ISSN 2079–1836
2017, вип. 27

УДК 539.3

О. И. Власов

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ МНОГОСЛОЙНЫХ АРМИРОВАННЫХ ОБОЛОЧЕК С ПРИСОЕДИНЕННЫМИ ТВЕРДЫМИ ТЕЛАМИ

Рассмотрена задача о собственных колебаниях многослойных упругих ортотропных оболочек вращения, несущих присоединённые твёрдые тела. В линейной постановке разработана уточнённая математическая модель колебаний, учитывающая структурную неоднородность материала. Решение получено вариационным методом Ритца. Приведены результаты численного исследования собственных частот и форм свободных колебаний армированных оболочек нулевой гауссовой кривизны.

Ключевые слова: *свободные колебания, многослойная оболочка, конструктивная неоднородность, присоединенные твердые тела, собственные частоты и формы колебаний, вариационный метод Ритца.*

Введение. Оболочечные элементы из многослойных композиционных материалов широко применяются в различных отраслях современной техники. Неоднородность структуры материала, наличие присоединённых твёрдых тел и их дискретное размещение создаёт локальную инерционную неоднородность оболочечной системы и оказывает существенное влияние на её динамические характеристики. Поэтому особое место в расчётной практике оболочечных конструкций занимают задачи о свободных колебаниях тонкостенных упругих многослойных армированных оболочек, что определяет актуальность рассматриваемой проблемы.

Анализ публикаций. Колебаниям многослойных ортотропных конструктивно неоднородных оболочек посвящено сравнительно небольшое количество исследований, обзор которых и полученные результаты решения конкретных задач приведен в [1; 3 – 5; 7; 11; 12]. Решению задач собственных колебаний оболочек с присоединёнными твёрдыми телами посвящены [2, 6]. В [9] приведен обзор результатов экспериментальных исследований колебаний и напряженно-деформированного состояния оболочек из слоистых композиционных материалов неоднородной по толщине структуры.

Из анализа публикаций следует, что указанная проблема и связанные с ней задачи еще не получили окончательного решения. Таким образом, совершенствование методов определения амплитудно-частотных характеристик многослойных армированных оболочек с присоединёнными твёрдыми телами остаётся актуальной задачей, имеющей важное практическое значение.

Целью работы является разработка методики расчёта и исследование влияния неоднородной структуры материала с учётом армирования составляющих слоёв относительно координатных осей и присоединённых твёрдых тел на частоты и формы свободных колебаний многослойных упругих оболочек вращения

Постановка задачи. Рассматриваются свободные колебания оболочки вращения постоянной толщины h, состоящей из произвольного числа жестко связанных между собой ортотропных слоёв толщиной h_i, армированных однонаправленными высокопрочными волокнами, расположенными под углом ψ к осям координат. На поверхности оболочки, связанной с криволинейной ортогональной системой координат $(\alpha_1, \alpha_2, \eta)$, расположены жестко присоединённые твёрдые тела, массы которых M_v $(v = \overline{1, Q})$ сосредоточены в точках $\Theta_v(\alpha_1^{(v)}, \alpha_2^{(v)})$, где ось α_1 направлена вдоль образующей, ось α_2 – в окружном направлении.

Задача рассматривается в линейной постановке на основе гипотез Кирхгофа – Лява. Деформации составляющих слоёв подчиняются обобщенному закону Гука. В качестве базисной примем срединную поверхность оболочки, смещение точек которой характеризуется вектором перемещений $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

С учётом принятых допущений компоненты вектора перемещений в i-ом слое и центре массы присоединённого тела, отстоящих на расстоянии η от срединной поверхности, выражаются уравнениями:

$$u_1^{(\eta)}(\alpha_1,\alpha_2,\eta) = u_1(\alpha_1,\alpha_2) + \eta\,\theta_1(\alpha_1,\alpha_2), \qquad (1)$$

$$u_2^{(\eta)}(\alpha_1,\alpha_2,\eta) = u_2(\alpha_1,\alpha_2) + \eta\,\theta_2(\alpha_1,\alpha_2), \quad u_3^{(\eta)}(\alpha_1,\alpha_2,\eta) = u_3(\alpha_1,\alpha_2),$$

