

УДК 517.11+519.92+539.3

В. О. Бараненко, д-р техн. наук, Д. Л. Волчок, канд. техн. наук

ВАГОВА ОПТИМІЗАЦІЯ СТИСНУТОЇ ОРТОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЗА УМОВ ТРЬОХ ГРАНИЧНИХ СТАНІВ, СТОХАСТИЧНОЇ І НЕЧІТКОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ НАВАНТАЖЕННЯ

Розглядається проектування за критерієм мінімуму об'єму стиснутої ортотропної циліндричної оболонки при одночасному виконанні умов трьох граничних станів (міцності, загальної та місцевої втрати стійкості) і наявності випадкового і нечіткого осьового навантаження. Оболонка виконана із склопластику, армованого в двох взаємно перпендикулярних напрямках, які співпадають з осьовим та окружним напрямками. Наведено результати впливу характеристик тої чи іншої невизначеності на оптимальні проекти. Розроблено алгоритм забезпечення реалізації поставлених оптимізаційних моделей.

Ключові слова: циліндрична ортотропна оболонка, нечіткі величини, випадкові величини, оптимальне проектування конструкцій

Вступ. Задачі оптимального проектування конструкцій (ОПК) подаються переважно у вигляді детермінованих моделей оптимізації. Але, коли інформація про початкові дані конструкції, що проектується, має невизначений характер, підхід до розв'язання таких задач принципово відрізняється від детермінованого підходу своїми постановками та методами дослідження [1]. Джерелом невизначеності може бути наявність випадкових, нечітких та неточних значень вихідних (початкових) даних. Що стосується задач з наявністю випадкових значень даних, то в [9 – 11] подана реалізація ймовірнісних моделей ОПК на основі методу динамічного програмування.

Апріорне врахування факторів, які описані нечітким і неточним чином, стало можливим в рамках теорій нечітких і неточних множин. Тут у відмінності від стохастичних моделей [2, 8], де використовується міра – ймовірність появи випадкової події, застосовуються міри можливості, необхідності виконання нечітких подій і міри довіри до виконання неточних подій. Методи реалізації задач проектування, які розроблені в рамках зазначених теорій, а також методи дослідження такі, як генетичні алгоритми, нейронні мережі та інші, утворюють новий напрям в математиці – інтелектуальні методи або «м'які обчислення».

Методи оптимізації в умовах стохастичної та нечіткої інформації є складними задачами розрахунку. Тому розвиток їх теорії і розробка методів та алгоритмів реалізації моделей прийняття рішень є актуальною проблемою [12].

В даній роботі розглядається проектування за критерієм мінімуму об'єму стиснутої ортотропної циліндричної оболонки при одночасному виконанні умов трьох граничних станів (міцності, загальної та місцевої втрати стійкості) і наявності випадкового та нечіткого осьового наванта-

ження. В роботі пропонується формулювання оптимізаційних задач, алгоритми розв'язання цих задач та здійснюється аналіз впливу характеристик тої чи іншої невизначеності на оптимальні проекти.

Об'єкт оптимізації. Розглянемо ортотропну кругову циліндричну шарнірно-обперту по торцях оболонку з геометричними характеристиками: довжиною L , товщиною h і радіусом R . Конструкція виконана зі склопластику, армованого в двох напрямках з модулем пружності E . Будемо розглядати випадок, коли коефіцієнт об'ємного армування є величина постійна, а відносний вміст армуючих волокон в осьовому напрямку буде величиною змінною. В рамках лінійного наближення теорії армування, з урахуванням того, що $E_a \gg E_c$ (E_a, E_c – відповідно модуль пружності армуючого матеріалу і сполучного), то для модулів пружності оболонки E_1 і E_2 маємо наближений вираз [4, 7]

$$E_1 = \theta E; E_2 = (1 - \theta) E, \quad (1)$$

де E – модуль пружності, θ – відносний вміст армуючих волокон в осьовому напрямку. Міцність матеріалу оболонки на стиск в осьовому напрямку характеризується величиною σ_0 .

Введемо в розгляд наближені вирази для трьох граничних станів оболонки [4]:

- критичного осьового зусилля P_{kp}^m при шарнірному закріпленні оболонки в припущенні достатньої зсувної жорсткості в трансверсальній площині і площині оболонки;

- критичного осьового зусилля P_{kp}^c в разі шарнірно-опертого стержня з кільцевим перетином;

- міцності оболонки P_R на стиск силою F_* , відповідно за допомогою наступних співвідношень

$$P_{kp}^m \geq F_*; P_{kp}^c \geq F_*; P_R \geq F_*; \quad (2)$$

$$P_{kp}^m = Bx_1^2 \sqrt{x_3 x_4}; \quad (3)$$

$$P_{kp}^c = Cx_1 x_2^3 x_3; \quad (4)$$

$$P_R = Dx_1 x_2 \sqrt[3]{x_3^2}; \quad (5)$$

$$B = 2\pi E / \sqrt{3}; C = \pi^3 E / L^2; D = 2\pi \sigma_0; x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}; x_1 = h; x_2 = R;$$

$$x_3 = \theta; x_4 = 1 - \theta, x_5 = \sigma_0; x_6 = E; x_7 = L; x_i > 0; i = 1, 2, \dots, 7. \quad (6)$$

Співвідношення (2) – (6) утворюють фізичні обмеження

$$g_i(x) - 1 \leq 0; i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

В ЯКИХ

$$g_1(x) = \frac{F_*}{Bx_1^2 \sqrt{x_3 x_4}}; \quad g_2(x) = \frac{F_*}{Cx_1 x_2^3 x_3}; \quad g_3(x) = \frac{F_*}{Dx_1 x_2^3 \sqrt{x_3^2}}. \quad (8)$$

Перше обмеження в (7) визначає можливість місцевої втрати стійкості, а друге – можливість загальної втрати стійкості, як стержня. Третя нерівність в (7) визначає можливість руйнування конструкції при дії прикладеного навантаження.

Необхідно знайти такі значення змінних $x^{opt} = \{x_1^{opt}, x_2^{opt}, x_3^{opt}\}$, щоб за умови збереження стійкості і міцності оболонка мала мінімальну вагу (обсяг матеріалу W).

Задачі оптимізації.

