на свободных от действия продольной нагрузки кромках пластины реализованы условия жесткого защемления.

В пластине имеется трещина, местоположение и геометрические параметры которой неизвестны, их необходимо определить по результатам измерения значений нормальных перемещений $w(X,H) = \{w\}$ в конечном числе точек наблюдений на поверхности тела

$$w(X_p, H) = \tilde{w}^*\left(X_p\right), \tag{1}$$

где $\tilde{w}^*$ – измеренные значения перемещений в точках наблюдений.

Указанная задача может быть сведена к задаче идентификации параметров модели деформирования пластины, описываемой соответствующей краевой задачей, а именно координат точек $X_k, k=\overline{1,K}$, в которых расположены вершины трещины.

Задача идентификации может быть сформулирована как обратная задача в вариационной постановке [10]. В качестве неизвестных обратной задачи выступает вектор $H(X)=\{X_k\}$, компонентами которого являются координаты вершин трещины. Тогда обратная задача сводится к задаче минимизации функционала $W(H)$, характеризующего среднеквадратичное отклонение между измеренными значениями нормальных перемещений $\tilde{w}^*$ и вычисленными, с использованием математической модели прямой задачи, значениями функции нормальных перемещений $w(X_p,H)$ в точках измерений X_p:

$$H(X)=\arg\min_{H\in\overline{H}} W(H),\ H\in\overline{H}, \tag{2}$$

$$W(H)=\sum_p\left(w(X_p,H)-\tilde{w}^*(X_p)\right)^2 \quad H\in\overline{H},$$

где $\overline{H}$ – область определения неизвестной функции обратной задачи.

При этом предполагается, что значения компонент $w(X_p,H)$ вектор-функции перемещений $U(X)$ определяются из решения прямой задачи деформирования пластины с разрезом, местоположение которого известно.

Математическая модель прямой задачи. Деформированное состояние пластины описывается вектор - функцией перемещений $U(X)=\{u(X),v(X),w(X),\theta_i(X)\}$, где $u(X),v(X),w(X)$ – перемещения в направлениях x_1, x_2, z; $\theta_i(X)$ – углы поворота, $\theta_i(X)=w,_{x_i}(X)$; $i=1,2$.

Трещина в пластине моделируется математическим разрезом с берегами, на которых компоненты поля перемещений терпят разрыв, а берега раскрыты и не взаимодействуют [12] .

Вариационная постановка прямой задачи деформирования пластины с разрезом под действием распределенной нагрузки при известном местоположении границы разреза Γ_p имеет вид:

$$U=\arg\min_U J(U),\ U\in\overline{U}. \tag{3}$$

Функционал полной энергии системы «пластина – внешние силы» представляется в виде:

$$J(U)=J_0+\overline{J} \tag{4}$$

при предварительном выполнении условий:
- на опорных контурах Γ_o пластины:
на поперечных кромках ($x_1 = -a$, $x_1 = a$)

$$w\Big|_{\substack{x_1=a\\x_1=-a}} = w^* \text{ или } Q_{11}\Big|_{\substack{x_1=a\\x_1=-a}} = Q_{11}^*;\ u\Big|_{\substack{x_1=a\\x_1=-a}} = u^* \text{ или } T_{11}\Big|_{\substack{x_1=a\\x_1=-a}} = T_{11}^*;$$

$$w,_{x_1}\Big|_{\substack{x_1=a\\x_1=-a}} = w^*,_{x_1} \text{ или } M_{11}\Big|_{\substack{x_1=a\\x_1=-a}} = M_{11}^*, \qquad (5)$$

на продольных кромках ($x_2 = -b$, $x_2 = b$)

$$w\Big|_{\substack{x_2=b\\x_2=-b}} = w^* \text{ или } Q_{22}\Big|_{\substack{x_2=b\\x_2=-b}} = Q_{22}^*;\ v\Big|_{\substack{x_2=b\\x_2=-b}} = v^* \text{ или } T_{22}\Big|_{\substack{x_2=b\\x_2=-b}} = T_{22}^*;$$

$$w,_{x_2}\Big|_{\substack{x_2=b\\x_2=-b}} = w^*,_{x_2} \text{ или } M_{22}\Big|_{\substack{x_2=b\\x_2=-b}} = M_{22}^*, \qquad (6)$$

- на границах разреза Γ_p :

для горизонтального разреза ($x_1 = const$)

$$T_{11}\big|_{\Gamma_p} = 0;\ T_{12}\big|_{\Gamma_p} = 0;\ M_{11}\big|_{\Gamma_p} = 0;\quad Q_{11}\big|_{\Gamma_p} = 0, \qquad (7)$$

для вертикального разреза ($x_2 = const$)

$$T_{12}\big|_{\Gamma_p} = 0;\quad T_{22}\big|_{\Gamma_p} = 0;\quad M_{22}\big|_{\Gamma_p} = 0;\quad Q_{22}\big|_{\Gamma_p} = 0, \qquad (8)$$

где J_0 – потенциальная энергия деформации пластины; $\overline{J}$ – потенциал внешних сил; T_{ij} , M_{ij} , Q_{ij} – функции усилий, моментов и перерезывающих сил на соответствующих контурах; u^* , v^* , w^* , T_{ij}^* , Q_{ii}^* , M_{ij}^* – заданные значения соответствующих функций на внешнем контуре пластины Γ_o и границах разреза Γ_p ; $i, j = 1,2$.

