ISSN 2079-1836
2017, вип. 27

УДК 533.6.013.42

[1]*Ю. Н. Кононов, д-р физ.-мат. наук,*
[2]*В. П. Шевченко, академик НАН Украины, д-р физ.-мат. наук*

КОЛЕБАНИЯ НЕОГРАНИЧЕННОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ, РАЗДЕЛЕННОЙ УПРУГИМИ ПЛАСТИНАМИ

Рассмотрена задача о колебании неограниченной многослойной тяжелой идеальной несжимаемой жидкости, горизонтально разделенной упругими изотропными пластинами в линейной постановке. Получено аналитическое решение задачи для произвольного числа слоев жидкости. Рассмотрены различные предельные случаи вырождения пластин в мембраны, в абсолютно жесткие, их отсутствие, а также большие глубины жидкостей. Для случая одинаковых пластин, плотностей и глубин жидкостей найдено простое аналитическое решение рассматриваемой задачи. Подробно исследованы случаи одно-, двух- и трехслойных жидкостей.

Ключевые слова: *гидроупругость, неограниченная многослойная идеальная несжимаемая жидкость, неограниченные пластины.*

Введение. В настоящее время проводятся достаточно интенсивные исследования поведения ледяного покрова и плавающей на поверхности жидкости упругой пластины для их использования при создании долгосрочных метеостанций, аэродромов, космодромов, искусственных островов, плавающих платформ различного назначения и др. [3–5, 7–9].

В данной статье продолжены исследования, начатые в [1, 2, 6] для случая неограниченной многослойной тяжелой идеальной несжимаемой жидкости, разделенной упругими пластинами. Предполагается, что пластины (мембраны) могут находиться на свободной поверхности или внутренних поверхностях неограниченной многослойной идеальной жидкости. Полученные аналитические решения могут быть использованы, например, в задаче о поведении ледового покрова или плавающей пластины в случае их сжатия или растяжения (однослойная жидкость), при оценке влияния стратификации жидкости на колебания пластины (многослойная жидкость), а также во многих технологических процессах, где находят применение многослойные пластинчатые гидроупругие конструкции с величиной слоев, значительно меньших основного характерного размера.

Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему, состоящую из m несмешивающихся тяжелых жидкостей с плотностями ρ_i и глубинами h_i $(i=\overline{1,m})$. На свободной поверхности верхней жидкости

$(i=1)$ и на поверхностях раздела (внутренних поверхностях) многослойной идеальной несжимаемой жидкости могут находиться упругие мембраны или пластины с растягивающими усилиями T_i в срединной поверхности (отсчет будем вести сверху вниз). Пластины считаются изотропными и обладают изгибной жесткостью D_i. В дальнейшем при $D_i = 0$ под пластиной будем подразумевать мембрану с растягивающим усилием T_i. Движения жидкости и пластинок будем рассматривать в системе координат $Oxyz$, расположенной так, что плоскость Oxy находится на плоской невозмущенной срединной поверхности первой пластины $(i=1)$, а ось Oz направлена противоположно вектору ускорения силы тяжести $\vec{g}$. Задачу будем рассматривать в рамках линейной теории, полагая совместные колебания пластин и жидкости безотрывными, т.е. без кавитации, а движения жидкостей – потенциальными.

Уравнения колебаний упругих пластин и многослойной идеальной жидкости имеют вид [1, 2, 6]

$$k_{0i}\frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2} + D_i\Delta_2^2 W_i - T_i\Delta_2 W_i = P_i - P_{i-1} \text{ при } z = -H_i,\ (i=\overline{1,m}); \tag{1}$$

$$\Delta\Phi_i = 0,\ (i=\overline{1,m}) \tag{2}$$

с граничными условиями:

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \text{ при } z = -H_i,\ (i=\overline{1,m}); \tag{3}$$

$$\frac{\partial \Phi_{i-1}}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \text{ при } z = -H_i,\ (i=\overline{2,m}); \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial \Phi_m}{\partial z}\right|_{z=-H_{m+1}} = 0. \tag{5}$$

Здесь $k_{0i} = \rho_{0\mathrm{i}}\cdot\delta_{0i}$; $W_i(x,y,t)$, ρ_{0i}, δ_{0i} – соответственно нормальный прогиб, плотность и толщина i-й пластины; Δ_2 и Δ – соответственно двумерный и трехмерный операторы Лапласа; $\Phi_i(x,\mathrm{y},z,t)$ – потенциал скоростей i-й жидкости $(i=\overline{1,m})$; $P_i(x,\mathrm{y},z,t)$ – гидродинамическое давление в i-й жидкости, а $P_0(x,\mathrm{y},\mathrm{z},t)$ – давление над верхней пластиной; $H_i = \sum_{k=1}^{i-1} h_k$ $(H_1 = 0)$.

Кроме удовлетворения граничных условиями (3)–(5) функции $\Phi_i\left(x, \mathrm{y}, z, t\right)$ и $W_i\left(x, y, t\right)$ должны вместе со своими частными производными соответственно до второго и четвертого порядков включительно убывать на бесконечности.