Формулювання оптимізаційної задачі проектування оболонки при випадкових даних. Нехай $x = \{x_1, x_2, x_3\}$ – вектор шуканих параметрів з компонентами $x_1 = h$; $x_2 = R$; $x_3 = \theta$; які визначені в заданих інтервалах

$$x_i \in [x_i^-, x_i^+]; \quad i = 1, 2, 3. \quad (9)$$

За змістом задачі $x_i > 0$; $i = 1, 2, 3$. Фактори, що мають випадкову природу, позначимо через вектор $\xi = \{\xi_j\}$. Цей вектор містить одну компоненту – діючу силу $\xi_1 = F$, яка розподілена за деяким законом $f(x)$ і компоненти ξ_j розташовані в паралелепіпеді $\prod_{j=1}^m (\xi_j^+ - \xi_j^-)$, тобто $m = 1$. Треба знайти такий вектор x , який задовольняв би умовам (1), імовірність появи випадкових подій

$$A_i : g_j(x, \xi) \leq 0; \quad i = 1, 2, 3, \quad (10)$$

була б більше деякої наперед заданої величини β_j ($j = 1, 2, 3$), а загальна надійність системи не менше величини β і забезпечував би мінімальне значення ваги конструкції, тобто

$$\rho W \rightarrow \min_x, \quad \text{або} \quad W \rightarrow \min_x, \quad (11)$$

де ρ – питома вага матеріалу; W - об'єм (обсяг матеріалу оболонки); вирази для g_i подаються в (8).

При запису математичної моделі оптимізації треба врахувати властивість, що події (10) незалежні один від другого, і тому

$$(x^{opt}, W^{opt}) = \arg \left\{ \min_x W(x) \mid p_j = \text{Prob}(g_j(x, \xi) \leq 0) \geq \beta_j; j = 1, 2, 3; p = \prod_{j=1}^3 p_j \geq \beta \right\};$$

$$0 < \beta_j \leq 1; 0 < \beta \leq 1. \quad (12)$$

Застосування операції Prob (обчислення ймовірності появи події A_i) зроблено з метою усунення випадковості заданих обмежень (10) при детермінованому критерії (11).

Формулювання оптимізаційної моделі проектування оболонки при нечітких даних. Будемо вважати, що означення вектора x таке, як в (9), а вектор ξ має нечіткий опис: наприклад, значення $\xi = F$ «близько до числа F^* », і тому умова B

$$B: g_j(x, \xi) \leq 0, \quad (13)$$

є нечіткою. Щоб уникнути невизначеності цієї умови в формулюванні оптимізаційної моделі, треба скористатися одним із таких підходів:

- застосування операції обчислення можливості $Pos(B)$ [4];
- використання понять теорії нечітких множин, а саме: означення α -рівнів, теореми про декомпозицію, принципу узагальнення та дефаззифікацію.

В першому випадку математичний запис оптимізаційної задачі в умовах нечіткості буде таким

$$(x^{opt}, W^{opt}) = \arg \left\{ \min_x W(x) \mid Pos(g_j(x, \xi) \leq 0) \geq \beta; 0 < \beta \leq 1; j = 1, 2, 3 \right\}. \quad (14)$$

В другому – $(x^{opt}(\alpha), W^{opt}(\alpha)) = \arg \left\{ \min_x W(x, \alpha) \mid (g_j(x, \xi(\alpha)) \leq 0) \geq \beta; \right.$

$$\left. 0 < \beta \leq 1; 0 < \alpha \leq 1; j = 1, 2, 3 \right\}. \quad (15)$$

Тут функції g_j – дійснозначні.

Щодо нечіткої змінної ξ припускається, що вона описується заданою функцією належності $\mu(x)$. В роботі використовуються трикутна функція належності [7]

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{m-a}, & a \leq x \leq m \\ \frac{b-x}{b-m}, & m \leq x \leq b \\ 1, & x = m \\ 0, & \text{для інших } x \end{cases} \quad \xi_{\Delta} = \xi(a, m, b); a \leq m \leq b, \quad (16)$$

де m є модальне значення нечіткого числа; a, b – розкид. В купі трійка (a, m, b) та $\mu(x)$ визначають гранулу нечіткого числа [13].

Використана також в роботі гаусова функція належності:

$$\mu(x) = e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \quad (17)$$

Параметри a , m , b , σ^2 – задані характеристики невизначеності інформаційних ситуацій, які подаються у вигляді лінгвістичної змінної «приблизно», та її квантифікаторів – «близько до числа..», «біля», «трохи більше (чи менше), ніж...» і т.п. Можливе використання інших функцій належності [5].

Задача (15) відноситься до класу DCP-моделей (dependent-chance-programming) невизначеного програмування [12].

Обчислення міри випадкових і нечітких подій. Основними числовими операціями в задачах (3), (4) є обчислення ймовірності відповідно появи події A , тобто $\text{Prob}(A)$ і можливості виконання нечітких умов (13), тобто $\text{Pos}(B)$.

Статистичне (імітаційне) моделювання. Припускається, що випадкова змінна ξ задається відповідним законом розподілу ймовірностей $f(x)$. Сутність процесу імітаційного моделювання полягає в обчисленні відношення N^*/N , де N є число незалежних статистичних випробувань в числовому експерименті, а N^* – число випадків, де виконуються умови (2), для значень $\xi(\zeta_i)$; ζ_i – *random*. Відношення N^*/N , де $N^* \leq N$, визначає відносну частоту появи події A в експерименті. За законом великих чисел (теорема Бореля) в теорії ймовірностей [2] із збільшенням числа N незалежних випробувань відносна частота N^*/N наближається до істинної ймовірності появи події A_j , а саме

$$N^*/N \rightarrow \text{Prob}(A_j) \text{ при } N \rightarrow \infty; i = 1, 2, 3. \quad (18)$$

Нечітке моделювання. Обчислення можливості виконання події B_j ($j = 1, 2, 3$) із (4) ґрунтується на використанні таких властивостей теорії нечітких множин [7], а саме:

- декартова добутку нечітких множин Q_1, Q_2, \dots, Q_n ;

$$Q = Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_n \quad (19)$$

для $Q_1 \subseteq X_1, Q_2 \subseteq X_2, \dots, Q_n \subseteq X_n; X_i \subseteq X; i = 1, 2, \dots, n$ має місце

$$\mu = \mu_{Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_n} = \min(\mu_{Q_1}(x_1), \mu_{Q_2}(x_2), \dots, \mu_{Q_n}(x_n)), \forall x_i \in X_i; i = 1, 2, \dots, n; \quad (20)$$

- можливість виконання об'єднання двох подій A і B є найбільшою із можливостей для кожної множини, тобто

$$\text{Pos}(A \cup B) = \text{Sup}(\text{Pos}(A), \text{Pos}(B)). \quad (21)$$

Множини Q_i утворюються за допомогою розв'язання рівняння

$$\mu(x) = \alpha. \quad (22)$$

Наприклад, для множини $Q_i = [x_i^L(\alpha), x_i^R(\alpha)]$ з функцією належності трикутного виду маємо:

$$x_i^L(\alpha) = \alpha m + (1 - \alpha)a; \quad x \in [a, m]; \quad x_i^R(\alpha) = \alpha m + (1 - \alpha)b; \quad x \in [m, b]. \quad (23)$$

Для гаусового виду функції належності (17) із рівняння (22) випливає

$$x_i^L(\alpha) = m - \Delta; \quad x_i^R(\alpha) = m + \Delta; \quad \Delta = \sigma \sqrt{-2 \ln \alpha}. \quad (24)$$

Алгоритм

1. Для рівня $L = \beta$, де β – задане апіорне значення з інтервалу $[0, 1]$, будується множина Q за правилом (20) або (21) в залежності від вибраної функції належності.