Для формирования функционалов в соотношении (4) вводится система безразмерных величин:

$$\xi_1 = \frac{x_1}{a};\quad \xi_2 = \frac{x_2}{b};\quad (u,v,w) = a^{-1}\left(\overline{u},\overline{v},\overline{w}\right);\quad \varepsilon_{ij} = \overline{\varepsilon}_{ij};\quad \chi_{ij} = a\overline{\chi}_{ij};$$

$$(T_{ij}, Q_{ii}) = \frac{(\overline{T_{ij}}, \overline{Q_{ii}})a}{Eh\left(1-\mu^2\right)\alpha^2};\quad M_{ij} = \frac{\overline{M_{ij}}}{Eh\left(1-\mu^2\right)\alpha^2};$$

$$q = \frac{\overline{q}a}{Eh\varepsilon^2}\left(1-\mu^2\right);\quad \alpha = \frac{h^2}{\sqrt{12}a^2},$$

где $\left(\overline{\cdot}\right)$ – размерные функции; E – модуль Юнга; μ – коэффициент Пуассона; α – параметр.

Предполагается предварительное выполнение условий совместности деформаций:

$$\varepsilon_{11} = u,_{\xi_1} + \frac{1}{2}\left(w,_{\xi_1}\right)^2; \quad \varepsilon_{22} = v,_{\xi_2} + \frac{1}{2}\left(w,_{\xi_2}\right)^2;$$

$$\varepsilon_{12} = u,_{\xi_1} + v,_{\xi_2} + w,_{\xi_1} w,_{\xi_2}; \qquad (9)$$

$$\chi_{11} = \left(w,_{\xi_1}\right),_{\xi_1}; \ \chi_{22} = \left(w,_{\xi_2}\right),_{\xi_2}; \ \chi_{12} = 2\left(w,_{\xi_1}\right),_{\xi_2}$$

и физических соотношений:

$$\begin{aligned} &T_{11} = \left[\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}\right]; \quad T_{22} = \left[\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11}\right]; \quad T_{12} = \frac{(1-\mu)}{2}\varepsilon_{12}; \\ &M_{11} = \left[\chi_{11} + \mu\chi_{22}\right]; \quad M_{22} = \left[\chi_{22} + \mu\chi_{11}\right]; \quad M_{12} = (1-\mu)\chi_{12}. \end{aligned} \qquad (10)$$

Тогда потенциальная энергия деформации пластины имеет вид:

$$\begin{aligned} J_0 = \frac{1}{2\left(1-\mu^2\right)} \iint\limits_{\Omega} &\left[\varepsilon_{11}^2 + 2\mu\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2 + \frac{1}{2}(1-\mu)\varepsilon_{12}^2\right] + \\ &+\alpha^2\left[\chi_{11}^2 + 2\mu\chi_{11}\chi_{22} + \chi_{22}^2 + 2(1-\mu)\chi_{12}^2\right] d\xi_1 d\xi_2, \end{aligned} \qquad (11)$$

потенциал внешних сил записывается следующим образом:

$$\overline{J} = \iint\limits_{\Omega} qw\, d\xi_1 d\xi_2 - \int\limits_{\Gamma} \left(M_{11}^*\left(w,_{\xi_1}\right),_{\xi_1} + Q_{11}^* w + T_{11}^* u + T_{12}^* v\right) d\Gamma,$$

где ε_{ij} – деформации срединной поверхности; χ_{ij} – составляющие изгибной деформации и кручения; q – нагрузка; $\Gamma = \Gamma_o \cup \Gamma_p$.

Из условия $\delta J = 0$ следуют нелинейные уравнения равновесия пластины в функциях перемещений.

Если условия (7) – (10) присоединить к функционалу (11) с помощью множителей Лагранжа и учесть непрерывность функций усилий, моментов и перерезывающих сил внутри области Ω и на границах разреза Γ_p, то соответствующий функционал будет содержать граничные слагаемые вида:

- для горизонтального разреза ($\xi_2 = const$)

$$J_{\Gamma_p}^1 = \int\limits_{\substack{a_1 \\ (\xi_2 = const)}}^{a_2} \left(T_{22}U_{\Gamma_p}^{(2)} + T_{12}U_{\Gamma_p}^{(1)} + M_{22}U_{\Gamma_p}^{(3)} + Q_{22}U_{\Gamma_p}^{(4)}\right) d\xi_2;$$

- для вертикального разреза ($\xi_1 = const$)

$$J^2_{\Gamma_p} = \int\limits_{\substack{b_1 \\ (\xi_1 = const)}}^{b_2} \left(T_{11} U^{(1)}_{\Gamma_p} + T_{12} U^{(2)}_{\Gamma_p} + M_{11} U^{(3)}_{\Gamma_p} + Q_{11} U^{(4)}_{\Gamma_p} \right) d\xi_1 . \quad (12)$$

Здесь неизвестные функции U варьируются независимо внутри области Ω, функции $U^{(l)}_{\Gamma_p}$ – на границах Γ^+_p, Γ^-_p, где $U^{(\ell)}_{\Gamma_p}$ – скачки перемещений u, v, w и углов поворота θ_i;

$$U^{(1)}_{\Gamma_p} = \left[u^- - u^+ \right]; \quad U^{(2)}_{\Gamma_p} = \left[v^- - v^+ \right]; \quad U^{(3)}_{\Gamma_p} = \left[\theta^-_i - \theta^+_i \right];$$

$$U^{(4)}_{\Gamma_p} = \left[w^- - w^+ \right]; \quad i, j = 1,2; \quad \ell = \overline{1,4} .$$

Тогда, в силу независимости вектор - функции U_{Γ_p} условие $\delta J = 0$ может быть реализовано как

$$\delta_P J = 0 \text{ при условии } \delta_{U_{\Gamma_p}} J_{\Gamma_p} = 0 , \quad (13)$$

где $P = \left\{ U, M_{ij}, T_{ij}, Q_{ii} \right\}$.