Давление $P_i(x, z, t)$ находится из интеграла Коши – Лагранжа $\dfrac{\partial \Phi_i}{\partial t} + gz + \dfrac{P_i}{\rho_i} = Q_i$, где Q_i – произвольные функции времени. Из-за непроницаемости дна (5), не ограничивая общности, эти функции можно положить равными нулю. В противном случае эти функции подлежат определению.

С учетом интеграла Коши – Лагранжа уравнение (1) можно записать следующим образом

$$k_{0i} \frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2} + D_i \Delta_2^2 W_i - T_i \Delta_2 W_i + g \Delta\rho_i W_i =$$

$$= \rho_{i-1} \frac{\partial \Phi_{i-1}}{\partial t} - \rho_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \quad \text{при} \quad z = -H_i, \ (i = \overline{1, m}), \tag{6}$$

где $\Delta\rho_i = \rho_i - \rho_{i-1} \quad \left(\rho_0 = 0\right)$.

Применяя к (6), (2) и граничным условиям (3)–(5) двумерное интегральное преобразование Фурье, получим

$$k_{0i} \frac{\partial^2 \overline{W}_i}{\partial t^2} + \left[\lambda^2 \left(\lambda^2 D_i + T_i\right) + g \Delta\rho_i\right] \overline{W}_i =$$

$$= \rho_{i-1} \frac{\partial \overline{\Phi}_{i-1}}{\partial t} - \rho_i \frac{\partial \overline{\Phi}_i}{\partial t} \quad \text{при} \quad z = -H_i, \ (i = \overline{1, m}); \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 \overline{\Phi}_i}{\partial z^2} - \lambda^2 \overline{\Phi}_i = 0, \quad (i = \overline{1, m}); \tag{8}$$

$$\frac{\partial \overline{W}_i}{\partial t} = \frac{\partial \overline{\Phi}_i}{\partial z} \quad \text{при} \quad z = -H_i, \ (i = \overline{1, m}); \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial \overline{\Phi}_m}{\partial z}\right|_{z = -H_{m+1}} = 0. \tag{10}$$

Здесь $\overline{\Phi}_i\left(\xi, \eta, z, t\right)$ и $\overline{W}_i\left(\xi, \eta, t\right)$ трансформанты Фурье функций $\Phi_i\left(x, y, z, t\right)$ и $W_i\left(x, y, t\right)$; $\lambda = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$.

Представим функции $\bar{\Phi}_i(\xi,\eta,z,t)$ в виде

$$\bar{\Phi}_i = A_i(\xi,\eta,t)\mathrm{e}^{\lambda z} + B_i(\xi,\eta,t)\mathrm{e}^{-\lambda z} \quad (i=\overline{1,m}) . \tag{11}$$

Подставив (11) в (8)–(10), получим систему линейных уравнений относительно неизвестных A_i, B_i и $\dot{\bar{W}}_i$:

$$\begin{gathered}
\lambda\left(A_i\,\mathrm{e}^{-\lambda H_i} - B_i\,\mathrm{e}^{\lambda H_i}\right) = \dot{\bar{W}}_i \quad (i=\overline{1,m}) ; \\
\left(A_i - A_{i-1}\right)\mathrm{e}^{-\lambda H_i} = \left(B_i - B_{i-1}\right)\mathrm{e}^{\lambda H_i} \quad (i=\overline{2,m}) ; \\
A_m\,\mathrm{e}^{-\lambda H_{m+1}} - B_m\,\mathrm{e}^{\lambda H_{m+1}} = 0 .
\end{gathered} \tag{12}$$

Разрешим систему уравнений (12) относительно A_i и B_i:

$$A_i = \frac{\mathrm{e}^{\lambda H_i}}{2\lambda\,\mathrm{sh}\,\kappa_i}\left(\mathrm{e}^{\kappa_i}\,\dot{\bar{W}}_i - \dot{\bar{W}}_{i+1}\right); \; B_i = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda H_i}}{2\lambda\,\mathrm{sh}\,\kappa_i}\left(\mathrm{e}^{-\kappa_i}\,\dot{\bar{W}}_i - \dot{\bar{W}}_{i+1}\right)\left(i=\overline{1,m}; \bar{W}_{m+1}=0\right), \tag{13}$$

где $\kappa_i = \lambda h_i$.

Из формул (11) и (13) следует, что затухание поверхностных возмущений с удалением от пластин вглубь жидкости носят экспоненциальный характер.

Подставив (13) в (7), получим систему дифференциальных уравнений относительно $\bar{W}_i$,

$$\ddot{\bar{W}}_i + \tilde{\omega}_i^2 \bar{W}_i - \frac{1}{\tilde{a}_i}\left(b_{i-1}\ddot{\bar{W}}_{i-1} + b_i \ddot{\bar{W}}_{i+1}\right) = 0 \quad (i=\overline{1,m};\ \bar{W}_{m+1} \equiv 0) , \tag{14}$$