2. Випадковим чином, використовуючи операцію отримання псевдо-випадкових чисел [6] із інтервалу $[0, 1]$, формується в паралелепіпеді $[\xi^-, \xi^+]$ елементи u_i вектора $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$.

3. Якщо для вектору u одночасно виконуються умови (13) і (19), тобто

$$g_j(x, u) \leq 0; \quad j = 1, 2, 3 \text{ і } L < \mu, \quad (25)$$

слід вважати, що $L = \mu$. Величина μ визначається формулою (18).

4. Після виконання N разів пунктів 2 і 3 видається до подальшого розгляду число L , яке буде шуканим значенням можливості виконання нечіткої події B , тобто $L = Pos(g_j(x, u) \leq 0; j = 1, 2, 3)$.

Цю процедуру можна вставити в будь-який пошуковий алгоритм розв'язання задачі (14). В якості пошукового алгоритму в роботі було використано метод Монте-Карло [6].

Застосування понять теорії нечітких множин. Для α -рівня функції належності $\mu(x)$ розв'язується рівняння (22), із якого обчислюються границі множини Q_i за формулами (23) або (24). Для отриманих $F^L = x^L(\alpha)$, $F^R = x^R(\alpha)$ розв'язується детермінований варіант оптимізаційної задачі (15). В результаті розв'язання детермінованої задачі отримується послідовність пар для k -перерізів (рівнів)

$$\left\{ \frac{\alpha_k}{W(\alpha_k)} \right\}, \left\{ \frac{\alpha_k}{h(\alpha_k)} \right\}, \left\{ \frac{\alpha_k}{R(\alpha_k)} \right\}, \left\{ \frac{\alpha_k}{\theta(\alpha_k)} \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, T, \quad (26)$$

де T – є задане число α -рівнів, із яких будуються нечіткі множини за правилом означення декомпозиції [5] відповідно для W_f, h_f, R_f, θ_f . Наприклад, для параметру W нечітка множина має вигляд

$$W^{opt} = \sum_{k=0}^{T-1} \frac{\alpha_k}{W(x_k^L)} + \frac{\alpha_T = 1}{W(x_T^L)} + \sum_{k=T+1}^{2T} \frac{\alpha_k}{W(x_k^R)} \quad (27)$$

Виконуючи далі операцію дефаззифікації, наприклад, за правилом «середній центр» [5], із множин (26) отримаємо

$$W^{opt} = \sum_{k=1}^T w_k W(\alpha_k), \quad h^{opt} = \sum_{k=1}^T w_k h(\alpha_k), \quad R^{opt} = \sum_{k=1}^T w_k R(\alpha_k), \quad \theta^{opt} = \sum_{k=1}^T w_k \theta(\alpha_k)$$

$$w_k = \frac{\alpha_k}{\sum_{k=1}^T \alpha_k}; \quad w_k \in [0,1]; \quad \sum w_k = 1.$$

В результаті виконання цього алгоритму отримуються очікувані де-терміновані значення шуканих параметрів проекту.

Числова ілюстрація. Стохастична модель. Нижче наводяться ілюстративні приклади оптимального проектування оболонки при випадкових даних.

Перший експеримент. Нехай $\beta_1 = 0.95, \beta_2 = 0.95, \beta_3 = 0.98, \beta = 0.85$. Розподілення випадкової величини взято як (17). При таких числових даних: $m_F = 50 \text{ кН}, E = 35 \text{ ГПа}, \sigma_0 = 0.4 \text{ ГПа}, L = 50 \text{ см}, x_1^- = 0.05 \text{ см}; x_1^+ = 0.2 \text{ см}; x_2^- = 2 \text{ см}; x_2^+ = 10 \text{ см}; x_3^- = 0.4; x_3^+ = 0.9$ отримано результати $W^{opt}, h^{opt}, R^{opt}, \theta^{opt}$, які подано в таблиці 1. При $\sigma_F = 0$ (точні дані) маємо $W_{det}^{opt} = 75.9 \text{ см}^3, h_{det}^{opt} = 0.0975 \text{ см}, R_{det}^{opt} = 2.495 \text{ см}, \theta_{det}^{opt} = 0.775$. Цей результат отримано за допомогою методу Монте-Карло [6]

Таблиця 1 – Залежність мінімальної об'єму W^{opt} , товщини h^{opt} і радіусу R^{opt} оболонки від величини дисперсії σ_F^2

$\sigma_F^2, (\text{кН}^2)$	$W^{opt} (\text{см}^3)$	$h^{opt} (\text{см})$	$R^{opt} (\text{см})$	$\theta^{opt} (\text{см})$
10^{-2}	76,28	0,111	2,65	0,764
1	78,88	0,136	2,26	0,766
4	79,30	0,110	2,71	0,657
25	85,98	0,118	2,46	0,859
49	89,70	0,120	2,83	0,766
100	94,25	0,139	2,52	0,750
169	101,69	0,135	2,91	0,848
225	106,28	0,156	2,48	0,869
289	109,46	0,160	2,68	0,863
400	110,25	0,143	2,95	0,847

За результатами табл. 1 побудовано тренди $(W-\sigma)$, $(h-\sigma)$, $(R-\sigma)$, $(\theta-\sigma)$ (рис. 1, рис. 2). Вони є лінійними і зростають по мірі збільшення параметру випадковості – середньоквадратичного відхилення σ_F .

