

УДК 539.3

¹В. Д. Будак, д-р техн. наук, ²О. Я. Григоренко, д-р фіз.-мат. наук,
¹М. Ю. Борисенко, канд. фіз.-мат. наук,
¹О. В. Бойчук, канд. фіз.-мат. наук

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ НЕКРУГОВОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ НА ОСНОВІ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Досліджуються динамічні характеристики вільних коливань тонкої ізотропної оболонки еліптичного поперечного перерізу сталої товщини з шарнірно опертими торцями на основі методу скінченних елементів, який реалізовано на ліцензійному програмному засобі FEMAP з розв'язувачем NX Nastran. Проведено порівняльний аналіз частот і форм вільних коливань оболонки для випадків шарнірного опирання двох торців і шарнірного опирання одного торця, другий торець – вільний.

Ключові слова: метод скінченних елементів, частоти і форми вільних коливань, оболонка еліптичного поперечного перерізу.

Вступ. Раціональне проектування деталей машин та елементів конструкцій пов'язане з дослідженням їх міцності та стійкості як кожного елемента окремо, так і всього агрегату в цілому. Не менш важливим є визначення власних частот, оскільки при співпаданні частоти зовнішньої сили з власною частотою деталі спостерігається руйнівне явище резонансу.

Метою цієї роботи є визначення частот і форм вільних коливань пружної ізотропної циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу сталої товщини з шарнірно опертими торцями на основі методу скінченних елементів (МСЕ).

Для розрахунків обрано програму для інженерного аналізу FEMAP з розв'язувачем NX Nastran. Запропонований програмний засіб вже використовувався в ряді досліджень із визначення частот і форм вільних коливань тонких циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу сталої [7] та змінної [1] товщини при різних значеннях ексцентриситету [2] та різних граничних умовах на одному торці, інший торець – вільний [3].

Деякі теоретичні підходи дослідження частот і форм вільних коливань тонкостінних некругових циліндричних оболонок описані в [4, 8, 9].

Вихідні співвідношення МСЕ. Рівняння руху механічної системи зі скінченною кількістю ступенів вільності за відсутності зовнішніх сил описується системою рівнянь Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (1)$$

де $L = T - U$. Використовуючи дискретну форму функціоналів кінетичної енергії та енергії деформації відповідно,

$$T = \frac{1}{2} \dot{\vec{\Phi}}_i^T \mathbf{M}_i \dot{\vec{\Phi}}_i, \quad U = \frac{1}{2} \dot{\vec{\Phi}}_i^T \mathbf{K}_i \dot{\vec{\Phi}}_i,$$

де \mathbf{K}_i та \mathbf{M}_i – матриця жорсткості та матриця мас i -го скінченного елемента відповідно; $\vec{\Phi}_i$ – вектор вузлових переміщень i -го елемента.

З рівняння Лагранжа (1) отримаємо наступні рівняння руху оболонки за відсутності демпфування

$$\mathbf{K} \vec{\Phi}_j + \mathbf{M} \ddot{\vec{\Phi}}_j = 0, \quad (2)$$

де \mathbf{K} та \mathbf{M} – матриця жорсткості та матриця мас механічної системи відповідно; $\vec{\Phi}_j$ – вектор переміщень вузлів системи, що відповідає j -му ступеню вільності, і відтворює j -ту форму коливань.

При вільних коливаннях оболонок всі вузлові точки здійснюють гармонічні коливання як функції часу

$$\vec{\Phi}_j(t) = \vec{\Phi}_j \sin \omega_j t. \quad (3)$$

Після підстановки функцій (3) в рівняння руху оболонки (2) визначення власних частот і форм коливань зводиться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{K} \vec{\Phi}_j - \omega_j^2 \mathbf{M} \vec{\Phi}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (4)$$

де ω_j – пульсація або частота гармонічних коливань.

NX Nastran для визначення власних форм і частот коливань у випадку, коли дисипація енергії і демпфування не враховується, використовує, як основний, метод Ланцоша, що вимагає менших ресурсів у порівнянні з іншими методами. Метод Ланцоша дозволяє визначати n -у кількість необхідних власних значень і форм за реальний час, при цьому результати можна вважати практично точними для даної дискретної моделі, оскільки похибка складає $\|\vec{\Phi}_j - \omega_j^2 \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \vec{\Phi}_j\| / \|\vec{\Phi}_j\| \leq 10^{-7}$ [8].