Таким образом, задача о деформировании пластины с разрезом эквивалентна задаче о деформировании сплошной пластины, для которой условия на берегах разреза преобразуются в условия на линии, имитирующей разрез [4]. Моделирование разреза выполняется путем задания значений скачков перемещений U_{Γ_p} на линии разреза при условии:

$$\delta_{U_{\Gamma_p}} J_{\Gamma_p} = 0 . \quad (14)$$

Из сформулированного условия (14) следуют равенства (7), (8) на границе разреза Γ_p .

Математическая модель обратной задачи. Для описания неизвестных обратной задачи – координат точек пластины, находящихся на линии разреза, будем использовать отрезок $\left[X_{K_1}, X_{K_2} \right]$. Тогда в качестве неизвестных обратной задачи будет выступать вектор $H = \left\{ x_{1K_1},\ x_{2K_1}, x_{1K_2},\ x_{2K_2} \right\}$.

Для решения обратной задачи необходимо найти вектор-функцию $L^*(X) = \left(U^*(X), H^*(X) \right)^T$, $L^*(X) \in \overline{U} \times \overline{H}$ такую, что

$$J\left(L^*\right)=\min_{L(X)\in\overline{U\times H}} J\left(L\right), \tag{15}$$

где $U=\left\{u,v,w,\theta_i,U_{\Gamma p}^{(1)},U_{\Gamma p}^{(2)},U_{\Gamma p}^{(3)},U_{\Gamma p}^{(4)}\right\}$, $H=\left\{x_{1K_1},\ x_{2K_1},x_{1K_2},\ x_{2K_2}\right\}$, при условии, что $W(H)=\sum\limits_p\left(w(X_p,H)-\tilde{w}^*\left(X_p\right)\right)^2\to\min$.

Метод решения. Для решения задачи (15) осуществляется переход к дискретной модели пластины с использованием метода конечных элементов (МКЭ). Использование МКЭ для определения напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкции требует представления неизвестных функций прямой и обратной задачи в параметрическом виде.

Для этого на области Ω вводится сетка с узлами X_n, где $X=\left\{X_n\right\}$, $X_n=\left(\xi_{1n},\xi_{2n}\right)$, $n=\overline{1,N}$, тогда функции, характеризующие напряженно-деформированное состояние пластины, представляются в виде векторов, компонентами которых являются узловые значения соответствующих функций: $U=\left\{u_n,v_n,w_n,\theta_{in}\right\}$, $T=\left\{T_{ijn},M_{ijn},Q_{ijn}\right\}$; $n=\overline{1,N}$, $i,j=1,2$.

Для описания результатов измерений значений нормальных перемещений $\left\{\tilde{w}_p^*\right\}$ вводится сетка с узлами X_p, где $X=\left\{X_p\right\}$, $X_p=\left(\xi_{1p},\xi_{2p}\right)$, $p=\overline{1,P}$.

Для описания линии разреза Γ_p выбираются узлы сетки, координаты которых удовлетворяют условию

$$\frac{x_1-x_{1K_1}}{x_{1K_2}-x_{1K_1}}-\frac{x_2-x_{2K_1}}{x_{2K_2}-x_{2K_1}}\le\delta,\ \delta<<1.$$

Функция $U\left(X\right)\Big|_{\Gamma_p}$, компонентами которой являются скачки перемещений и углов поворотов на линии разреза, представляется в виде вектора

$$U_{\Gamma p}=\left\{U_{\Gamma_p K_1}^{(1)},U_{\Gamma_p K_1}^{(2)},U_{\Gamma_p K_1}^{(3)},U_{\Gamma_p K_1}^{(4)},\ldots,U_{\Gamma_p K_2}^{(1)},U_{\Gamma_p K_2}^{(2)},U_{\Gamma_p K_2}^{(3)},U_{\Gamma_p K_2}^{(4)}\right\}.$$

С использованием введенной дискретизации неизвестные функции задачи на элементе задаются для локальной системы координат при помощи аппроксимаций метода конечных элементов через узловые значения.

После выполнения соответствующей процедуры интегрирования при заданной аппроксимации неизвестных функций и процедуры суммирования матриц элементов, получаем систему нелинейных разрешающих соотношений для определения узловых перемещений с учетом граничных условий в виде

$$A(U) = F\ , \tag{16}$$

где $A(U)$ – система нелинейных алгебраических уравнений, сформулированная относительно $\{U\} = \begin{Bmatrix} U_\Omega \\ U_{\Gamma_p} \end{Bmatrix}$; U_Ω – неизвестные узловые перемещения внутри области Ω и на границе Γ; U_{Γ_P} – неизвестные скачки перемещений на линии разреза; F – вектор узловых значений функций правых частей.

Решение системы уравнений (16) позволяет определить узловые перемещений внутри области Ω и на границе Γ, а также соответствующие значения скачков перемещений U_{Γ_p} при фиксированном векторе $H^* = \left\{ \overset{*}{x}_{1K_1},\ \overset{*}{x}_{2K_1}, \overset{*}{x}_{1K_2},\ \overset{*}{x}_{2K_2} \right\}$.

Для определения вектора значений H будем использовать метод, аналогичный методу вектора спада [9].

Сформулируем рассматриваемую задачу (2) с учетом введенной дискретизации в виде

$$H(X_{K_1}, X_{K_2}) = \arg \min_{H \in \overline{H}} W(H),\ H \in \overline{H}\ , \tag{17}$$

где $W(H) = \left(w_p(H) - \tilde{w}_p^* \right)^T \left(w_p(H) - \tilde{w}_p^* \right),\ p = \overline{1, P}$.