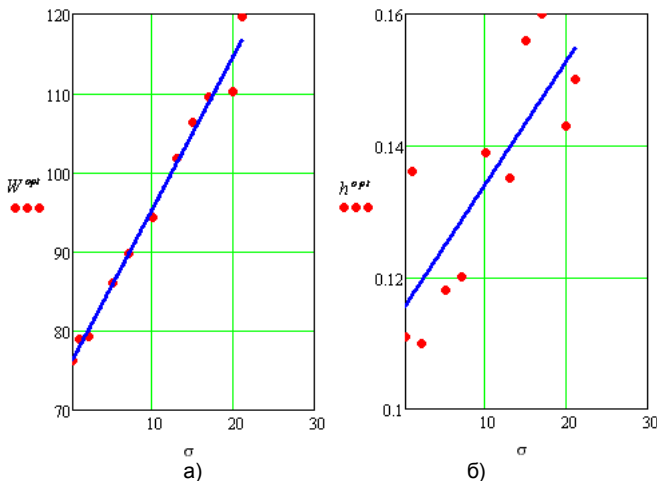


Рис. 1 – Тренди об'єму і товщини оболонки

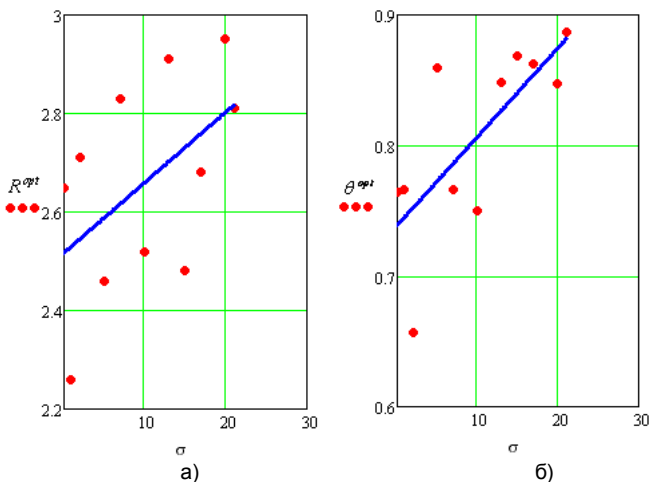


Рис. 2 – Тренди радіусу і відносного армування оболонки

Другий експеримент проведено для уточнених даних ймовірностей $\beta_1 = 0.98$, $\beta_2 = 0.99$, $\beta_3 = 0.99$, $\beta = 0.95$. Інші початкові параметри такі ж, як в експерименті 1. Результати обчислень наведено в табл. 2.

Таблиця 2 – Залежність мінімальної об'єму оболонки від величини дисперсії

$\sigma_F^2, (\kappa H^2)$	$W^{opt} (см^3)$	$h^{opt} (см)$	$R^{opt} (см)$	$\theta^{opt} (см)$
10^{-2}	76,17	0,101	2,59	0,669
1	78,19	0,115	2,40	0,828
4	80,31	0,119	2,38	0,838
25	87,37	0,107	2,89	0,747
49	91,26	0,116	2,71	0,792
72,25	95,29	0,123	2,74	0,819
100	97,52	0,123	2,81	0,809
144	104,02	0,128	2,89	0,836
169	106,98	0,149	2,61	0,890
225	110,81	0,159	2,61	0,854
289	114,98	0,138	3,17	0,783
400	123,96	0,177	2,49	0,897

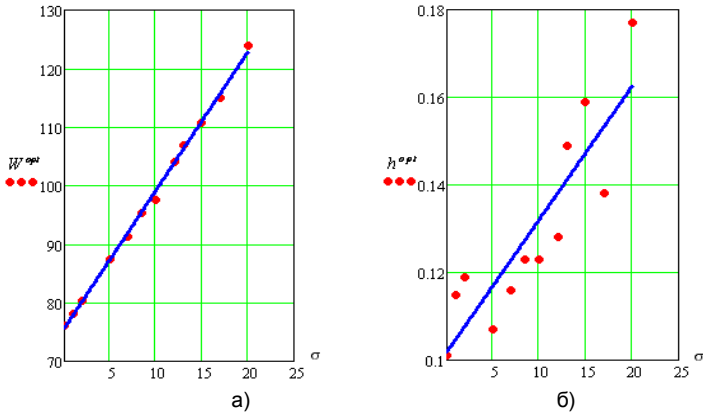


Рис. 3 – Тренди об'єму і товщини оболонки (в другому експерименті)

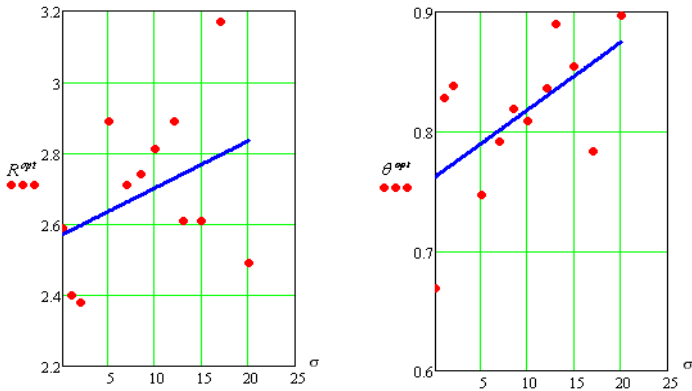


Рис. 4 – Тренди радіусу і відносного армування оболонки (в другому експерименті)

Для аналізу збіжності результатів наведемо таблицю залежності об'єму оболонки від зміни середньоквадратичного відхилення (табл. 3), за даними якої побудовано графіки (рис. 5).

Таблиця 3 – Збіжність значень об'єму від величини середньоквадратичного відхилення

№ експ-ту	σ_F (N)	10000	5000	3162	2000	1000	316,62	100	10	1	0,1
	$\lg \sigma_F$	4	3,7	3,5	3,3	3	2,5	2	1	0	-1
1	W^{opt}	94,24	85,98		79,3	78,38		76,28	76		75,85
2	W^{opt}	97,52		82,97		78,19	76,78	76,17	75,85	75,8	75,79

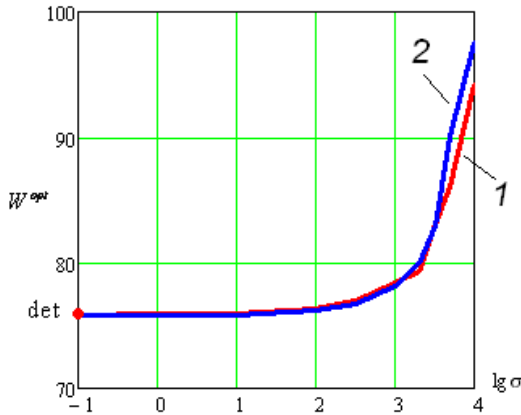


Рис. 5 – Збіжність значень об'єму від величини середньоквадратичного відхилення для двох експериментів

Із рис. 5 видно, що збільшення значення імовірності β (надійності β) і зменшення величини σ призводить до зменшення цільової функції: при $\beta_i \rightarrow 1$ результати проектування збігаються до детермінованої величини $W = 75.9 \text{ см}^3$.

В табл. 4 за отриманими даними наведено таке: збільшення параметру випадкової невизначеності σ_F на $k(\%)$ призводить збільшення величини оптимального розв'язку W^{opt} на

$$\Delta W(\%) = \frac{W^{opt} - W_{det}^{opt}}{W_{det}^{opt}} 100\%$$

по відношенню до розв'язку отриманого при точному значенні сили $m_F = 50 \text{ кН}$ ($\sigma_F = 0$ – система становиться жорсткою).