Метод Ланцоша використовує зведення до трьохдіагонального вигляду матриці \mathbf{T}

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{Q}_k, \quad (5)$$

де $\mathbf{Q}_k = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_k\}$ – прямокутна матриця з елементами $N_{eq} \times k$; N_{eq} – кількість рівнянь; k – номер кроку по методу Ланцоша; \vec{q}_k – k -й вектор Ланцоша.

Вираз

$$\beta_{k+1} \bar{q}_{k+1} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \bar{q}_k - \alpha_k \bar{q}_k - \beta_k \bar{q}_k \quad (6)$$

генерує наступний вектор Ланцоша q_{k+1} і визначає поточний рядок матриці \mathbf{T}

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & & \\ & \beta_3 & \alpha_3 & \beta_4 & & \\ . & . & . & . & . & . \\ & & & \beta_k & \alpha_k & \end{pmatrix}.$$

Таким чином, отримуємо задачу на власні значення:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \bar{s}_h^k - \lambda_h^k \bar{s}_h^k &= 0, \quad h = 1, 2, \dots, k, \\ (\omega_h^k)^2 &= 1/\lambda_h^k, \end{aligned} \quad (7)$$

де ω_h^k – k -а апроксимація кругової частоти ω_h , $h = 1, 2, \dots, n$; n – необхідне число власних пар.

Алгоритм продовжує обчислення (при збільшенні k – номера кроку процедури Ланцоша) до тих пір, поки не буде досягнуто задана точність по всім необхідним власним значенням.

Процедура вибіркової ортогоналізації підтримує необхідний рівень ортогоналізації векторів Ланцоша q_k , що забезпечує надійність і стійкість числового процесу розрахунку. При цьому застосовуються економічні методи для реалізації процедури вибіркової ортогоналізації й для визначення власних значень (7) шляхом використання подвійних QR -ітерацій зі зсувами. Вихідні власні вектори визначаються за формулою

$$\bar{\Phi}_h^k = Q_k \bar{s}_h^k, \quad h = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Тестові задачі. Для перевірки достовірності розрахунків розв'язувалась тестова задача, результати якої порівнювались з частотами власних коливань кругової циліндричної оболонки з шарнірно опертими торцями, які визначені експериментально методом голографічної інтерферометрії [6].

За допомогою системи FEMAP побудовано геометрію циліндричної оболонки кругового поперечного перерізу радіуса $R = 0,05 \text{ м}$, висоти $h = 0,12 \text{ м}$, товщини $d = 0,0005 \text{ м}$. Дослідження проводилось для оболонки з шарнірно опертими торцями: $u = v = 0$ (S-S). Матеріал оболонки – сталь з модулем Юнга $E = 200 \text{ ГПа}$, коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,3$, густиною $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$. Скінченно-елементне розбиття проводилось лінійними чотирикутними пластинчастими елементами з розміром сторони 1 мм .

В результаті розв'язування тестової задачі отримано частоти вільних коливань, які представлені в табл. 1 разом із частотами, отриманими іншим автором [6], а також з наведеною розбіжністю розрахунків у відсотках, де m – кількість вузлів вздовж твірної, n – кількість вузлів вздовж дугової координати оболонки.

Таблиця 1 – Частоти вільних коливань тестової задачі

| m | n | f, Гц | | ε, % |
|---|----|-----------------|-------|------|
| | | Експеримент [9] | FEMAP | |
| 1 | 8 | 1800 | 1771 | 1,6 |
| 1 | 10 | 2092 | 1759 | 15,9 |
| 1 | 12 | 2602 | 2213 | 15,0 |
| 1 | 14 | 3364 | 2881 | 14,4 |
| 2 | 12 | 3373 | 3426 | 1,6 |
| 3 | 14 | 5107 | 5154 | 0,9 |
| 4 | 16 | 6780 | 6853 | 1,1 |
| 1 | 28 | 11870 | 11969 | 0,8 |
| 1 | 24 | 12350 | 12183 | 1,4 |

Аналізуючи отримані результати тестової задачі, можна побачити добру відповідність між частотами вільних коливань отриманими, за допомогою FEMAP та частотами, отриманими експериментально, що свідчить про коректність використання розглянутих методик.