где $\tilde{\omega}_i^2 = \dfrac{1+\dfrac{\lambda^2\left(\lambda^2 D_i + T_i\right)}{g\Delta\rho_i}}{1+\dfrac{\lambda k_{0i}}{a_i}}\omega_i^2$, $\omega_i^2 = \dfrac{g\lambda\Delta\rho_i}{a_i}$, $b_i = \dfrac{\rho_i}{\cosh\kappa_i}$, $\tilde{a}_i = a_i + \lambda k_{0i}$,

$$a_i = \rho_{i-1}\,\mathrm{cth}\,\kappa_{i-1} + \rho_i\,\mathrm{cth}\,\kappa_i\,,\ \kappa_i = \lambda h_i \ , \tag{15}$$

$\omega_i^2 = g\lambda\Delta\rho_i / a_i$ – частота колебаний свободной поверхности ζ_i $(i=1)$ и внутренней поверхности ζ_i $(i \neq 1)$ при $\zeta_{i-1} = \zeta_{i+1} \equiv 0$, т.е. при замене $i-1$ и $i+1$ внутренних поверхностей абсолютно твердыми поверхностями.

Если i -я пластина вырождается в мембрану, то в соотношениях (15) необходимо положить $D_i = 0$, а если она отсутствует, то необходимо положить $D_i = 0$, $T_i = 0$, $\rho_{0i} = 0$.

Следует отметить, что структура системы m дифференциальных уравнений (14) определяется тем, что колебания i -й пластины зависят только от колебаний $i-1$ и $i+1$ пластин и совпадает со структурой уравнений для неограниченной многослойной жидкости [2].

При отсутствии пластин (мембран) уравнения (14) совпадают с уравнениями [2].

Представив $\bar{W}_i$ в виде $\bar{W}_{i0}\,\mathrm{e}^{i\sigma t}$, получим уравнение собственных частот колебаний тяжелой неограниченной многослойной идеальной жидкости, разделенной упругими пластинами

$$\left|D_{1m}\right| = \begin{vmatrix} a_1^* & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & a_2^* & b_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{m-2} & a_{m-1}^* & b_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{m-1} & a_m^* \end{vmatrix} = 0 . \qquad (16)$$

Здесь $a_i^* = \left(\tilde{\omega}_i^2 - \sigma^2\right) \Big/ \sigma^2 \cdot \tilde{a}_i$.

В случае абсолютно жесткой верхней пластины ($W_1 \equiv 0$) в матрице D_{1m} следует вычеркнуть первую строку и первый столбец и в этом случае уравнение (16) примет вид

$$\left|D_{2m}\right| = 0 . \qquad (17)$$

Матрицы D_{1m} и D_{2m} являются трехдиагональными симметричными матрицами.

Так, например, для двухслойной жидкости ($m = 2$), разделенной упругой пластиной, частотное уравнение (17) имеет решение

$$\sigma^2 = \tilde{\omega}_2^2 = \lambda\left[g\Delta\rho + \lambda^2\left(\lambda^2 D_2 + T_2\right)\right] \Big/ \tilde{a}_2 ,$$

где $\tilde{a}_2 = \rho_2 \operatorname{cth}\kappa_1 + \rho_1 \operatorname{cth}\kappa_2 + \lambda k_{02}$, $\Delta\rho = \Delta\rho_2 = \rho_2 - \rho_1$.

Если i -я пластина становится абсолютно жесткой ($W_i \equiv 0$), то уравнение (16) распадается на два уравнения

$$\left|D_{1i}\right| = 0 \quad \text{и} \quad \left|D_{i+1,m}\right| = 0 . \qquad (18)$$

Аналогичная ситуация возникает, если i-й слой жидкости $(i \neq m)$ является бесконечно большим ($h_i = \infty$, $b_i = 0$), то уравнение (16) вновь распадается на два уравнения (18). Первое уравнение описывает собственные колебания i-слойной жидкости с жестким i-й дном ($W_i \equiv 0$), а второе – $m-i$-слойной жидкости с жесткой пластиной на $i+1$ внутренней поверхности ($W_{i+1} \equiv 0$). Таким образом, бесконечно большой слой i-й жидкости эквивалентен жесткому дну для i-го слоя и жесткой пластине на $i+1$ слоя жидкости. Так, например, для $m=3$ при $h_1 = \infty$ ($b_1 = 0$) уравнения (18) имеют вид

$$a_1^* = 0 \left(\sigma^2 = \tilde{\omega}_1^2 = \frac{\lambda\left[g\rho_1 + \lambda^2 \left(\lambda^2 D_1 + T_1 \right) \right]}{\rho_1 + \lambda k_{01}} \right) \text{ и } \begin{vmatrix} a_2^* & b_2 \\ b_2 & a_3^* \end{vmatrix} = 0,$$

а при $h_2 = \infty$ ($b_2 = 0$) –

$$\begin{vmatrix} a_1^* & b_1 \\ b_1 & a_1^* \end{vmatrix} = 0 \text{ и } a_3^* = 0 \left(\sigma^2 = \tilde{\omega}_3^2 = \frac{\lambda\left[g\left(\rho_3 - \rho_2\right) + \lambda^2 \left(\lambda^2 D_3 + T_3 \right) \right]}{\rho_2 + \rho_3 \operatorname{cth} \kappa_3 + \lambda k_{03}} \right).$$