В соответствии с идеей метода вектора спада определим дискретное точечное пространство M , $\tilde{H}$ – множество допустимых решений $\tilde{H} \subset \overline{H}$.

Для пространства M введем метрику в виде:

$$\rho^2 (H_1, H_2) = \sum_{i=1}^{2} (H_{1i} - H_{2i})^2\ ,$$

где H_{1i}, H_{2i} – координаты точек H_1, H_2 в пространстве M .

Пусть H' – некоторое допустимое решение обратной задачи (17). Определим окрестность M_r точки H' с радиусом r как набор возможных решений H_q , $q = \overline{1, 8}$, так, чтобы $\rho\left(H', H_q\right) \le r$, в качестве r выбираем длину диагонали конечного элемента.

В окрестности M_r точки $H' \in \overline{H}$ в качестве вектора спада функции $W(H)$ выступает такой вектор Δ, компонентами которого являются $\Delta_q = \Delta\left(H', H_q\right)$ ($q = \overline{1, 8}$), где H_q различные решения задач, которые принадлежат окрестности M_r .

Если $\Delta_q = \Delta\left(H', H_q\right) \geq 0$, то точка H' является точкой локального минимума, т.е.

$$W(H') = \min_{H_r} W\left(H', H_q\right),\ H_r \in M_r .$$

Если же какие-либо компоненты вектора спада $W(H_q)$ будут принимать отрицательные значения, то они определяют направления дальнейшего движения.

Предложенный подход к решению обратной задачи был реализован следующим алгоритмом.

Алгоритм решения обратной задачи. Задать начальный вектор $H^d = \left\{x_{1\,K_1}^d,\ x_{2\,K_1}^d, x_{1\,K_2}^d,\ x_{2\,K_2}^d\right\}$, определяющий местоположение разреза в пластине, $d = 0$; радиус $r > 0$; шаг $\Delta x_i < r$; $i = 1,2$.

1. Решить прямую задачу при заданном местоположении разреза H^d, определить (НДС) пластины, определить значения $W(H^d)$.
2. Для вершин отрезка построить вектор спада $\{\Delta\}$ в направлениях всех точек сетки X_n, для которых $\rho\left(X_k^d, X_{k^q}\right) \leq r$, $q = \overline{1,8}$, используя алгоритм определения НДС.
3. Если все $\Delta_q \geq 0$, то перейти к п. 5.
4. Выполнить шаг в направлении $\min \Delta_q$, $d = d + 1$, перейти к п. 2.
5. Конец.

Анализ результатов. В качестве примера применения предложенной методики идентификации трещин рассматривается задача определения местоположения трещины в тонкой стальной прямоугольной пластине ($a = 0.02$ *м*, $b = 0.02$ *м*, $h = 0.002$ *м*, $E_{пласт} = 2 \cdot 10^6\ H/м^2$, $\mu = 0.3$; a, b, h – длина, ширина, толщина пластины). Трещина длины $\ell = 0.3a$ расположена в пластине горизонтально $\xi_2 = const$, координаты вершин трещины $A = (0.5, 0.45)$, $B = (0.65, 0.45)$. Пластина находилась под действием нормальной распределенной q и продольной нагрузки N, приложенной к кромкам пластины $\xi_2 = 0$, $\xi_2 = 1$. На свободных от действия продольной нагрузки кромках $\xi_1 = 0$, $\xi_1 = 1$ реализованы условия жесткого защемления.

Численное решение прямых задач по определению НДС пластины с разрезом выполнялось в пакете прикладных программ, реализующих метод конечных элементов.

Рассматривалась пластина, в которой разрез моделируется линией, а условия на берегах разреза задаются в виде значений скачков перемещений и углов поворота [4]. Для построения конечно-элементной модели пластины по существующей геометрической модели пластины с действительным разрезом использовалась упорядоченная сетка из четырехугольных элементов, создаваемая модулями пакета прикладных программ. Конечно-элементная сетка строилась регулярной, размер конечного элемента определялся наперед заданной точностью решения задачи. Процесс выбора размера конечного элемента проходил путем процедуры последовательного сгущения сетки с целью получения стабильных результатов по основным показателям (НДС). В качестве критерия стабильности разница в значениях характеристик, при которой размер сетки считался достаточным, не превышала 2÷3%. Для уточнения характеристик НДС также осуществлялось сгущение сетки в вершинах разреза.

Для получения значений $\tilde{w}^*$, имитирующих результаты наблюдений за НДС пластины с трещиной, выполнялось решение прямой задачи деформирования пластины при заданном местоположении разреза. Точки измерений нормальных перемещений располагались на поверхности пластины равномерно.

Использование однократно построенной модели сплошной конструкции, в которой разрез моделируется линией с заданными значениями скачков перемещений и углов поворота существенно облегчает процедуру расчета, конечно-элементную модель пластины с разрезом не надо перестраивать на каждой итерации.

Для организации итерационной процедуры определения местоположения разреза формируется вектор $H^d = \left\{ x_1^d{}_{K_1},\ x_2^d{}_{K_1}, x_1^d{}_{K_2},\ x_2^d{}_{K_2} \right\}$.

Компоненты вектора соответствуют номерам узлов пластины и определяют вершины разреза. В качестве начального приближения местоположения разреза выбирались узлы сетки, в которых наблюдались наибольшие отклонения значений нормальных перемещений пластины с разрезом от значений нормальных перемещений в соответствующих узлах целой пластины.