Уравнения относительных деформаций оболочки вращения в базисной поверхности запишутся в виде:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{u_3}{R_1}; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{u_1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{u_3}{R_2};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{u_1}{A_1}\right) + \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{u_2}{A_2}\right); \quad \varepsilon_4 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\theta_2; \qquad (2)$$

$$\varepsilon_5 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\theta_1;$$

$$2\varepsilon_6 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2}\left(\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\theta_1 + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\theta_2\right) +$$

$$+ \frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}u_2\right) + \frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}u_1\right).$$

Углы поворота нормали к срединной поверхности оболочки относительно тангенциальных осей (вокруг касательных к координатным линиям α_1 и α_2) выражаются через компоненты вектора перемещений уравнениями:

$$\theta_1 = -\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} + \frac{u_1}{R_1}\right); \quad \theta_2 = -\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} + \frac{u_2}{R_2}\right). \tag{3}$$

В уравнениях (1) – (3) приняты следующие обозначения: u_1, u_2, u_3 – меридиональное, окружное и нормальное перемещения точек срединной поверхности ($\eta = 0$).

Деформации в *i*-ом слое рассматриваемой оболочки, отстоящем на расстоянии η от срединной поверхности, представим в виде:

$$\varepsilon_1^{(\eta)} = \varepsilon_1(\alpha_1, \alpha_2) + \eta\varepsilon_4(\alpha_1, \alpha_2), \qquad \varepsilon_2^{(\eta)} = \varepsilon_2(\alpha_1, \alpha_2) + \eta\varepsilon_5(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$\varepsilon_3^{(\eta)} = \varepsilon_3(\alpha_1, \alpha_2) + \eta\varepsilon_6(\alpha_1, \alpha_2).$$

Потенциальная и кинетическая энергии оболочечной системы определяются как сумма потенциальных энергий упругих деформаций и кинетических энергий составляющих: её слоев и присоединенных тел [1]:

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2}\int_{\alpha'}^{\alpha''}\int_0^{2\pi} \Big\{ & C_{11}\varepsilon_1^2 + 2C_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2 + C_{22}\varepsilon_2^2 + C_{66}\varepsilon_3^2 + \\ & + 2\left[K_{11}\varepsilon_1\varepsilon_4 + K_{12}(\varepsilon_1\varepsilon_5 + \varepsilon_2\varepsilon_4) + K_{22}\varepsilon_2\varepsilon_5 + 2K_{66}\varepsilon_3\varepsilon_6\right] + \\ & + D_{11}\varepsilon_4^2 + 2D_{12}\varepsilon_4\varepsilon_5 + D_{22}\varepsilon_5^2 + D_{66}\varepsilon_6^2 \Big\} A_1 A_2 \, \partial\alpha_1 \partial\alpha_2, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} K = & \frac{1}{2}\sum_{\zeta=1}^{N}\rho_i h_i \int_{\alpha'}^{\alpha''}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial u_k^{(i)}}{\partial t}\right)^2 A_1 A_2 \, d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ & + \frac{1}{2}\sum_{\upsilon=1}^{Q} M_\upsilon \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial u_{k\upsilon}}{\partial t}\right)^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь C_{pq}, K_{pq}, D_{pq} – обобщенные коэффициенты упругости; $u_k^{(i)}, u_{k\upsilon}$ – компоненты перемещений срединных поверхностей составляющих слоёв и центров масс присоединённых тел ($k = \overline{1,3}$); h_i, ρ_i – толщина и плотность материала i-го слоя оболочки; N, Q – количество составляющих слоёв и присоединённых тел; α', α'' – координаты торцов оболочки; M_υ – массы присоединённых тел.