При $h_1 = \infty$ или при $h_{m-1} = \infty$ в частотный спектр уравнений (18) будут входить соответственно частоты

$$\sigma^2 = \tilde{\omega}_1^2 = \frac{\lambda\left[g\rho_1 + \lambda^2 \left(\lambda^2 D_1 + T_1 \right) \right]}{\rho_1 + \lambda k_{01}}$$

или

$$\sigma^2 = \tilde{\omega}_m^2 = \frac{\lambda\left[g\left(\rho_m - \rho_{m-1}\right) + \lambda^2 \left(\lambda^2 D_m + T_m \right) \right]}{\rho_{m-1} + \rho_m \operatorname{cth} \kappa_m + \lambda k_{0m}}.$$

Если же все $h_i = \infty$, то частотное уравнение (16) будет иметь решение

$$\sigma^2 = \tilde{\omega}_i^2 = \frac{\lambda\left[g\Delta\rho_i + \lambda^2 \left(\lambda^2 D_i + T_i \right) \right]}{\rho_i + \rho_{i-1} + \lambda k_{0i}}.$$

Легко заметить, что определитель уравнения (16) $|D_{1m}| = d_m$ можно вычислять по рекуррентной формуле

$$d_m = a_m^* d_{m-1} - b_{m-1}^2 d_{m-2} \quad (m > 2). \tag{19}$$

Если коэффициенты рекуррентного уравнения (19) не зависят от m ($a_m^* = a$ и $b_{m-1}^2 = -q$), то это уравнение имеет решение [8]

$$d_m = C_1 \alpha^m + C_2 \beta^m . \tag{20}$$

Здесь $C_1 = \dfrac{d_2 - \beta d_1}{\alpha(\alpha - \beta)}$, $C_2 = \dfrac{d_2 - \alpha d_1}{\beta(\alpha - \beta)}$ ($\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, т.к. $q \neq 0$ и $\alpha \neq \beta$),

$$\alpha = \frac{a}{2} + \sqrt{D}, \quad \beta = \frac{a}{2} - \sqrt{D}, \quad D = \frac{a^2}{4} + q .$$

Вначале рассмотрим уравнение (17). Чтобы a_m^* и b_{m-1} не зависели от m , положим

$$D_2 = \ldots = D_m = D, \; T_2 = \ldots = T_m = T, \; \frac{k_{02}}{\rho_2} = \frac{k_{03}}{\rho_3} = \ldots = \frac{k_{0m}}{\rho_m} = k_0 ,$$

$$h_1 = h_2 = \ldots = h_m = h, \; \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\rho_2}{\rho_3} = \ldots = \frac{\rho_{m-1}}{\rho_m} = \tilde{\rho} \tag{21}$$

и перепишем (17) в виде определителя $m-1$ порядка.

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\rho} b & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \tilde{\rho} b & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{\rho} b & a \end{vmatrix} = 0, \tag{22}$$

где

$$a(x) = \frac{a_i^*}{\rho_i} = (x-1)\tilde{a}, \; \tilde{a} = \frac{\tilde{a}_i}{\rho_i} = (1+\tilde{\rho})\operatorname{cth}\kappa + \lambda k_0, \; x = \frac{\tilde{\omega}^2}{\sigma^2}, \; b = \frac{b_i}{\rho_i} = \frac{1}{\operatorname{sh}\kappa_n},$$

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{\tilde{\omega}_i^2}{\rho_i} = \frac{\lambda\left[g(1+\tilde{\rho}) + \lambda^2\left(\lambda^2 D + T\right)\right]}{\tilde{a}}, \; q = -\tilde{\rho} b^2, \; \kappa = \lambda h, \; (i = \overline{2,m}). \tag{23}$$

Уравнение (22), согласно (20), (21) и (23), имеет решение

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{m-3} = \frac{\left(a^2+q\right)\beta + aq}{\left(a^2+q\right)\alpha + aq}. \tag{24}$$

Для двухслойной жидкости ($m=2$) оно сводится к уравнению $a(x)=0$, которое определяет один набор частот

$$\sigma_1^2 = \tilde{\omega}^2 = \frac{\lambda\left[g(1+\tilde{\rho})+\lambda^2\left(\lambda^2 D+T\right)\right]}{\tilde{a}}. \quad .$$

Отметим, что при четном m уравнение (24) всегда содержит эту частоту.

Для трехслойной жидкости ($m=3$) (24) сводится к уравнению $a^2(x)+q=0$, которое дает два набора частот

$$\sigma_{1,2}^2 = \frac{\lambda\left[g(1+\tilde{\rho})+\lambda^2\left(\lambda^2 D+T\right)\right]}{\tilde{a}\pm\sqrt{\tilde{\rho}}b}.$$

Уравнение (16) с учетом (21) примет вид

$$\begin{vmatrix} a_1 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\rho}b & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \tilde{\rho}b & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{\rho}b & a \end{vmatrix} = 0 \qquad (25)$$

или

$$a_1 d_{m-1} + q d_{m-2} = 0 \quad (m>2). \qquad (26)$$

Здесь $a_1 = a_1^* / \rho_1$.