Таблиця 4 – Вплив зміни параметру випадкової невизначеності σ_F на оптимальний розв'язок

$\lg \sigma_F (N)$	$k(\%)$	$\Delta W(\%)$	
		1 експеримент	2 експеримент
1	2	3,9	3
2	4	4,5	5,8
5	10	13,3	15,1
10	20	24,2	28,5

Нечітка модель

Задача 1 з функцією належності трикутного виду. Відповідні дані для випадку нечіткого моделювання з функцією належності (15) взято такими: $\sigma_0 = 0.4 \text{ ГПа}$, $E = 35 \text{ ГПа}$, $DL = 50 \text{ см}$, $x_1^- = 0.05 \text{ см}$; $x_1^+ = 0.2 \text{ см}$; $x_2^- = 1.5 \text{ см}$; $x_2^+ = 5 \text{ см}$; $x_3^- = 0.4 \text{ см}$; $x_3^+ = 0.9 \text{ см}$ – інтервали для змінних проектування; $T = 200$.

Оптимальний розв'язок при точному значенні $m_F = 50 \text{ кН}$ отримано за методом Монте-Карло: $W^{\text{det}} = 75.9 \text{ см}^3$, $h^{\text{det}} = 0.0975 \text{ см}$; $R^{\text{det}} = 2.495 \text{ см}$; $\theta^{\text{det}} = 0.775$. Навантаження F задається, як подано в табл. 5.

Таблиця 5 – Вплив розміру гранули нечіткої величини F на об'єм оболонки

Інформаційна ситуація	Δ_L (кН)	Δ_R (кН)	%	Відхилення результату при $\beta = 0,4$
1	5	5	10	2,1
2	10	10	20	6,3
3	20	20	40	12,6
4	25	30	50-60	15

Величини Δ_L і Δ_R – відповідно лівий і правий розкид характеристики границі гранули інформації: $a = m_F - \Delta_L$; $b = m_F + \Delta_R$.

При цих даних виконано розрахунки за розробленим алгоритмом. Результати обчислень подано в табл. 6 – табл. 9.

Таблиця 6 – Інформаційна ситуація 1 ($\Delta_L = 5$ (кН), $\Delta_R = 5$ (кН), $m_F = 50$ (кН))

β	W	h	R	θ	L
0,4	74,61	0,1	2,37	0,829	1
0,5	74,28	0,094	2,511	0,742	0,999
0,6	74,49	0,096	2,460	0,785	0,999
0,7	75,23	0,096	2,493	0,775	0,999
0,8	75,57	0,095	2,527	0,749	0,997
0,9	75,78	0,095	2,523	0,756	0,999
0,95	76,16	0,096	2,535	0,747	0,999
1	76,09	0,0975	2,483	0,773	1

Таблиця 7 – Інформаційна ситуація 2 ($\Delta_L = 10$ (кН), $\Delta_R = 10$ (кН), $m_F = 50$ (кН))

β	W	h	R	θ	L
0,4	70,74	0,090	2,512	0,730	0,9998
0,5	71,66	0,091	2,514	0,736	0,9998
0,6	73,0	0,092	2,517	0,746	0,9996
0,7	73,64	0,094	2,487	0,75	0,9993
0,8	74,18	0,096	2,466	0,775	0,999
0,9	75,56	0,099	2,430	0,806	0,999
0,95	76,41	0,094	2,584	0,731	0,999
1	76,35	0,097	2,5	0,763	1

Таблиця 8 – Інформаційна ситуація 3 ($\Delta_L = 20$ (кН), $\Delta_R = 20$ (кН), $m_F = 50$ (кН))

β	W	h	R	θ	L
0,4	64,75	0,0896	2,3	0,829	0,997
0,5	66,71	0,0881	2,41	0,778	0,999
0,6	68,15	0,0872	2,41	0,778	0,999
0,7	70,30	0,0905	2,474	0,762	0,999
0,8	72,68	0,0917	2,523	0,731	0,929
0,9	75,14	0,095	2,518	0,751	0,998
0,95	75,44	0,098	2,444	0,796	0,999
1	76,4	0,096	2,536	0,77	1

Таблиця 9 – Інформаційна ситуація 4 ($\Delta_L = 25$ (кН), $\Delta_R = 30$ (кН), $m_F = 50$ (кН))

β	W	h	R	θ	L
0,4	60,79	0,079	2,447	0,7268	0,998
0,5	64,51	0,0901	2,278	0,83	0,997
0,6	66,50	0,088	2,387	0,774	0,999
0,7	69,41	0,0910	2,430	0,759	0,999
0,8	72,16	0,0918	2,53	0,727	0,999
0,9	74,91	0,090	2,49	0,768	0,998

За даними табл. 6 – табл. 9 для кожної інформаційної ситуації побудовано графіки впливу апріорного значення параметра β на величину W^{opt} .

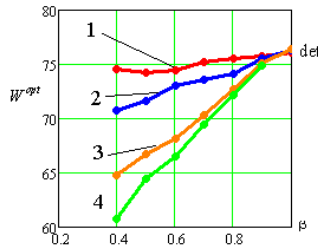


Рис. 6 – Вплив апріорного значення параметра β на величину W^{opt} (см³) для 1 – 4 інформаційних ситуацій

Задача 1 з функцією належності гаусова виду. Дослідження залежності оптимального об'єму оболонки для різних апріорних значеннях порога можливості α_0 , параметра нечіткості σ_F наведено в табл. 10.

Аналіз даних, які подані в табл. 10 і на рис. 7 показує, що збільшення можливості виконання події (В) із виразу (13), тобто при збільшенні величини α -рівнів для різних параметрів нечіткості σ_F величина W^{opt} наближається до значення W_{det}^{opt} і при цьому знижу.

Таблиця 10 – Залежність об'єму W^{opt} від рівня β та σ_F

№ випробування	1	2	3	4
$\sigma_F(\kappa H) / \beta$	0,7	0,8	0,9	0,95
1	76,44	76,17	75,68	75,67
5	72,51	73,04	74,68	75,34
10	69,05	70,40	73,06	73,97
15	63,55	67,04	70,18	72,95
20	50,50	63,59	66,82	70,79

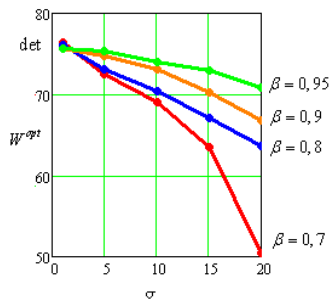


Рис. 7 – Вплив величини середньоквадратичного відхилення на величину оптимального проекту W^{opt} ($см^3$) для різних β

Задача 2 з трикутною функцією належності. При таких вихідних даних для випадку нечіткого моделювання з трикутною функцією належності: $\sigma_0 = 0.4$ ГПа, $E = 35$ ГПа, $DL = 50$ см, $x_1^- = 0.05$ см; $x_1^+ = 0.2$ см; $x_2^- = 2$ см; $x_2^+ = 10$ см; $x_3^- = 0.4$ см; $x_3^+ = 0.9$ см – інтервали для змінних проектування; $T = 200$, виконано розв'язання за наведеним алгоритмом для трьох інформаційних ситуацій, умовні графічні зображення яких наведено на рис. 8 – рис. 10.