Разрез в пластине описывается линией, соединяющей вершины разреза. Для моделирования разреза в узлах, находящихся на этой линии, прикладывались значения скачков перемещений и углов поворота

$$U_{\Gamma p} = \left\{ U^{(1)}_{\Gamma_p K_1}, U^{(2)}_{\Gamma_p K_1}, U^{(3)}_{\Gamma_p K_1}, U^{(4)}_{\Gamma_p K_1}, \ldots, U^{(1)}_{\Gamma_p K_2}, U^{(2)}_{\Gamma_p K_2}, U^{(3)}_{\Gamma_p K_2}, U^{(4)}_{\Gamma_p K_2} \right\}.$$

Эти значения определяются во внутреннем итерационном процессе из условия выполнения статических условий на берегах разреза [4].

На рис. 1 представлены результаты моделирования разреза. В качестве характеристики НДС приведено распределение напряжений σ_{22} в сечении пластины, совпадающем с линией разреза. Начальному приближению соответствует характеристика НДС, обозначенная тонкой сплошной линией. Из анализа рис. 1 видно, что выбранное начальное приближение не определяет местоположение действительного разреза.

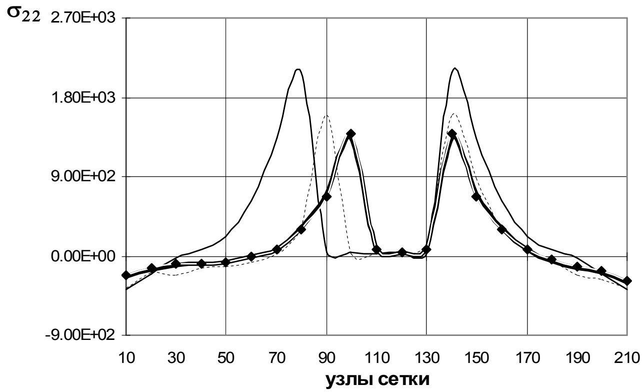

Рис. 1 – **Процесс идентификации разреза:**
– начальное приближение;
– результат третьей итерации;
– результат идентификации;
– пластина с действительным разрезом

На рис. 1 пунктирной линией обозначены напряжения, соответствующие 3-й итерации процедуры идентификации разреза, сплошной жирной линией показаны напряжения, которые соответствуют критерию окончания итерационного процесса. Для сравнения на рис. 1 линией с маркерами приведена характеристика НДС описывающая поведение пластины с действительным разрезом.

Можно отметить, что при выполнении итерационной процедуры координаты вершин разреза определены точно, местоположение скачков напряжений для действительного разреза и идентифицированного с использованием предложенного подхода практически совпадает. Сравнение характеристик НДС для пластины с действительным разрезом и идентифицированным в результате применения итерационной процедуры показывает, что отклонения в значениях напряжений не превышает 4%.

На рис. 2 представлены результаты идентификации вершин трещины на итерациях. На рис. 3 проведено сравнение результатов моделирования трещины в пластине, приводятся напряжения σ_{22} в пластине на линии разреза. Пунктирная кривая описывает поведение пластины, в которой трещина моделируется математическим разрезом (сплошность пластины нарушается), сплошная кривая соответствует модели, где трещина описывается линией с заданными значениями скачков перемещений на сплошной пластине.

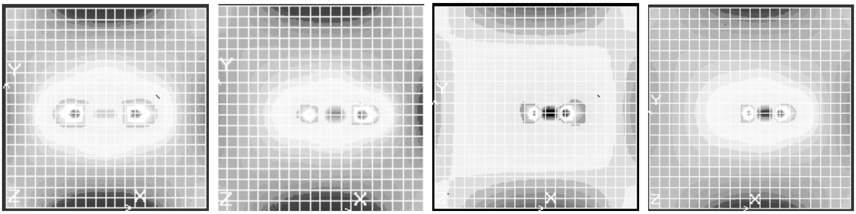

Рис. 2 **– Реализация итерационного процесса идентификации трещины: а) – начальное приближение; б) – 1 итерация; в) – 3 итерация; г) – результат идентификации**

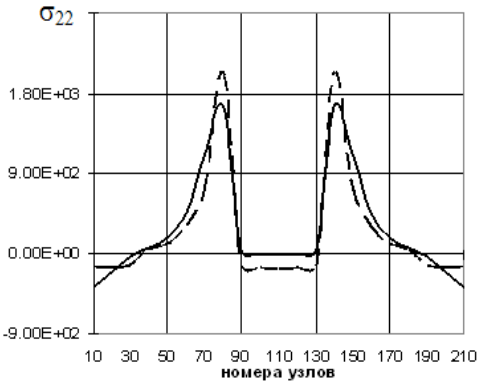

Рис. 3 **– Сравнение результатов моделирования трещины:**
—— – математическим разрезом;
- - - - – заданием скачков перемещений на линии разреза

В табл. 1 приводятся результаты восстановления координат вершин трещины на итерациях и соответствующие значения $\min \Delta_q$.

Таблица 1. Результаты восстановления координат вершин разреза

№ итерации	Координаты вершин		$\min \Delta_q$
	A	B	
Начальное приближение	$(0.4, 0.45)$	$(0.75, 0.45)$	0.437
1	$(0.4, 0.45)$	$(0.7, 0.45)$	0.326
2	$(0.45, 0.45)$	$(0.7, 0.45)$	0.294
3	$(0.5, 0.45)$	$(0.7, 0.45)$	0.078
4	$(0.5, 0.45)$	$(0.65, 0.45)$	0.016

Можно отметить, что значения напряжений σ_{22} на берегах разреза, полученные в результате конечно-элементного расчета, для первой модели отличны от нуля. Такое несоответствие картины НДС, полученной с использованием МКЭ, реальному поведению пластины с разрезом не удалось устранить с использованием процедур сгущения сетки в вершинах и на линии разреза.