Так как $d_{m-1} = \dfrac{1}{\alpha-\beta}\left[\left(a^2+q-\beta a\right)\alpha^{m-2} - \left(a^2+q-\alpha a\right)^{m-2}\right]$, то решение (26) можно записать в виде, аналогичном (24)

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{m-3} = \frac{\left(a^2+q-\alpha a\right)\left(a_1\beta+q\right)}{\left(a^2+q-\beta a\right)\left(a_1\alpha+q\right)} \quad (m>2). \qquad (27)$$

Для однослойной жидкости ($m=1$) (25) приводится к уравнению $a_1=0$, которое дает один набор частот

$$\sigma_1^2 = \tilde{\omega}_1^2 = \frac{\lambda\left[g\rho_1+\lambda^2\left(\lambda^2 D_1+T_1\right)\right]}{\rho_1\coth\kappa+\lambda k_{01}},$$

а для двухслойной жидкости ($m=2$) – к уравнению $a_1 a - \tilde{\rho}b^2 = 0$, которое имеет два набора частот.

Для трехслойной жидкости ($m=3$) (27) сводится к уравнению $\left(a^2+q\right)a_1+aq=0$, которое определяет три набора частот.

Применяя обратное преобразование Фурье к найденным функциям $\bar{W}_i$, получаем решение поставленной задачи в виде

$$W_i\left(x,y,t\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\bar{W}_i\left(\xi,\eta,t\right)\mathrm{e}^{-i\left(\xi x+\eta y\right)}d\xi d\eta .$$

В случае совместных плоских колебаний пластин и жидкости вместо двумерного интегрального преобразования Фурье применяется одномерное, а в случае осесимметричных колебаний – интегральное преобразование Ханкеля нулевого порядка. Вид основных уравнений как в случае плоских, так и осесимметичных колебаний, полностью сохраняется.

Выводы. В линейной постановке рассмотрена задача о колебании неограниченной многослойной тяжелой идеальной несжимаемой жидкости, горизонтально разделенной упругими изотропными пластинами. Получено аналитическое решение задачи для произвольного числа слоев жидкости. Рассмотрены различные предельные случаи вырождения пластин в мембраны, в абсолютно жесткие, их отсутствие, большие глубины жидкостей. Для случая одинаковых пластин, плотностей и глубин жидкостей найдено простое аналитическое решение рассматриваемой задачи. Подробно исследованы случаи одно-, двух- и трехслойных жидкостей с упругими пластинами. Показано, что частотный спектр собственных колебаний тяжелой m-слойной идеальной жидкости, разделенной упругими пластинами, состоит из m наборов собственных частот, характеризующих совместные колебания пластин и жидкости.

В дальнейшем планируется рассмотреть влияние стратификации жидкости на колебания пластины, находящейся на свободной поверхности многослойной жидкости и влияние растягивающих и сжимающих усилий в пластинах на частотный спектр.

Исследования проведены в рамках программы фундаментальных исследований Министерства образования и науки Украины (проект № 0116U002522) и при грантовой поддержке ДФФД (проект № Ф71/47-2017).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. ***Кононов Ю. Н.*** Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими мембранами на «свободной» и внутренней поверхностях / Ю. Н. Кононов, Е. А. Татаренко // Акустичний вісник. – 2003. – Т. 6. – №4 . – С. 44–52.

2. ***Кононов Ю. Н.*** Свободные колебания неограниченной многослойной идеальной жидкости / Ю.Н. Кононов // Труды ИПММ НАН Украины. – 2006. – Вып. 13. – С. 121–125.

3. ***Стурова И. В.*** Воздействие периодических поверхностных давлений на плавающую упругую платформу / И. В. Стурова // Прикл. математика и механика. – 2002.– Т. 66. – Вып. 1. – С. 75–86.

4. ***Ткачева Л. А.*** Плоская задача о колебаниях плавающей упругой пластины под действием периодической внешней нагрузки / Л. А. Ткачева // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 2004.– Т. 45. – № 3. – С. 136–145.

5. ***Хейсин Д. Е.*** Динамика ледяного покрова / Д. Е. Хейсин. – Л.: Гидрометеоиздат, 1967.– 215 с.

6. ***Шевченко В. П.*** Об устойчивости упругих пластинок, разделяющих многослойную идеальную жидкость / В. П. Шевченко, Ю. Н. Кононов // Актуальные аспекты физико-механических исследований. Механика. – К.: Наук. думка. – 2007. –С. 348–361.

7. ***Duffy D. G.*** The response of floating ice on the generation of internal waves beneath sea ice by a moving load / D. G. Duffy // Cold Reg. Sci. Tech.– 1996.– Vol. 24.– P. 29-39.

8. ***Meylan M.*** The response of ice floes to ocean waves / M. Meylan, V. A. Squire // J. Geophys. Res. –1994. –Vol. 99. – No CI. – P. 891-900.

9. ***Parau E.*** Nonlinear effects in the respanse of a floating ice plate to a moving load / E. Parau, F. Dias // J. Fluid Mech. – 2001. – Vol. 437. – P. 325-336.