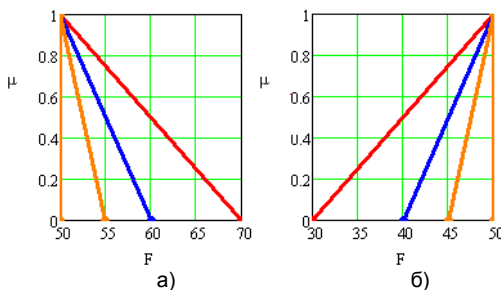


Рис. 8 – Перша інформаційна ситуація

В табл. 11 подано результати розрахунків оптимальних об'єму, товщини, радіусу, відносного значення армування для різних інформаційних ситуацій щодо навантаження.

Отже, із табл. 11 випливає, що в першій інформаційній ситуації щодо навантаження $m_F = 50 \text{ кН}$ збільшення правого розкиду $\Delta_R = \Delta_F$ на $k = 40\%$, або зменшення лівого розкиду $\Delta_L = \Delta_F$ призводить до збільшення (зменшення) величини ΔW на 7% (табл. 12).

Таблиця 11 – Інформаційні ситуації про навантаження і результати обчислень

№	Інформаційна ситуація щодо нечіткого навантаження $F(a, m, b) \ a = m - \Delta_L; \ b = m + \Delta_R;$	$m_F = 50 \text{ кН}$		W (см^3)	h_{def}^{opt} (см)	R_{def}^{opt} (см)	θ_{def}^{opt}
		Δ_L (кН)	Δ_R (кН)				
1	Перша інформаційна ситуація (рис. 8,а) «трохи більше, ніж 50 кН», $\Delta_L = 0$	0	20	81,20	0,1050	2,491	0,793
2		0	10	78,52	0,1010	2,496	0,781
3		0	5	77,18	0,0990	2,497	0,775
4	Перша інформаційна ситуація (рис. 8,б) «трохи менше, чим 50 кН», $\Delta_R = 0$	20	0	70,62	0,0918	2,460	0,763
5		10	0	73,3	0,0944	2,488	0,761
6		5	0	74,62	0,0960	2,492	0,766
7	Друга інформаційна ситуація (рис. 9,в) «приблизно дорівнює 50 кН», $\Delta_R = 20 \text{ кН}$	5	20	79,91	0,1030	2,491	0,787
8		10	20	78,63	0,1020	2,482	0,785
9		15	20	77,28	0,0998	2,481	0,781
10		20	20	75,92	0,0986	2,463	0,782
11	Друга інформаційна ситуація (рис. 9,а) «приблизно дорівнює 50 кН», $\Delta_R = 10 \text{ кН}$	5	10	77,22	0,0990	2,492	0,778
12		10	10	75,92	0,0977	2,489	0,773
13		15	10	74,61	0,0965	2,479	0,771
14		20	10	73,23	0,0950	2,461	0,774
15	Друга інформаційна ситуація (рис. 9,б) «приблизно дорівнює 50 кН», $\Delta_R = 5 \text{ кН}$	5	5	75,90	0,0975	2,495	0,771
16		10	5	74,61	0,0963	2,482	0,770
17		15	5	73,27	0,0947	2,478	0,766
18		20	5	71,90	0,0936	2,460	0,769
19	Третя інформаційна ситуація (рис. 10,в) «навантаження близько до 50 кН», $\Delta_L = 20 \text{ кН}$	20	5	71,90	0,0936	2,460	0,769
20		20	10	73,23	0,0952	2,461	0,774
21		20	15	74,56	0,0968	2,465	0,777
22		20	20	75,92	0,0986	2,463	0,782
23	Третя інформаційна ситуація (рис. 10,а) «навантаження близько до 50 кН», $\Delta_L = 10 \text{ кН}$	10	5	74,61	0,0960	2,492	0,765
24		10	10	75,94	0,0978	2,487	0,773
25		10	15	77,27	0,0994	2,492	0,776
26		10	20	78,61	0,1015	2,483	0,785
27	Третя інформаційна ситуація (рис. 10,б) «навантаження близько до 50 кН», $\Delta_L = 5 \text{ кН}$	5	5	75,918	0,0975	2,496	0,769
28		5	10	78,23	0,0994	2,491	0,778
29		5	15	78,56	0,1008	2,499	0,779
30		5	20	79,91	0,1030	2,490	0,780

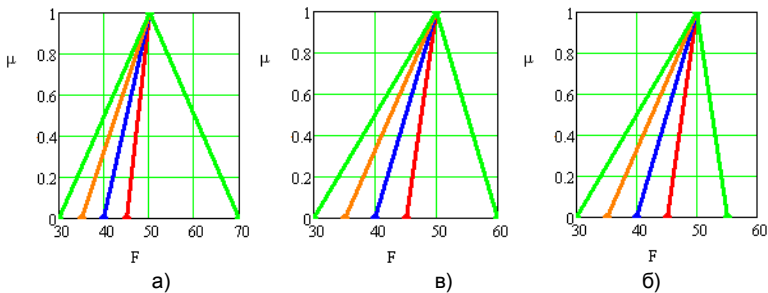


Рис. 9 – Друга інформаційна ситуація

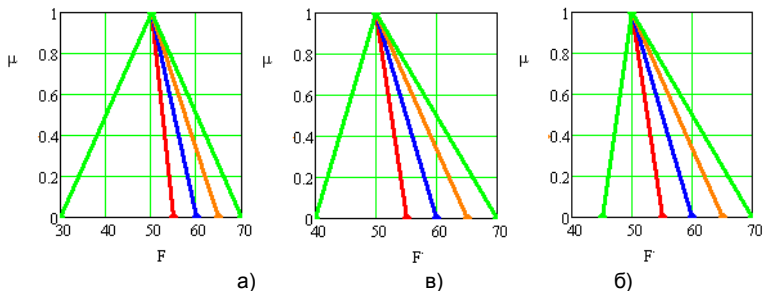


Рис. 10 – Третя інформаційна ситуація

Таблиця 12 – Вплив розкиду початкових даних на результат

$\Delta_F (N)$	$k(\%)$	$\Delta W(\%)$
20	40	7
10	20	3,4
5	10	1,7

Як видно із табл. 12, зменшення Δ_F і ΔW від зміни k є лінійною.