При совмещении координатной поверхности с внутренней поверхностью оболочки обобщённые коэффициенты упругости определяются зависимостями [1]:

$$C_{pq} = \sum_{i=1}^{N} B_{pq}^{(i)} \left(\eta_i - \eta_{i-1}\right), \quad K_{pq} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} B_{pq}^{(i)} \left(\eta_i^2 - \eta_{i-1}^2\right), \tag{6}$$

$$D_{pq} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{N} B_{pq}^{(i)} \left(\eta_i^3 - \eta_{i-1}^3\right) \qquad (p,q = 1,\ 2,\ 6),$$

где $B_{pq}^{(i)}$ – удельные коэффициенты упругости материала ортотропных слоёв оболочки [1]. Для оболочек симметричного строения $K_{pq} = 0$.

При повороте главных направлений упругости относительно координатных осей $(\alpha_1,\ \alpha_2)$ на угол ψ удельные коэффициенты упругости ортотропного материала i-го слоя запишутся в виде [10]:

$$B_{11}^{(i)} = \overline{B}_{11}^{(i)} \cos^4\psi + 2\left(\overline{B}_{12}^{(i)} + 2\overline{B}_{66}^{(i)}\right) \sin^2\psi \cos^2\psi + \overline{B}_{22}^{(i)} \sin^4\psi ,$$

$$B_{12}^{(i)} = \overline{B}_{12}^{(i)} + \left[\overline{B}_{11}^{(i)} + \overline{B}_{22}^{(i)} - 2\left(\overline{B}_{12}^{(i)} + 2\overline{B}_{66}^{(i)}\right)\right] \sin^2\psi \cos^2\psi ,$$

$$B_{22}^{(i)} = \overline{B}_{11}^{(i)} \sin^4\psi + 2\left(\overline{B}_{12}^{(i)} + 2\overline{B}_{66}^{(i)}\right) \sin^2\psi \cos^2\psi + \overline{B}_{22}^{(i)} \cos^4\psi ,$$

$$B_{66}^{(i)} = B_{66}^{(\zeta)} + \left[\overline{B}_{11}^{(i)} + \overline{B}_{22}^{(i)} - 2\left(\overline{B}_{12}^{(i)} + 2\overline{B}_{66}^{(i)}\right)\right] \sin^2\psi \cos^2\psi .$$

Метод решения. Задача решается методом Ритца. На основе вариационного принципа Остроградского – Гамильтона решение сводится к вариационному уравнению $\delta Э(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \eta) = 0$, где $Э = T - П$ – функция Лагранжа; $П,\ T$ – потенциальная и кинетическая энергии деформации и колебаний неоднородной оболочечной системы.

Перемещения срединной поверхности оболочки аппроксимируются системой базисных функций

$$u_k = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} \widetilde{u}_{mn}^{(k)}(t)\, \varphi_{mn}^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2) \qquad (k = \overline{1,\ 3}\,), \tag{7}$$

где $\widetilde{u}_{mn}^{(k)}(t) = C_{mn\,j}^{(k)} \cos(\omega t)$ – функции времени t; $C_{mn}^{(k)}$ – коэффициенты собственных форм, образующие собственные векторы, представляющие формы колебаний; ω – круговая частота собственных колебаний; $\varphi_{mn}^{(k)}(\alpha_1,\ \alpha_2) = W_m^{(k)}(\alpha_1)\, \Psi_n^{(k)}(\alpha_2)$ – линейно независимые базисные функции перемещений; $W_m^{(k)}(\alpha_1)$, $\Psi_n^{(k)}(\alpha_2)$ – координатные функции аргументов α_1 и α_2, удовлетворяющие заданным краевым условиям на контуре оболочки и условиям периодичности в окружном направлении; M, N – количество членов разложения по координатам.

Деформации оболочки запишутся в виде

$$\varepsilon_p = \sum_{k=1}^{3}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} \tilde{u}_{mn}^{(k)}(t)\, \Phi_{pmn}^{(k)} \quad (p = 1,2, ...,6). \tag{8}$$

Базисные функции деформаций $\Phi_{pmn}^{(k)}$ зависят от геометрических параметров оболочки и приведены в [6]. Сходимость рядов (7) и (8) понимается в смысле обобщённых функций конечного порядка.