Однако применение предложенной методики моделирования, когда разрез заменяется линией с заданными значениями скачков перемещений, является весьма эффективным, статические условия на линии разреза выполняются.

Скорость сходимости итерационного процесса иллюстрируется зависимостью на рис. 4, из анализа рисунка видно, что значения $\min \Delta_q$ на итерациях быстро уменьшаются. Анализ проведенных расчетов показал, что выбор начального приближения существенно влияет на сходимость и скорость сходимости предложенного алгоритма.

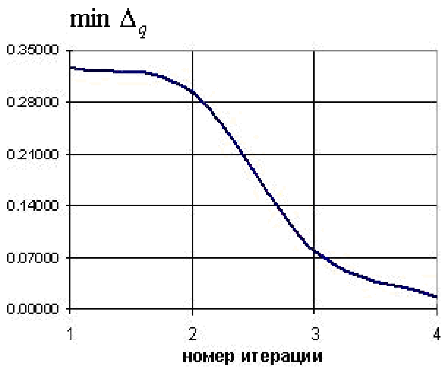

Рис. 4 **– Сходимость итерационного процесса**

Выводы. Разработан подход к идентификации трещин в тонкостенной пластине, основанный на теории обратных задач и методах условной оптимизации. Предложен способ описания дефекта в виде трещины; функционал прямой задачи дополнен ограничениями на решение с использованием множителей Лагранжа. Разработан алгоритм, позволяющий в итерационном процессе идентифицировать местоположение вершин трещины. Анализ результатов вычислительного эксперимента показал, что с использованием предложенного подхода возможно выявление дефектов в виде трещины в тонкостенной системе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. ***Ватульян А. О.*** О восстановлении формы полости в ортотропной упругой полуплоскости по заданному на границе волновому полю / А. О. Ватульян, И. А. Гусева // Прикладная математика и механика. – 1993. – № 4. – С.149–152.

2. ***Ватульян А. О.*** Обратные задачи теории трещин в твердых телах / А. О. Ватульян, А. Н. Соловьев // Изв. вузов Северо-Кавказский Регион. Спец. выпуск «Математика и механика сплошной среды». – 2004. – С. 74–80.

3. ***Вопилкин А. Х.*** Волны дифракции и их применение в ультразвуковом неразрушающем контроле. Физические закономерности волн дифракции / А. Х. Вопилкин // Дефектоскопия. – 1985. – № 1. – С.20–34.

4. ***Гук Н. А.*** Нелинейное деформирование сжато-изогнутой пластины с разрезом / Н. А. Гук, Н. И. Степанова // Вісник Запорізького нац. ун-ту. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2016. – № 2. – С. 89–102.

5. ***Киселева Е. М.*** Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: / Е. М. Киселева, Н. З. Шор. – К.: Наукова думка, 2005. – 564 с.

6. ***Осадчук В. А.*** Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесий оболочек с разрезами / В. А. Осадчук. – К.: Наукова думка,1985. – 221 с.

7. ***Партон В. З.*** Динамика хрупкого разрушения / В. З. Партон, В. Г. Борисковский. – М.: Машиностроение, 1988. – 239 с.

8. ***Ройтман А. Б.*** Использование акустического сигнала для диагностики поперечной трещины в консольном образце / А. Б. Ройтман // Акустический журнал. – 2000. – Т.46, №5. – С.685–689.

9. ***Сергиенко И. В.*** Приближенные методы решения дискретных задач оптимизации / И. В.Сергиенко, Т. Т. Лебедева, В. А. Рощин. — К.: Наукова думка, 1980. – 76 с.

10. ***Тихонов А. Н.*** Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении / А. Н. Тихонов, В. Д. Кальнер, В. Б. Гласко. – М.: Машиностроение, 1990. – 263 с.

11. ***Шифрин Е. И.*** Об асимптотике упругих перемещений вблизи контура плоской трещины, расположенной на границе соединения двух материалов / Е. И. Шифрин // Ин-т пробл. мех. РАН. препр. – 2000. – № 666. – С. 1–18.

12. ***Glagwell G. M. L.*** Inverse vibration problems for fmite-element models / G. M. L. Glagwell // Inverse Problems. – 1997. – Vol.13. – P. 311–322.

УДК 539.3

Н. А. Гук, д-р фіз.-мат. наук, Н. І. Степанова

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ТРІЩИН В ТОНКИХ ПЛАСТИНАХ

Розглядається задача ідентифікації тріщин в тонких пластинах за результатами непрямих спостережень. Для визначення параметрів (вершин) тріщин використовуються результати вимірювань поля нормальних переміщень тіла. Модель пластини з тріщиною формулюється в варіаційній постановці, яку отримано на основі мінімізації функціоналу енергії. Умови на берегах тріщини задаються як умови на лінії, що імітує розріз на суцільній тонкостінній конструкції. Для дискретизації задачі використовується метод кінцевих елементів.

Ключові слова: *тонка пластина, обернена задача, тріщина, ідентифікація, метод кінцевих елементів, множники Лагранжа.*

UDC 539.3

N. A. Guk, Dr. Sci. (Phis.-Math.), N. I. Stepanova

IDENTIFICATION OF CRACKS IN THIN PLATES

The problem of identification of cracks in thin plates is considered by the results of indirect observations. The results of measurements of the field of normal body movements are used to determine the parameters (vertices) of cracks. The plate model with a crack is formulated in the variational formulation. It was obtained as a result of minimization of the energy functional. Conditions on the shores of the crack are given as conditions on a line simulating a section in a continuous thin-walled structure. To discretization the task the finite element method is used.