УДК 533.6.013.42

Ю. М. Кононов, д-р фіз.-мат. наук,
В. П. Шевченко, академік НАН України, д-р фіз.-мат. наук

КОЛИВАННЯ НЕОБМЕЖЕНОЇ БАГАТОШАРОВОЇ ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ, РОЗДІЛЕНОЇ ПРУЖНИМИ ПЛАСТИНАМИ

Розглянуто про коливання необмеженої багато-шарової важкої ідеальної нестисливої рідини, горизонтально розділеної пружними ізотропними пластинами в лінійній постановці задачу. Отримано аналітичний розв'язок задачі для довільного числа шарів рідини. Розглянуто різні граничні випадки виродження пластин в мембрани, в абсолютно жорсткі, їх відсутність, а також великі глибини рідин. Для випадку однакових пластин, щільності і глибин рідин знайдено простий аналітичний розв'язок даної задачі. Детально досліджені випадки одно-, двох- і тришарових рідин.

Ключові слова*: гідроупружність, необмежена багатошарова ідеальна нестисливої рідина, необмежені пластини.*

UDC 533.6.013.42

Yu. N. Kononov, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
V. P. Schevchenko, Academic of NAS Ukraine, Dr. Sci. (Phys.-Math.)

VIBRATIONS OF UNLIMITED MULTI-LAYER IDEAL LIQUID SEPARATED BY ELASTIC PLATES

A linear formulation of the problem of the vibration of an unbounded multi-layer heavy ideal incompressible fluid horizontally separated by elastic isotropic plates is considered. An analytical solution of the problem is obtained for an arbitrary number of fluid layers. Various limiting cases of plate degeneration into membranes, their absence, and large depths of liquids are considered. For the case of identical plates, densities and depths of liquids, a simple analytic solution of the problem is found. The cases of one, two, and three-layer liquids are investigated in detail.

Keywords: *hydroelasticity, unlimited multilayer ideal incompressible fluid, unlimited plates.*

At the present time, sufficiently intensive studies of the behavior of the ice cover and the elastic plate floating on the surface of the liquid are conducted in connection with their use to create long-term weather stations, aerodromes, cosmodromes, artificial islands, floating platforms for various purposes and many others [3–5, 7–9].

The investigations, that has begun in [1, 2, 6] for the case of an unbounded multilayer heavy ideal incompressible fluid separated by elastic plates, are continued in this paper. It is assumed that the plates (membranes) can be located on a free surface or internal surfaces of an unlimited multilayer ideal fluid. The obtained analytical solutions can be used, for example, in the problem of the behavior of ice cover or a floating plate in the case of their compression or stretching (single-layer liquid), in assessing the effect of liquid stratification on wafer vibrations (multilayer liquid), and also in many technological processes, where multi-layer lamellar hydroelastic constructions with a size of layers considerably smaller than the main characteristic size are used.

The equations of oscillations of elastic plates and multilayer ideal fluid have the form [1, 2, 6]:

$$k_{0i}\frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2}+D_i\Delta_2^2 W_i-T_i\Delta_2 W_i+g\Delta\rho_i W_i=$$

$$=\rho_{i-1}\frac{\partial \Phi_{i-1}}{\partial t}-\rho_i\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \quad \text{at} \quad z=-H_i,\ (i=\overline{1,m}); \tag{1}$$

$$\Delta\Phi_i=0,\ (i=\overline{1,m}) \tag{2}$$

with boundary conditions:

$$\frac{\partial W_i}{\partial t}=\frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \quad \text{at} \quad z=-H_i,\ (i=\overline{1,m});$$

$$\frac{\partial \Phi_{i-1}}{\partial z}=\frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \quad \text{at} \quad z=-H_i,\ (i=\overline{2,m}); \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial \Phi_m}{\partial z}\right|_{z=-H_{m+1}}=0.$$

Here $k_{0i}=\rho_{0\mathrm{i}}\cdot\delta_{0i}$, $H_i=\sum_{k=1}^{i-1}h_k\ \left(H_1=0\right)$, $\Delta\rho_i=\rho_i-\rho_{i-1}\quad\left(\rho_0=0\right)$.

We apply the two-dimensional integral Fourier transform to equations (1)–(2) and the boundary conditions (3)–(5). Representing the function $\bar{\Phi}_i\left(\xi,\eta,z,t\right)$ in the form $\bar{\Phi}_i=A_i\left(\xi,\eta,t\right)\mathrm{e}^{\lambda z}+B_i\left(\xi,\eta,t\right)\mathrm{e}^{-\lambda z}\quad(i=\overline{1,m})$ and solving the resulting system relative to $\bar{W}_i\left(\xi,\eta,t\right)$, we obtain:

$$\ddot{\bar{W}}_i + \tilde{\omega}_i^2 \bar{W}_i - \frac{1}{\tilde{a}_i}\left(b_{i-1}\ddot{\bar{W}}_{i-1} + b_i \ddot{\bar{W}}_{i+1}\right) = 0 \quad (i = \overline{1,m}), \tag{4}$$

where $\bar{\Phi}_i(\xi,\eta,z,t)$ and $\bar{W}_i(\xi,\eta,t)$ are the Fourier transforms of the functions $\Phi_i(x,y,z,t)$ and $W_i(x,y,t)$, $\lambda = \sqrt{\xi^2+\eta^2}$, $\tilde{\omega}_i^2 = \dfrac{\lambda\left[g\Delta\rho_i + \lambda^2\left(\lambda^2 D_i + T_i\right)\right]}{\tilde{a}_i}$, $b_i = \dfrac{\rho_i}{\cosh\kappa_i}$, $\tilde{a}_i = a_i + \lambda k_{0i}$, $a_i = \rho_{i-1}\operatorname{cth}\kappa_{i-1} + \rho_i \operatorname{cth}\kappa_i$, $\kappa_i = \lambda h_i$.