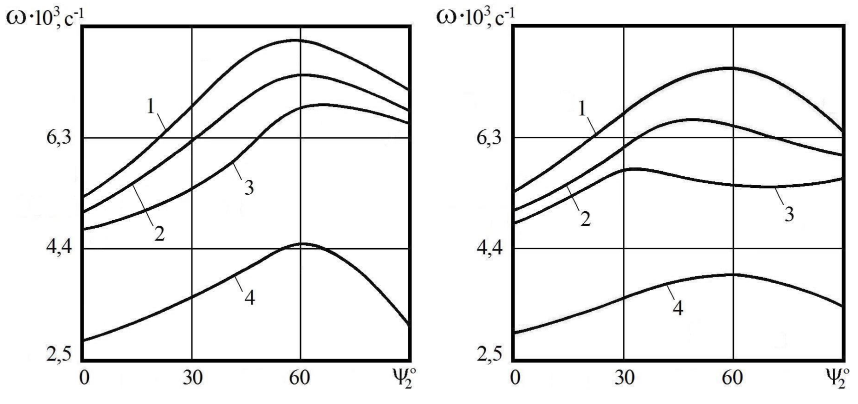
Подставив в уравнения (4), (5) зависимости (7), (8), и применяя процедуру Ритца, из условия стационарности функционала Лагранжа $\partial Э / \partial C_{mn}^{(k)} = 0$ ($k = \overline{1,3}$; $m = \overline{1,M}$; $n = \overline{1,N}$) получим разрешающую систему однородных линейных алгебраических уравнений для определения приближенных значений собственных частот ω и коэффициентов собственных форм $C_{mn}^{(k)}$:

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\left(A_{mn}^{(\zeta k)} - \omega_{mn}^{2}\, B_{mn}^{(\zeta k)}\right)C_{mn}^{(k)} = 0 \qquad (\zeta = \overline{1,3}),$$

где $C_{mn}^{(k)}$ – коэффициенты матрицы векторов собственных форм; $A_{mn}^{(\eta k)}$, $B_{mn}^{(\eta k)}$ – коэффициенты матриц жесткости и масс оболочечной системы.

Анализ численных результатов. Численные исследования собственных колебаний оболочечной системы выполнены для трёхслойных цилиндрических оболочек из гибридных композитов с относительными геометрическими характеристиками $L/R = 2{,}5$, $R/h = 125$, где R, L, h – радиус, длина и толщина оболочки. Наружные слои оболочки выполнены из высокопрочного углепластика AS/4397 [8] с механическими характеристиками: $E_1 = 128$ *ГПа*; $E_2 = 9{,}78$ *ГПа*; $\nu_1 = 0{,}30$; $\nu_2 = 0{,}023$; $G_{12} = 5{,}42$ *ГПа*; $\rho = 1{,}57\times10^3$ *кг/м*^{3}. Внутренний слой выполнен из стеклопластика GLASS/DX210 с механическими характеристиками: $E_1 = 37{,}8$ *ГПа*; $E_2 = 10{,}1$ *ГПа*; $G_{12} = 4{,}9$ *ГПа*; $\nu_1 = 0{,}29$; $\nu_2 = 0{,}08$; $\rho = 1{,}8\times10^3$ *кг/м*^{3} соответственно. Связующей основой углепластика служит полиамидная матрица с объёмным содержанием армирующих волокон до 64%.

На рис. 1 представлены зависимости низшей частоты колебаний ω ($m = 1$) оболочки от угла армирования наружных слоев. В первом случае (рис. 1,а) угол армирования среднего слоя составляет $\psi_1 = 90^\circ$, во втором (рис. 1,б) – $\psi_1 = 0^\circ$. Наружные слои имеют одинаковую толщину, а толщина среднего слоя равна суммарной толщине наружных слоёв. Кривые 1 – 4 соответствуют следующим граничным условиям на торцах оболочки: жесткое закрепление, жесткое закрепление – шарнирное опирание, шарнирное опирание и консольное закрепление соответственно. Как видно из зависимости $\omega = f(\psi_2)$, при соответствующих граничных условиях существует такой угол армирования ψ_2, при котором низшая частота колебаний достигает своего наибольшего и наименьшего значений. При этом изменяются и соответствующие формы колебаний. В первом случае при $0 \le \psi_2 \le 45^\circ$ для граничных условий 1 – 3 волновое число $n = 6$, а для консольной оболочки $n = 5$. При $45^\circ \le \psi_2 \le 70^\circ$ для граничных условий 2 и 3 число $n = 5$; с возрастанием ψ_2 до 90° – $n = 4$. Для граничных условий 1 и 4 при $45^\circ \le \psi_2 \le 90^\circ$ число $n = 5$ и 4 соответственно. Аналогичное изменение форм колебаний наблюдается и во втором случае.