В другій і третій інформаційних ситуаціях при однаковому розкиду $\Delta_L = \Delta_R$ нечіткого навантаження величина W^{opt} така, як і у випадку розв'язання задачі при точному значенні $F = 50 \text{ кН}$. При різних значеннях Δ_L, Δ_R видно: якщо акцент при поданні параметрів нечіткості робиться на збільшення навантаження, розв'язок W^{opt} відповідно теж змінюється (або збільшується, або зменшується).

Результати розрахунку оптимізаційної задачі проектування при детермінованих даних. При детермінованих різних значеннях осьової сили також отримано інформацію щодо оптимального об'єму, товщини, радіусу і відносного армування оболонки (рис. 11, табл. 13).

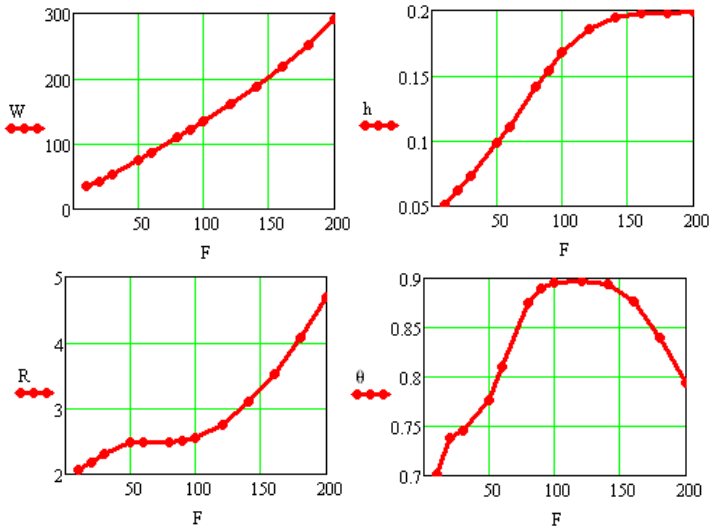


Рис. 11 – Оптимальні значення об'єму (см³), товщини (см), радіусу (см) і відносного армування при збільшенні детермінованого навантаження F (кН)

Таблиця 13 – Результати оптимізації при детермінованих даних

F , кН	W (см ³)	h (см)	R (см)	θ (см)
10	34,71	0,051	2,067	0,702
20	42,22	0,062	2,169	0,738
30	53,46	0,073	2,316	0,746
50	75,90	0,098	2,479	0,776
60	86,68	0,111	2,492	0,811
80	109,20	0,141	2,489	0,875
90	121,40	0,154	2,513	0,889
100	134,00	0,168	2,556	0,895
120	161,10	0,186	2,760	0,897
140	188,20	0,194	3,092	0,895
160	217,80	0,198	3,530	0,876
180	251,86	0,198	4,075	0,840
200	290,33	0,200	4,693	0,795

Як видно із рис. 11, збільшення навантаження призводить до збільшення оптимального об'єму, причому майже лінійно, товщини, радіусу. Величина θ збільшується до $F = 120$ кН. Для $F > 120$ кН відносний зміст армуючих волокон в осьовому напрямі зменшується, а в круговому – збільшується $(1 - \theta)$.

Висновки. Використання теорії ймовірності і теорії нечітких множин в розглянутих оптимізаційних задачах проектування ортотропних циліндричних оболонок, які стискаються осьовою силою, інформація про яку подається випадковим чином або нечітким чином, дозволяє:

- сформулювати оптимізаційні моделі невизначеного програмування;
- розробити процедури імітаційного та нечіткого моделювання обчислення відповідних мір невизначеності – імовірності появи випадкових подій і можливості виконання нечітких подій;
- провести чисельний аналіз впливу невизначеності на оптимальні проекти і порівняння з розв'язками, отриманими при точних даних.

БИБЛИОГРАФИЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Баничук Н. В.** Введение в оптимизацию конструкций / Н. В. Баничук. – М.: Наука, 1986. – 302 с.
2. **Венцель Е. С.** Теория вероятностей / Е. С. Венцель. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
3. **Кофман А.** Введение в теорию нечётких множеств / Кофман А.– М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.
4. **Рикардс Р. Б.** Двойственная задача оптимизации ортотропной оболочки / Р. Б. Рикардс // Механика полимеров. – 1973. – №5. С. 865–871.
5. **Рутковская Д.** Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечёткие системы / Д. Рутковская, М. Пилиньский, Л. Рутковский. – М.: Горячая линия – Телеком, 2008. – 383 с.
6. **Соболь И. М.** Численные методы Монте-Карло / И. М. Соболь. – М.: Наука, 1973. – 312 с.
7. **Тетерс Г. А.** Оптимизация оболочек из слоистых материалов / Г. А. Тетерс, Р. Б. Рикардс, В. Л. Нарусберг. – Рига: Зинанте, 1978. – 240 с.
8. **Юдин Д. Б.** Задачи и методы стохастического программирования / Д. Б. Юдин. – М.: Сов. Радио, 1979. – 302 с.
9. **Baranenko V. A.** Probability approach to the structural optimization problem and dynamic programming / V. A. Baranenko // Proc. of the second world congress of structural and multidisciplinary optimization, May 23-30, 1997, Zakopane, Poland, Vol. 1, IPPT PAN, – 1997. – P. 27–29.
10. **Baranenko V. A.** Optimal design truss in conditions of fuzzy load by expected value models and dynamic programming / V. A. Baranenko // Theoretical Foundation of Civil Engineering XIV/ Ed. by W. Szczesniak, OW PW, Warsaw. – 2006. – P. 499–508.
11. **Baranenko V.,** Optimal structures design at random and fuzzy information about loading / V. A. Baranenko, A. Vojnakov // Theoretical Foundation of Civil Engineering XV/ Ed. by W. Szczesniak, OW PW, Warsaw. – 2007. – P. 25–32.
12. **Liu B.** Theory and Practice of Uncertain Programming / B. Liu // Physica-Verlag, Heidelberg, 2002. – 416 p.
13. **Piegat A.** Fuzzy Modeling and Control / A. Piegat // Physica-Verlag Heidelberg, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001. –728 p.

УДК 517.11+519.92+539.3

В. А. Бараненко, д-р техн. наук, Д. Л. Волчок, канд. техн. наук

ВЕСОВАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СЖАТОЙ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В УСЛОВИЯХ ТРЕХ ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ, СТОХАСТИЧЕСКОЙ И НЕЧЕТКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ НАГРУЗКИ

Рассматривается проектирование по критерию минимума объема сжатой ортотропной цилиндрической оболочки при одновременном выполнении условий трех предельных состояний (прочности, общей и местной потери устойчивости) и наличия случайности и нечеткости осевой нагрузки. Оболочка

выполнена из стеклопластика, армированного в двух взаимно перпендикулярных направлениях, которые совпадают с осевым и окружным направлениями. Приведены результаты влияния характеристик той или иной неопределенности на оптимальные проекты. Разработан алгоритм обеспечения реализации поставленных оптимизационных моделей.