Representing $\bar{W}_i$ in the form $\bar{W}_{i0}\,\mathrm{e}^{i\sigma t}$, we obtain the equation of the natural frequencies of vibrations of heavy unlimited multilayer ideal fluid separated by elastic plates

$$\left|D_{1m}\right| = \begin{vmatrix} a_1^* & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & a_2^* & b_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{m-2} & a_{m-1}^* & b_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{m-1} & a_m^* \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

here $a_i^* = \dfrac{\tilde{\omega}_i^2 - \sigma^2}{\sigma^2}\tilde{a}_i$.

In the case of an absolutely rigid upper plate ($W_1 \equiv 0$) in the matrix, the first row and the first column should be deleted, and in this case the equation (5) takes the form

$$\left|D_{2m}\right| = 0. \tag{6}$$

The matrices D_{1m} and D_{2m} are linear three-diagonal symmetric matrices.

Thus, for example, for a two-layer liquid ($m = 2$) separated by an elastic plate, the frequency equation (6) has a solution

$$\sigma^2 = \tilde{\omega}_2^2 = \frac{\lambda\left[g\Delta\rho + \lambda^2\left(\lambda^2 D_2 + T_2\right)\right]}{\tilde{a}_2},$$

where $\tilde{a}_2 = \rho_2 \operatorname{cth}\kappa_1 + \rho_1 \operatorname{cth}\kappa_2 + \lambda k_{02}$, $\Delta\rho = \Delta\rho_2 = \rho_2 - \rho_1$.

If the *i*-th layer $(i \neq m)$ of the liquid is infinitely large ($h_i = \infty$, $b_i = 0$), then equation (5) splits into two equations

$$\left|D_{1i}\right| = 0 \quad \text{и} \quad \left|D_{i+1,m}\right| = 0 . \qquad (7)$$

At $h_1 = \infty$ or $h_{m-1} = \infty$ in the frequency spectrum of equations (7) enters the frequencies

$$\sigma^2 = \tilde{\omega}_1^2 = \frac{\lambda\left[g\rho_1 + \lambda^2\left(\lambda^2 D_1 + T_1\right)\right]}{\rho_1 + \lambda k_{01}}$$

or
$$\sigma^2 = \tilde{\omega}_m^2 = \frac{\lambda\left[g\left(\rho_m - \rho_{m-1}\right) + \lambda^2\left(\lambda^2 D_m + T_m\right)\right]}{\rho_{m-1} + \rho_m \operatorname{cth}\kappa_m + \lambda k_{0m}} .$$

If all $h_i = \infty$, then the frequency equation (7) will have a solution

$$\sigma^2 = \tilde{\omega}_i^2 = \frac{\lambda\left[g\Delta\rho_i + \lambda^2\left(\lambda^2 D_i + T_i\right)\right]}{\rho_i + \rho_{i-1} + \lambda k_{0i}} .$$

The determinant of equation (5) can be calculated from the recurrence formula

$$d_m = \overset{*}{a}_m d_{m-1} - b_{m-1}^2 d_{m-2} \quad (m > 2). \qquad (8)$$

If the coefficients of the recurrence equation (8) do not depend on m ($\overset{*}{a}_m = a$ and $b_{m-1}^2 = -q$), then this equation has a solution

$$d_m = C_1\alpha^m + C_2\beta^m . \qquad (9)$$

Here $C_1 = \frac{d_2 - \beta d_1}{\alpha\left(\alpha - \beta\right)}$, $C_2 = \frac{d_2 - \alpha d_1}{\beta\left(\alpha - \beta\right)}$ ($\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, since $q \neq 0$ and $\alpha \neq \beta$),

$$\alpha = \frac{a}{2} + \sqrt{D}, \quad \beta = \frac{a}{2} - \sqrt{D}, \quad D = \frac{a^2}{4} - q > 0 .$$

First we consider equation (6). In order that $\overset{*}{a}_m$ and b_{m-1} do not depend on m, we set $D_2 = \ldots = D_m = D$, $T_2 = \ldots = T_m = T$, $h_1 = h_2 = \ldots = h_m = h$,

$$\frac{k_{02}}{\rho_2}=\frac{k_{03}}{\rho_3}=\ldots=\frac{k_{0m}}{\rho_m}=k_0\,,\;\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{\rho_2}{\rho_3}=\ldots=\frac{\rho_{m-1}}{\rho_m}=\tilde{\rho}\,,$$

$$a(x)=\frac{\overset{*}{a_i}}{\rho_i}=(x-1)\tilde{a}\,,$$

$$x=\tilde{\omega}^2\big/\sigma^2\,,\qquad \tilde{\omega}^2=\tilde{\omega}_i^2\big/\rho_i=\lambda\Big[g\left(1+\tilde{\rho}\right)+\lambda^2\left(\lambda^2 D+T\right)\Big]\Big/\tilde{a}\,, \tag{10}$$