а) б)

Рис. 1 – **Зависимость низшей частоты колебаний трёхслойной ортотропной оболочки от угла армирования наружных слоёв**

Исходя из анализа полученных результатов, можно сделать вывод о том, что структура укладки волокон слоистого композита оказывает существенное влияние на низшую частоту колебаний и основные жесткостные характеристики оболочки. Из представленных результатов следует, что уровень частот собственных колебаний оболочек из ортотропных композиционных материалов можно регулировать посредством варьирования состава композита, схемы армирования материала и изменения геометрии оболочечной системы.

Из анализа форм колебаний могут быть выделены преимущественно поперечные (изгибные), тангенциальные и сдвиговые колебания. Сдвиговые формы отвечают высоким частотам и практически не сопровождаются тангенциальными и поперечными перемещениями.

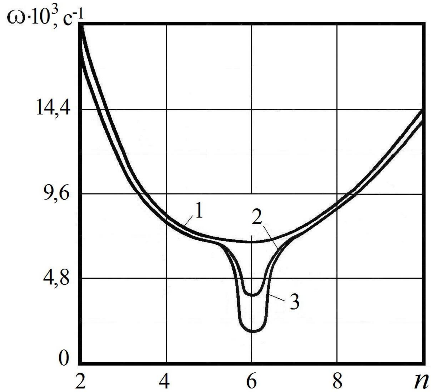


Рис. 2 – **Зависимость частот колебаний трёхслойной ортотропной оболочки от волновых чисел n и массы присоединённого тела**

На рис. 2 для жестко закрепленной оболочки приведена зависимость низшего спектра частот колебаний от окружных волновых чисел n для различных значений массы присоединённого тела, характеризуемой отношением M_1/M_0, где M_1 – масса тела, M_0 – масса оболочки. Присоединённое твёрдое тело расположено на наружной поверхности в точке с координатами $\alpha_1 = L/2$ и $\alpha_2 = 0$.

Кривая 1 соответствует незагруженной оболочке (M_1/M_0 = 0), а кривые 2 и 3 – отношению M_1/M_0 = 0,2 и 0,4 соответственно. Необходимо отметить, что соответствующая зависимость для низшей частоты имеет характерные участки. Из приведенных результатов видно, что жестко присоединённое тело приводит к понижению спектра частот колебаний оболочечной системы. Наибольшее влияние присоединённое тело оказывает на низшую частоту колебаний, которой соответствует изгибная форма с одной полуволной в продольном направлении ($m = 1$). Общей особенностью собственных форм является локализация деформаций несущей поверхности в окрестности расположения присоединенного тела и их затуханием с удалением от него.

Выводы. Методом Ритца решена задача определения частот и форм свободных колебаний многослойных армированных оболочек вращения с присоединёнными твердыми телами. Расчётная модель напряженно-деформированного состояния оболочечной системы построена на основе линейной теории тонких упругих оболочек с учётом дискретно неоднородной по толщине структуры составляющих слоёв.

Полученные численные результаты показывают, что ориентация армирующих волокон в ортотропных слоях материала, количество слоёв и присоединённые твёрдые тела оказывают существенное влияние на амплитудно-частотные характеристики колебаний оболочки.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. ***Амбарцумян С. А.*** Общая теория анизотропных оболочек / С. А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1974. – 446 с.

2. ***Андреев Л. В.*** Динамика пластин и оболочек с присоединёнными массами / Л. В. Андреев, А. Л. Дышко, И. Д. Павленко. – М.: Машиностроение, 1988. − 195 с.