Результати. За допомогою системи FEMAP досліджуються частоти і форми вільних коливань циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу з великою піввіссю $a = 50,810 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ і малою піввіссю $b = 36,285 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, висотою $h = 0,12 \text{ м}$, товщиною $d = 0,002 \text{ м}$. Дослідження проводилось для оболонки з шарнірно опертими торцями: $u = v = 0$ (S-S). Матеріал оболонки – сталь з модулем Юнга $E = 214 \text{ ГПа}$, коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,32$, густиною $\rho = 7820 \text{ кг/м}^3$. Скінченно-елементне розбиття проводилось лінійними восьмикутними solid-елементами з розміром сторони 1 мм . Геометрія оболонки та фізико-механічні характеристики вибирались у відповідності до оболонки, дослідженої у випадку шарнірно опертого одного торця, інший торець – вільний (S-F) [3].

В результаті розрахунків отримано частоти вільних коливань, які представлені в табл. 2 разом із частотами, отриманими в [3], а також з наведеною розбіжністю розрахунків.

Таблиця 2 – Частоти вільних коливань циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу з різними граничними умовами на торцях

| m | n | f, Гц | | $\frac{f_{S-S}}{f_{S-F}}$ |
|---|----|-------|-------|---------------------------|
| | | S-F | S-S | |
| 1 | 4 | 728 | 3770 | 5,2 |
| 1 | 6 | 1992 | 3070 | 1,5 |
| 1 | 8 | 3794 | 4459 | 1,2 |
| 1 | 10 | 6107 | 6457 | 1,1 |
| 1 | 12 | 8952 | 9282 | 1,0 |
| 2 | 4 | 5821 | 9141 | 1,6 |
| 2 | 6 | 4046 | 6586 | 1,6 |
| 2 | 8 | 4639 | 6346 | 1,4 |
| 2 | 10 | 6882 | 8235 | 1,2 |
| 2 | 12 | 9631 | 10564 | 1,1 |

Форми вільних коливань розглянутої оболонки з шарнірно опертими торцями зображено на рис. 1. Переміщення точок оболонки для візуалізації показані в чотирикратному збільшенні.