$$b=\frac{b_i}{\rho_i}=\frac{1}{\operatorname{sh}\kappa}\,,\;\tilde{a}=\frac{\tilde{a}_i}{\rho_i}=\left(1+\tilde{\rho}\right)\operatorname{cth}\kappa+\tilde{\rho}\lambda k_0\,,\;q=-\tilde{\rho}b^2\,,\kappa=\lambda h\,,$$

$$(i=\overline{2,m}).$$

Equation (8) according to (14), (15) has a solution

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{m-3}=\frac{\left(a^2+q\right)\beta+aq}{\left(a^2+q\right)\alpha+aq}. \tag{11}$$

For a two-layer liquid ($m=2$), it reduces to an equation $a(x)=0$ that defines one set of frequencies

$$\sigma_1^2=\tilde{\omega}^2=\frac{\lambda\Big[g\left(1+\tilde{\rho}\right)+\lambda^2\left(\lambda^2 D+T\right)\Big]}{\tilde{a}}.$$

It is interesting to note that for even m the equation (11) always holds this frequency.

For a three-layer liquid ($m=3$) equation (11) reduces to an equation $a^2(x)+q=0$ that gives two sets of frequencies

$$\sigma_{1,2}^2=\frac{\lambda\Big[g\left(1+\tilde{\rho}\right)+\lambda^2\left(\lambda^2 D+T\right)\Big]}{\tilde{a}\pm\sqrt{\tilde{\rho}}b}.$$

Equation (5), taking into account (8)–(10), takes the form

$$a_1 d_{m-1}+q d_{m-2}=0\,,\quad (m>2), \tag{12}$$

here $a_1=\overset{*}{a_1}\big/\rho_1$.

Since $d_{m-1}=\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\left(a^2+q-\beta a\right)\alpha^{m-2}-\left(a^2+q-\alpha a\right)^{m-2}\right]$, then the solution of (12) can be written in a form analogous to (11)

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{m-3}=\frac{\left(a^2+q-\alpha a\right)\left(a_1\beta+q\right)}{\left(a^2+q-\beta a\right)\left(a_1\alpha+q\right)}, \quad (m>2).$$

Applying the inverse Fourier transform to the functions found, we obtain the solution of the problem

$$W_i\left(x,y,t\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{W}_i\left(\xi,\eta,t\right)\mathrm{e}^{-i\left(\xi x+\eta y\right)}d\xi d\eta$$

In the case of joint plane oscillations of plates and liquid, instead of the two-dimensional integral Fourier transform, one-dimensional, and in the case of axisymmetric oscillations, the zero-order integral Hankel transform is used. The form of the basic equations for both planar and axisymmetric oscillations is completely preserved.

REFERENCES

1. ***Kononov Yu. N.*** Free vibrations of a two-layer liquid with elastic membranes on «free» and inner surfaces / Yu. N. Kononov, E. A. Tatarenko // Akusticheskii visnik. – 2003. – T. 6. – №4. – P. 44–52 (in Russian).

2. ***Kononov Yu. N.*** Free vibrations of an unbounded multilayer ideal fluid / Yu. N. Kononov // Proceedings of IAMM NAS of Ukraine. – 2006. – Vol. 13. – P. 121–125 (in Russian).

3. ***Sturova I. V.*** Influence of periodic surface pressures on a floating elastic platform / I. V. Sturova // Applied Mathematics and Mechanics. – 2002. – T. 66. – Vol. 1. – P. 75–86 (in Russian).

4. ***Tkacheva L. A.*** Plane problem on the vibrations of a floating elastic plate under the action of a periodic external load / L. A. Tkachev // Journal. appl. mechanics and techn. Physics. – 2004. – T. 45. – No. 3. – P. 136–145 (in Russian).

5. ***Kheysin D. E.*** Dynamics of the ice cover / D. E. Kheysin. – Leningrad: Gidrometeoizdat, 1967. – 215 p. (in Russian).

6. ***Shevchenko V. P.*** On the stability of elastic plates separating a multilayer ideal fluid / V. P. Shevchenko, Yu. N. Kononov // Actual aspects of physical and mechanical research. Mechanics. –Kyiv: Nauk. dumka, 2007. – P. 348–361 (in Russian).

7. ***Duffy D. G.*** The response of floating ice On the generation of internal waves beneath sea ice by a moving load / D. G. Duffy // Cold Reg. Sci. Tech.– 1996.– Vol. 24.– P. 29–39.

8. ***Meylan M.*** The response of ice floes to ocean waves / M. Meylan, V. A. Squire // J. Geophys. Res. –1994. –Vol. 99. – No CI. – P. 891–900.

9. ***Parau E.*** Nonlinear effects in the respanse of a floating ice plate to a moving load / E. Parau, F. Dias // J. Fluid Mech. – 2001. – Vol. 437. – P. 325–336.

Донецький національний університет
ім. Василя Стуса,
Вінниця, Україна

Надійшла до редколегії 12.03.2017