3. ***Бабич Д. В.*** Собственные колебания оболочек вращения из термочувствительных композиционных материалов / Д. В. Бабич, В. В. Воробей, В. И. Тарасюк и др. // Прикл. механика. – 1992. – Т. 28. – № 4. – С. 8–16.

4. ***Богданович А. Е***. Собственные колебания ортотропных ребристых цилиндрических оболочек / А. Е. Богданович, В. А. Заруцкий // Прикл. механика. – 1991. – Т. 27. – № 10. – С. 83–90.

5. ***Болотин В. В.*** Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. – М.: Машиностроение, 1980. – 376 с.

6. ***Власов О. И.*** Численное исследование частот и форм собственных колебаний оболочек вращения с присоединенными твердыми телами / О. И. Власов, А. С. Каиров // Пробл. обчисл. механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Д.: Ліра. – 2015. – Вип. 24. – С. 26–34.

7. ***Григолюк Э. И.*** Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин / Э. И. Григолюк, Г. М. Куликов. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.

8. Композиционные материалы: Справочник / В. В. Васильев, В. Д. Протасов, В. В. Болотин и др. Под общ. ред. В. В. Васильева, Ю. М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.

9. ***Кубенко В. Д.*** Экспериментальные исследования колебаний и динамической устойчивости оболочек из слоистых композитных материалов / В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук // Прикл. механика. − 2009. − Т. 45. – № 5. − С. 53–79.

10. ***Лехницкий С. Г.*** Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.

11. Механика композитных материалов и элементов конструкций: [в 3-х т.] / А. Н. Гузь, Я. М. Григоренко, И. Ю. Бабич и др. – К.: Наукова думка, 1983. – Т. 2: Механика элементов конструкций. – 464 с.

12. Механика композитов: [в 12 т.] / Под ред. В. Д. Кубенко. Т. 9. Динамика элементов конструкций. – К.: АСК., 1999. – 379 с.

УДК 539.3

О. І. Власов

ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ БАГАТОШАРОВИХ АРМОВАНИХ ОБОЛОНОК З ПРИЄДНАНИМИ ТВЕРДИМИ ТІЛАМИ

Розглянуто задачу власних коливань багатошарових пружних ортотропних оболонок обертання з приєднаними твердими тілами. У лінійній постановці розроблена уточнена математична модель коливань, що враховує структурну неоднорідність матеріалу. Розв'язок отримано варіаційним методом Рітца.

Наведено результати числового дослідження власних частот і форм вільних коливань армованих оболонок нульової гауссової кривини.

Ключові слова: *вільні коливання, багатошарова оболонка, конструктивна неоднорідність, приєднані тверді тіла, власні частоти та форми коливань, варіаційний метод Рітца.*

UDC 539.3

O. I. Vlasov

NUMERICAL INVESTIGATION OF FREE VIBRATIONS OF MULTILAYER ROTATIONALSHELLS WITH ATTACHED SOLID BODIES

Free vibrations of elastic multilayer orthotropic rotational shells with attached solid bodies have been investigated. The more correct mathematical model of shells vibration that takes into account their constructional non-homogeneity has also been developed in the linear formulation. The foregoing problem has been solved by means of Ritz variation method usage. The results of numerical investigation of natural frequencies and forms of free vibration of reinforced shells for zero Gauss curvature case are given.

Keywords: *free vibrations, multilayer shell, constructional non-homogeneity, attached solid bodies, natural frequencies and modes of vibrations, variation Ritz method.*

Multilayer composite shells constructions are widespread in modern technic. The heterogeneity of the structure of the material and the presence of attached solid bodies and their discrete location cause an essential influence on the shells dynamic characteristics. That is why the problems which deal with free vibrations of the constructional non-homogeneous multilayer thin elastic shells are rather actual.

The aim of this work is the development of methods of calculation and investigated of the effect of non-homogeneity structure of material taking into account the reinforcement and the attached solid bodies on the oscillation forms and frequencies of multilayer rotation shells.