Keywords: *thin plate, inverse problem, crack, identification, finite element method, the Lagrangian.*

The problems of determining the location of defects in bodies are found in geophysics, medicine, seismic, aviation and construction industries. From the point of view of the mechanics of fracture the most dangerous are defects in the form of cracks, since under the action of loads at the tops of cracks, stress concentration is observed, which can lead to structural failure. Therefore the development of effective models and methods for identifying cracks is a very urgent task.

The article proposes an approach based on the theory of inverse problems and methods of conditional optimization, which provides the location of a defect in the form of a crack.

We consider a thin-walled plate, which occupies a finite simply connected domain $G=\left\{X\middle|X=(x,y,z)\in R^3, 0\le x\le a; 0\le y\le b; -h\le z\le h\right\}$ with boundary Γ. The plate is under the influence of a normal distributed load q and longitudinal load N. The edges of the plate, which are not subjected to longitudinal loading, are rigidly clamped.

There is a crack in the plate. It is necessary to determine the location and geometric parameters of a given defect from the results of measuring the values of normal displacements $w(X,H)=\{w\}$ at a finite number of observation points X_p on the body surface

$$w(X_p,H)=\tilde{w}^*\left(X_p\right),\ p=\overline{1,P},$$

here $\tilde{w}^*\left(X_p\right)$ denotes the measured values of the displacements at the observation points X_p.

This problem has reduced to the problem of identifying the parameters of the plate deformation model that described by the corresponding boundary value problem, namely, the coordinates of the points at which the crack apexes are located.

The identification problem has formulated as the inverse problem in the variational formulation. As unknowns of the inverse problem, there is a vector $H(X)=\{X_k\}$. The vector's components are the coordinates of the vertices of the crack. Then the inverse problem reduces to the problem of minimizing the functional $W(H)$. The functional $W(H)$ characterizes the mean square deviation between the measured values of normal displacements $\tilde{w}^*$ and the calculated

$$H(X) = \arg \min_{H \in \underline{H}} W(H), \; H \in \overline{H},$$

$$W(H) = \sum_p \left(w(X_p, H) - \tilde{w}^*(X_p) \right)^2, \; H \in \overline{H},$$

here $\overline{H}$ is the domain of definition of the unknown function of the inverse problem.

The deformed state of the plate is described by the displacement vector function

$$U(X) = \{ u(X), v(X), w(X), \theta_i(X) \},$$

where $u(X), v(X), w(X)$ – displacements in the directions x_1, x_2, z; $\theta_i(X)$ – angles of rotation, $\theta_i(X) = w,_{x_i}(X)$; $i = 1,2$.

The variational formulation of the direct problem of deformation of a plate with a cut under the action of a distributed load at a known location of the cut boundary Γ_p has the form

$$U = \arg \min_U J(U), \; U \in \overline{U}.$$

The functional of the total energy of the «plate-external forces» system is represented in the form

$$J(U) = J_0 + \overline{J}.$$

The potential strain energy of the plate can be written as follows

$$J_0 = \frac{1}{2(1-\mu^2)} \iint_\Omega \left[\varepsilon_{11}^2 + 2\mu\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2 + \frac{1}{2}(1-\mu)\varepsilon_{12}^2 \right] +$$

$$+ \alpha^2 \left[\chi_{11}^2 + 2\mu\chi_{11}\chi_{22} + \chi_{22}^2 + 2(1-\mu)\chi_{12}^2 \right] d\xi_1 d\xi_2,$$

the potential of external forces is written as follows

$$\overline{J} = \iint_\Omega qw \, d\xi_1 d\xi_2 - \int_\Gamma \left(M_{11}^* \left(w,_{\xi_1} \right),_{\xi_1} + Q_{11}^* w + T_{11}^* u + T_{12}^* v \right) d\Gamma,$$

here ε_{ij} – deformation of the middle surface, χ_{ij} – components of bending deformation and torsion, q – load, $\Gamma = \Gamma_o \cup \Gamma_p$.

The condition $\delta J = 0$ is followed by nonlinear equilibrium equations for the plate in the displacement functions.

If the conditions on the boundaries of the plate are added to the functional $J(U)$ by Lagrange multipliers and take into account the continuity of the forces, moments and shearing forces inside the domain and at the boundaries of the cut, then the corresponding functional will contain boundary terms of the form:

for $\xi_2 = const$

$$J^1_{\Gamma_p} = \int\limits_{\substack{a_1 \\ (\xi_2=const)}}^{a_2} \left(T_{22} U^{(2)}_{\Gamma_p} + T_{12} U^{(1)}_{\Gamma_p} + M_{22} U^{(3)}_{\Gamma_p} + Q_{22} U^{(4)}_{\Gamma_p} \right) d\xi_2 ,$$

for $\xi_1 = const$

$$J^2_{\Gamma_p} = \int\limits_{\substack{b_1 \\ (\xi_1=const)}}^{b_2} \left(T_{11} U^{(1)}_{\Gamma_p} + T_{12} U^{(2)}_{\Gamma_p} + M_{11} U^{(3)}_{\Gamma_p} + Q_{11} U^{(4)}_{\Gamma_p} \right) d\xi_1 .$$

To solve problem a transition to a discrete plate model is performed using the finite element method. Unknown functions of the direct and inverse problem are represented in a parametric form for determining the stress-strain state of the structure. Using the introduced discretization the unknown functions of the task on the element are given for the local coordinate system by means of finite element approximation through nodal values.