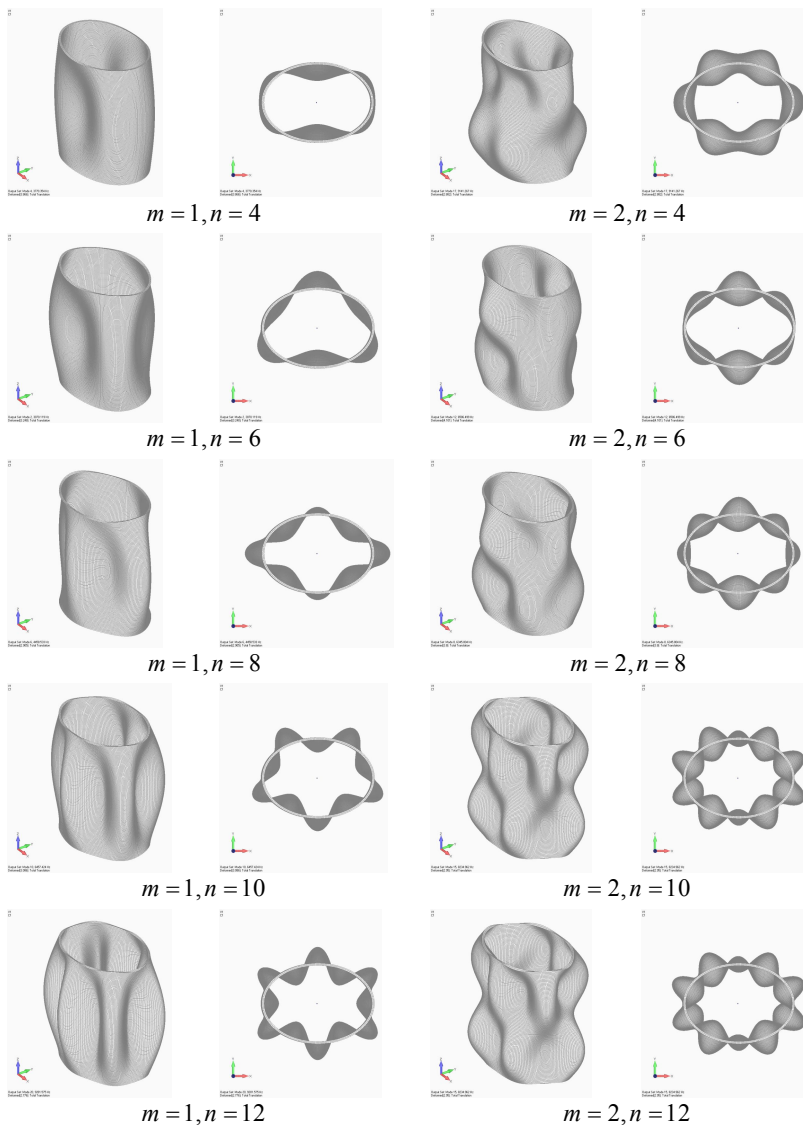


Рис. 1 - Форми вільних коливань циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу з шарнірно опертими торцями

Висновки. Проведено розрахунок тестової задачі та проведено порівняння з результатами, отриманими експериментально іншим автором. Розбіжність між отриманими результатами не перевищує 16%, що є допустимою, і свідчить про коректність використання запропонованого методу до розв'язування задач даного класу.

В результаті розрахунку частот і форм вільних коливань циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу встановлено, що шарнірне опирання двох торців дає можливість підвищити першу резонансну частоту в чотири рази у порівнянні з шарнірним опиранням одного торця, інший торець – вільний. При цьому перші форми вільних коливань відрізняються.

Отримані результати дають змогу керувати спектром частот вільних коливань оболонкових конструкцій для виключення її з резонансного режиму за рахунок варіації граничних умов, що є однією з актуальних проблем дослідження міцності оболонкових конструкцій.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Будак В. Д.** Вільні коливання еліптичної оболонки змінної товщини / В. Д. Будак, А. Я. Григоренко, М. Ю. Борисенко, Е. В. Бойчук // Вісн Київськ. нац. ун-ту. Сер.: Математика. Механіка. – 2014. – № 2 (32). – С. 32–37.
2. **Будак В. Д.** Вплив ексцентриситету еліптичної оболонки на розподіл її динамічних характеристик / В. Д. Будак, О. Я. Григоренко, М. Ю. Борисенко, О. В. Бойчук // Вісн. Київськ. нац. ун-ту. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2015. – №1. – С. 23–28.
3. **Будак В. Д.** Про вільні коливання циліндричних оболонок кругового та некругового поперечного перерізу при різних граничних умовах / В. Д. Будак, О. Я. Григоренко, М. Ю. Борисенко, О. В. Бойчук // Вісн. Запорізьк. нац. ун-ту. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2015. – №2. – С. 20–28.
4. **Григоренко А. Я.** Исследование свободных колебаний некруговых цилиндрических оболочек с помощью метода сплайн-коллокации / А. Я. Григоренко, С. В. Пузырев, Е. А. Волчек // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – Вип.54, № 3. – С. 60–69.
5. **Рудаков К. Н.** FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций. – К.: НТУУ «КПИ», 2011. – 317с.
6. **Шалабанов А. К.** Исследование высокочастотных колебаний цилиндрических оболочек на основе двух методов голографической интерферометрии / А. К. Шалабанов // Исслед. по теор. пластин и оболочек. – 1979. – №14. – С. 184–190.
7. **Budak V. D.** Determination of eigenfrequencies of an elliptic shell with constant thickness by the finite-element method / V. D. Budak, A. Ya. Grigorenko, M. Yu. Borisenko, and E. V. Boychuk // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – Vol.212, No2. – P. 182–192.
8. **Hayek S. I.** Vibration of elliptic cylindrical shells: higher order shell theory / S. I. Hayek, J. E. Boisvert // J. Acoust. Soc. Amer. – 2010. – Vol. 128, No. 3. – P. 1063–1072.
9. **Patel B. P.** Free vibration analysis of functionally graded elliptical cylindrical shells using higher-order theory / B.P. Patel , S.S. Gupta, M.S. Loknath, C.P. // Composite Structures – 2005 – Vol. 69, № 3. – P. 259–270

*В. Д. Будак, д-р техн. наук, А. Я. Григоренко, д-р физ.-мат. наук,
М. Ю. Борисенко, канд. физ.-мат. наук,
Е. В. Бойчук, канд. физ.-мат. наук*

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ НЕКРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Исследуются динамические характеристики свободных колебаний тонкой изотропной оболочки эллиптического поперечного сечения постоянной толщины с шарнирно опертыми торцами на основе метода конечных элементов, который реализован на лицензионной программе FEMAP с решателем NX Nastran. Проведен сравнительный анализ частот и форм свободных колебаний оболочки для случаев шарнирного опирания двух торцов и шарнирного опирания одного торца, второй торец свободный.