Ключевые слова: цилиндрическая ортотропная оболочка, нечеткие величины, случайные величины, оптимальное проектирование конструкций

UDC 517.11+519.92+539.3

V. A. Baranenko, Dr. Sci. (Tech.), D. L. Volchok, PhD (Tech.)

WEIGHT OPTIMIZATION OF THE STANDARD ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL WITH CONDITION OF THREE LIMIT STATES, STOCHASTIC AND FUZZY UNCERTAINTY OF LOADING

The design of a criterion for the minimum material volume of a compressed orthotropic cylindrical shell is considered while simultaneously fulfilling the conditions of three boundary states (strength, total and local loss of stability) and the presence of a random and fuzzy axial load. The shell is made of fiberglass, reinforced in two mutually perpendicular directions, which coincide with the axial and circumferential directions. The paper presents the results of the influence of the characteristics of one or another uncertainty on the optimal projects. The algorithm of implementation of the optimization models is developed.

Keywords: cylindrical orthotropic shell, fuzzy variables, random variables, optimal design of structures

The object of optimization is orthotropic cylindrical shell. The case with linear theory of reinforcement is considered. So the modules of elasticity of the shell are:

$$E_1 = \theta E; \quad E_2 = (1 - \theta) E, \quad (1)$$

where: E – module of elasticity of fiberglass, θ - the relative content of reinforcing fibers in the axial direction.

Three limited states are:

$$P_{kp}^m \geq F_*; \quad P_{kp}^c \geq F_*; \quad P_R \geq F_*; \quad (2)$$

$$P_{kp}^m = Bx_1^2 \sqrt{x_3 x_4}, \quad P_{kp}^c = Cx_1 x_2^3 x_3, \quad P_R = Dx_1 x_2 \sqrt[3]{x_3^2}, \quad (3)$$

$$B = 2\pi E / \sqrt{3}; \quad C = \pi^3 E / L^2; \quad D = 2\pi \sigma_0; \quad x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}; \quad x_1 = h; \quad x_2 = R;$$

$$x_3 = \theta; \quad x_4 = 1 - \theta, \quad x_5 = \sigma_0; \quad x_6 = E; \quad x_7 = L; \quad x_i > 0; \quad i = 1, 2, \dots, 7. \quad (4)$$

So, we have physical restrictions:

$$g_i(x) - 1 \leq 0; \quad i = 1, 2, 3. \quad (5)$$

$$g_1(x) = \frac{F_*}{Bx_1^2 \sqrt{x_3 x_4}}; \quad g_2(x) = \frac{F_*}{Cx_1 x_2^3 x_3}; \quad g_3(x) = \frac{F_*}{Dx_1 x_2 \sqrt[3]{x_3^2}}; \quad (6)$$

The optimal problem for stochastic variables will be as:

$$(x^{opt}, W^{opt}) = \arg \left\{ \min_x W(x) \left| p_j = \text{Prob}(g_j(x, \xi) \leq 0) \geq \beta_j; j = 1, 2, 3; p = \prod_{j=1}^3 p_j \geq \beta \right. \right\};$$

$$0 < \beta_j \leq 1; 0 < \beta \leq 1. \quad (7)$$

The optimal problem for fuzzy variables and fuzzy sets will be as:

$$(x^{opt}, W^{opt}) = \arg \left\{ \min_x W(x) \left| \text{Pos}(g_j(x, \xi) \leq 0) \geq \beta; 0 < \beta \leq 1; j = 1, 2, 3 \right. \right\} \quad (8)$$

$$(x^{opt}(\alpha), W^{opt}(\alpha)) = \arg \left\{ \min_x W(x, \alpha) \left| (g_j(x, \xi(\alpha)) \leq 0) \geq \beta; \right. \right.$$

$$\left. 0 < \beta \leq 1; 0 < \alpha \leq 1; j = 1, 2, 3 \right\} \quad (9)$$

REFERENCES

1. **Banichuk N. V.** Introduction to the Structural Optimization / N. V. Banichuk. – Moscow: Nauka, 1986. – 302 p. (in Russian).
2. **Vencel E. S.** The theory of probability / E. S. Vencel. – Moscow: Nauka, 1969. – 576 p. (in Russian).
3. **Kofman A.** Introduction to the theory of fuzzy sets / A. Kofman. – Moscow: Radio i sviaz, 1982. – 432 p. (in Russian).
4. **Rikards R. B.** The dual problem of orthotropic shell optimization / R. B. Rikards // Mekhanika polimerov. – 1973. – No 5. – P. 865–871. (in Russian).
5. **Rutkovskaya D.** Neural networks, genetic algorithms and fuzzy systems / D. Rutkovskaya, M. Pilin'skij, L. Rutkovskij. – Moscow: Goriachya linia – Telekom, 2008. – 383 p. (in Russian).
6. **Teters G. A.** Optimization of shells made of laminated materials / G. A. Teters, R. B. Rikards, V. L. Narusberg. – Riga: Zinante, 1978. – 240 p. (in Russian).
7. **Sobol I. M.** Numerical Monte Carlo methods / I. M. Sobol – Moscow: Nauka, 1973. – 312 p. (in Russian).
8. **Yudin D.B.** The problems and methods of stochastic programming/ D. B. Yudin. – Moscow: Sov. Radio, 1979. – 302 p. (in Russian).
9. **Baranenko V. A.** Probability approach to the structural optimization problem and dynamic programming / V. A. Baranenko // Proc. of the second world congress of structural and multidisciplinary optimization, May 23-30, 1997, Zakopane, Poland. – Vol. 1, IPPT PAN. – 1997. – P. 27–29.
10. **Baranenko V. A.** Optimal design truss in conditions of fuzzy load by expected value models and dynamic programming / V. A. Baranenko // Theoretical Foundation of Civil Engineering XIV/ Ed. by W. Szczesniak, OW PW, Warsaw. – 2006. – P. 499–508.
11. **Baranenko V.** Optimal structures design at random and fuzzy information about loading / V. Baranenko, A. Vojnakov // Theoretical Foundation of Civil Engineering XV/ Ed. by W. Szczesniak, OW PW. – Warsaw. – 2007. – P. 25–32.
12. **Liu B.** Theory and Practice of Uncertain Programming / B. Liu // Physica-Verlag. – Heidelberg, 2002. – 416 p.
13. **Piegat A.** Fuzzy Modeling and Control / A. Piegat // Physica-Verlag Heidelberg, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001. – 728 p.

*Державний вищий навчальний заклад
«Придніпровська Державна академія
будівництва та архітектури»
Дніпро, Україна*

Надійшла до редколегії 22.05.2017