After integration, we obtain a system of non-linear resolving relationships for determining nodal displacements, taking into account the boundary conditions in the form

$$A(U) = F ,$$

here $A(U)$ – system of nonlinear algebraic equations with respect to

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_\Omega \\ U_{\Gamma_p} \end{Bmatrix} ,$$

U_Ω – unknown nodal displacements within the region Ω and at the boundary Γ; U_{Γ_P} – unknown jumps of displacements on the cutting line. F – vector of nodal values of functions of right-hand sides.

The solution of this system of equations makes it possible to determine the nodal displacements inside the region Ω and on the boundary Γ, and also the corresponding values of the discontinuities U_{Γ_p} for a fixed vector $H^* = \left\{ \overset{*}{x}_{1K_1}, \overset{*}{x}_{2K_1}, \overset{*}{x}_{1K_2}, \overset{*}{x}_{2K_2} \right\}$.

We can write down the problem under consideration taking into account the introduced discretization in the form:

$$H(X_{K_1}, X_{K_2}) = \arg\min_{H \in \underline{H}} W(H), \; H \in \overline{H},$$

here $W(H) = \left(w_p(H) - \tilde{w}_p^*\right)^T \left(w_p(H) - \tilde{w}_p^*\right), \; p = \overline{1, P}$.

Let H' be some admissible solution of the inverse problem. We define M_r a neighborhood of a point H' with radius r as a set of possible solutions H_q, $q = \overline{1, 8}$, so that $\rho\left(H', H_q\right) \le r$, r is the length of the diagonal of the finite element.

In the vicinity of a point M_r, the vector of the function's decay $W(H)$ is the vector whose components are $\Delta_q = \Delta\left(H', H_q\right)$, where H_q, $q = \overline{1, 8}$ are the various solutions of the problems that belong to the neighborhood M_r. If $\Delta_q = \Delta\left(H', H_q\right) \ge 0$, then the point H' is a local minimum point, i.e.

$$W(H') = \min_{H_r} W\left(H', H_q\right), \; H_r \in M_r.$$

If any components of the recession vector $W(H_q)$ take negative values, then they determine the direction of further movement.

To perform numerical calculations, the solution of direct problems was performed using an application package that implements the finite element method.

An analysis of the calculations showed that the choice of the initial approximation significantly affects the convergence and rate of convergence of the proposed algorithm.

REFERENCES

2. ***Vatulyan A. O.*** On the restoration of the shape of the cavity in the orthotropic elastic half-plane according to the given wave field / A. O. Vatulyan, I. A. Guseva // Applied Mathematics and Mechanics. – 1993. – No 4. – P. 149–152. (in Russian).

3. ***Vatulyan A. O.*** Inverse problems of the theory of cracks in solids / A. O. Vatulyan, A. N. Soloviev // Izv. North Caucasus Region. Specialist. Issue «Mathematics and mechanics of continuum». – 2004. – P. 74–80. (in Russian).

4. ***Vopilkin A.*** Diffraction waves and their application in ultrasonic nondestructive testing. I. Physical regularities of diffraction waves/ A. Vopilkin // Defectoscopy. – 1985. – No 1. – P. 20–34. (in Russian).

12. ***Guk N. A.*** Nonlinear deformation of a squeezed–curved plate with a cut / N. A. Guk, N. I. Stepanova // News of the Zaporizhzhya National University. Ser .: «Physics and mathematics». – 2016. – No 2. – P. 89–102. (in Russian).

8. ***Kiseleva E. M.*** Continuous problems of optimal partitioning of sets: theory, algorithms, applications: / E. M. Kiseleva, N. Z. Shore. – Kiev: Naukova dumka, 2005. – 564 p. (in Russian).

6. ***Osadchuk V. A.*** Stress–strain state and limiting equilibria of shells with cuts / V. A. Osadchuk. – Kiev: Naukova Dumka, 1985. – 221 p. (in Russian).

10. ***Parton V. Z.*** Dynamics of brittle fracture / V. Z. Parton, V. G. Borisovskiy. – Moscow: Mechanical Engineering, 1988. – 239 p. (in Russian).

1. ***Roitman A. B.*** Using an acoustic signal to diagnose a transverse crack in a cantilever specimen / A. B. Roitman // Acoustic journal. – 2000. – Vol. 46. – No 5. – P.685–689. (in Russian).

11. ***Sergienko I. V.*** Approximate methods for solving discrete optimization problems / I. V. Sergienko, T. T. Lebedeva, V. A. Roshchin. – Kiev: Naukova Dumka, 1980. – 276 p. (in Russian).

9. ***Tikhonov A. N.*** Mathematical modeling of technological processes and the method of inverse problems in mechanical engineering / A. N. Tikhonov, V. D. Kalner, V. B. Glasco. – Moscow: Mechanical Engineering, 1990. – 263 p. (in Russian).

7. ***Shifrin E. I.*** On the asymptotics of elastic displacements near the contour of a plane crack located at the interface of a combination of two materials / E. I. Shifrin // Institute for problems in mechanics. The Russ. Acad. of Sciences. Pref. – 2000. – No 666. – P. 1 – 18. (in Russian).

5. ***Glagwell G. M. L.*** Inverse vibration problems for finite–element models / G. M. L. Glagwell // Inverse Problems. – 1997. – Vol.13. – P. 311–322.

Днепропетровский национальный
университет им. Олеся Гончара,
Днепр, Украина

Поступила в редколлегию 1.03.2017