Ключевые слова: метод конечных элементов, частоты и формы свободных колебаний, оболочка эллиптического поперечного сечения.

*V. D. Budak, Dr. Sci. (Tech.), A. Ya. Grigorenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
M. Yu. Borisenko, PhD (Phys.-Math.), O. V. Boychuk, PhD (Phys.-Math.)*

SOLVING OF THE PROBLEM OF NON-CIRCULAR CYLINDRICAL SHELL FREE VIBRATIONS BY FINITE ELEMENT METHOD

Dynamic characteristics of free vibrations of a thin isotropic shell with elliptical cross section of constant thickness with hinged ends are studied on the basis of the finite element method, which is realized on the license software tool FEMAP with the NX Nastran solver. Frequencies and forms of free vibrations of the shell for cases of hinged two ends and hinged one end and free other end are compared.

Keywords: finite element method, frequency and form of free oscillations, shell with elliptical cross section.

Rational design of machine parts and structural elements related to the study of strength and stability as each element separately and the entire unit as a whole is worked out. Equally important is determination the natural frequencies, since the coincidence frequency external force with own frequency of detail observed destructive phenomenon of resonance.

The aim of the work is determination of free vibration frequencies and forms of elastic isotropic cylindrical shell with elliptical cross-section of constant thickness with hinged ends by the finite element method (FEM).

The engineering analysis program FEMAP with solver NX Nastran was selected for calculations. The proposed software tool has been used in several studies of determination of frequencies and forms of free vibrations of thin cylindrical shells with elliptical constant cross-section [1] and variable [2] thickness for different values of eccentricity [3] and different boundaries conditions on the one end and free other end [4].

Some theoretical approaches to the study of frequencies and forms of

free vibrations of thin non-circular cylindrical shells described in [5 – 7].

A test problem is solved for the validation of the calculations. The results were compared with the frequencies of natural vibrations of a circular cylindrical shell with hinged ends, which were determined experimentally by the method of holographic and interferometry [9]. With the help of FEMAP built geometry of cylindrical shell with circular cross-section radius $R = 0,05\text{ m}$, height $h = 0,12\text{ m}$, thickness $d = 0,0005\text{ m}$. The study was conducted for the shell with hinged ends: $u = v = 0$ (S-S). Shell material was steel with Young's modulus $E = 200\text{ GPa}$, Poisson's ratio $\nu = 0,3$, density $\rho = 7800\text{ kg/m}^3$. The finite element mesh was composed of linear octagonal elements which size equals 1 mm . Analyze the results of test problem showed a good match between the free vibrations frequencies obtained with using FEMAP and obtained experimentally, that is indicating the correct using of both techniques.

The free vibration frequency and form of cylindrical shell with elliptical cross-section major semiaxis $a = 50,810 \cdot 10^{-3}\text{ m}$ and minor semiaxis $b = 36,285 \cdot 10^{-3}\text{ m}$, height $h = 0,12\text{ m}$, thickness $d = 0,002\text{ m}$ investigated with the help of FEMAP. The study was conducted for the shell with hinged ends: $u = v = 0$ (S-S). Shell material was steel with Young's modulus $E = 214\text{ GPa}$, Poisson's ratio $\nu = 0,32$, density $\rho = 7820\text{ kg/m}^3$. The finite element mesh was composed of linear octagonal elements which size equals 1 mm .

The geometry of the shell and the physical and mechanical properties were selected according to the investigated by finite element method in case shell with hinged one end and free other end (S-F) [4].

As result of calculation frequencies of free vibrations were obtained. They presented in table 1 together with frequencies received in [4].