The method of calculation of natural frequencies and mode shapes of the shell system is developed taking into account the heterogeneity of the constituent layers of the shell and attached solids. The problem is solved by the variational Ritz method on the basis of the developed mathematical model. The shells stress-strain state has been considered on the base of the linear theory of thin elastic shells and Kirchhoff – Love’s hypothesis.

According to the Lagrange variation principle the problems solution is reduced to the variational equality. In this equality the Lagrange’s functional for the non-homogeneuos shells system consists of the sum of the shell functional and attached solid bodies functions addition. The main problem of the research is simplified by the Lanczos matrix method usage. The obtained frequencies have also been compared with the results of calculation, based on ANSYS program and show good convergence.

The numerical results achieved on the base of the developed mathematical model show that the location of orthotropic layers and attached solid bodies sharply influence the thin shells oscillation forms and frequencies. The reinforcement of material influence is also rather important and should be considered during the multilayer armed shells natural modes and frequencies calculations. The new dependences and mechanical effects, caused by the shells constructional non-homogeneity are rather important and should be used in practice.

REFERENCES

1. ***Ambarcumyan S. A.*** General theory of anisotropic shells / S. A. Ambarcumyan. – Moscow: Nauka, 1974. – 446 p. (in Russian).

2. ***Andreev L. V.*** Dynamics of the shells and plates with attached masses / L. V. Andreev, A. L. Dyshko, I. D. Pavlenko − Moskow: Mashinostroenie, 1988. − 195 p. (in Russian).

3. ***Babich D. V.*** Free vibrations of shells of revolution from temperature-sensitive composite materials / D. V. Babich, V. V. Vorobey, V. I. Tarasyuk, L. P. Khoroshun // Applied mechanics. – 1992. − Vol. 28 – No 4. − P. 8–16. (in Russian).

4. ***Bogdanovich A. E.*** Free vibrations of ribbed orthotropic cylindrical shells / A. E. Bogdanovich, V. A. Zarutskiy // Applied mechanics. – 1991. − Vol. 27. – No 10. − P. 83–90. (in Russian).

5. ***Bolotin V. V.*** Mechanics of multilayered structures / V. V. Bolotin, Yu. N. Novichkov. – Moskow: Mashinostroenie, 1980. – 376 p. (in Russian).

6. ***Vlasov O. I.*** Numerical study of free vibrations of the reinforced cylindrical shells with attached bodies / O. I. Vlasov, A. S. Kairov // Problems of computational mechanics and strength of structures. – Dnipropetrovs'k: Lira. – 2015. – Vol. 24. – P.26–34. (in Russian).

7. ***Grigolyuk E. I.*** Multilayer reinforced shell: Calculation of pneumatic tires / E. I. Grigolyuk, G. M. Kulikov. – Moskow: Mashinostroenie, 1988. – 288 p. (in Russian).

8. Composite materials: Handbook / V. V. Vasilyev, V. D. Protasov, V. V. Bolotin. Ed. by V. V. Vasilyev, Yu. M. Tarnopolskiy – Moskow: Mashinostroenie, 1990. – 512 p. (in Russian).

9. ***Kubenko V. D.*** Experimental study of vibrations and dynamic stability of shells made of laminated composite materials / V. D. Kubenko, P. S. Kovalchuk // Applied Mechanics. – 2009. – Vol. 45. – No.5. – P. 53–79. (in Russian).

10. ***Lehnitskiy S. G.*** Theory of elasticity of anisotropic body / S. G. Lehnitskiy. – Moskow: Nauka, 1977. – 416 p. (in Russian).

11. Mechanics of composite materials and structural elements: reference book / A. N. Guz, Ya. M. Grigorenko, I. Yu. Babich. – Vol. 2: Mechanics of structural elements. – Kyiv: Naukova Dumka, 1983. – 464 p. (in Russian).

12. Mechanics of composites / Ed. by V. D. Kubenko. – Vol. 9: Dynamics of structural elements. – Kyiv: A.C.K., 1999. – 379 p. (in Russian).

Національний університет
суднобудівництва ім. адмірала Макарова,
Миколаїв, Україна

Надійшла до редколегії 09.04.2017