Table 1 – frequencies of free vibrations of a cylindrical shell with elliptical cross-section and variable boundaries conditions on the ends

| m | n | f, Hz | | $\frac{f_{S-S}}{f_{S-F}}$ |
|---|----|-------|-------|---------------------------|
| | | S-F | S-S | |
| 1 | 4 | 728 | 3770 | 5,2 |
| 1 | 6 | 1992 | 3070 | 1,5 |
| 1 | 8 | 3794 | 4459 | 1,2 |
| 1 | 10 | 6107 | 6457 | 1,1 |
| 1 | 12 | 8952 | 9282 | 1,0 |
| 2 | 4 | 5821 | 9141 | 1,6 |
| 2 | 6 | 4046 | 6586 | 1,6 |
| 2 | 8 | 4639 | 6346 | 1,4 |
| 2 | 10 | 6882 | 8235 | 1,2 |
| 2 | 12 | 9631 | 10564 | 1,1 |

It was established as a result of calculation of free vibrations frequencies and shapes of the cylindrical shell with elliptical section that in case of hinged two ends the first resonance frequency in four times more then in case of one hinged end and free other end. In those cases the first forms of free oscillations are different.

The results make it possible to control the range of frequencies of free oscillations shell structures for its exclusion from the resonant mode by varying boundary conditions, which is one of the urgent problems of research strength of shell structures.

The obtained results make it possible to control the free vibrations frequency spectrum of shell structures to exclude them from the resonance regime due to variation of the boundary conditions this is one of the actual problems of studying the shell structures strength.

REFERENCES

1. **Budak V. D.** Natural vibrations of elliptical shells of variable thickness / V. D. Budak, O. Ya. Grigorenko, M. Yu. Borisenko, and O. V. Boychuk // *Visnyk Kyivskogo natsionalnogo universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Matematyka. Mekhanika* // – 2014. – No 2 (32). – P. 32–37. (in Ukrainian).
2. **Budak V. D.** The elliptical shell eccentricity impact on the distribution of its dynamic characteristics / V. D. Budak, O. Ya. Grigorenko, M. Yu. Borisenko, and O. V. Boychuk // *Visnyk Kyivskogo natsionalnogo universytetu imeni Tarasa Shevchenka, seriia Fyzyko-matematychni nauky*, – 2015. – No1. – P. 23–28. (in Ukrainian).
3. **Budak V. D.** About free vibrations of cylindrical shells with circular and non-circular cross-section under different boundary conditions / V. D. Budak, O. Ya. Grigorenko, M. Yu. Borisenko, O. V. Boychuk // *Visnyk Zaporizhskogo natsionalnogo universytetu, seriia Fyzyko-matematychni nauky*. – 2015. – No2. – P. 20–28. (in Ukrainian).
4. **Grigorenko A. Ya.** Investigation of free vibrations of noncircular cylindrical shells by the spline-collocation method / A. Ya. Grigorenko, S. V. Puziriyev, E. A. Volchek // *Mathematical methods and physicomathematical fields*. – 2011. – Vol. 54. – No 3. – P. 60–69. (in Russian).
5. **Rudakov, K. N.** FEMAP 10.2.0. The Geometric and finite-element modeling of structures. – Kyiv: NTUU «KPI», 2011. – 317 p. (in Russian).
6. **Shalabanov A. K.** Investigation of high-frequency vibrations of cylindrical shells by two holographic interferometry methods / A. K. Shalabanov // *Investigation on the theory of plates and shells*. – 1979. – No14. – P. 184–190. (in Russian).
10. **Budak V. D.** Determination of eigenfrequencies of an elliptic shell with constant thickness by the finite-element method / V. D. Budak, A. Ya. Grigorenko, M. Yu. Borisenko, and E. V. Boychuk // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2016. – Vol. 212. – No2. – P. 182–192.
11. **Hayek S. I.** Vibration of elliptic cylindrical shells: higher order shell theory / S. I. Hayek, J. E. Boisvert // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 2010. – Vol. 128. – No. 3. – P. 1063–1072.
12. **Patel B. P.** Free vibration analysis of functionally graded elliptical cylindrical shells using higher-order theory / B. P. Patel, S. S. Gupta, M. S. Loknath // *Composite Structures* – 2005. – Vol. 69. – No 3. – P. 259–270.

¹Миколаївський національний університет
ім. В.О. Сухомлинського,
Миколаїв, Україна,

²Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України,
Київ, Україна