ISSN 2079-1836
2017, вип. 27

УДК 539.3

М. І. Клименко, канд. фіз.-мат. наук, С. М. Гребенюк, д-р техн. наук,
А. М. Богуславська

ТЕРМОПРУЖНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ З ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИМИ МАТРИЦЕЮ І ВОЛОКНОМ

Пропонується підхід до визначення ефективних термопружних характеристик односпрямованого композиційного матеріалу. Композит, що складається з трансверсально-ізотропних волокна та матриці, моделюється суцільним однорідним трансверсально-ізотропним матеріалом. Застосування запропонованої методики дозволяє отримати термопружні характеристики композита у вигляді функцій термопружних характеристик його складових. Проведено розрахунок температурних коефіцієнтів для композиту з трансверсально-ізотропними матрицею і волокном.

Ключові слова: *матриця, волокно, композиційний матеріал, термопружні константи, температурні коефіцієнти лінійного розширення.*

Вступ. Важливим напрямком вдосконалення сучасної техніки є зменшення матеріаломісткості інженерних споруд та конструкцій, підвищення їх міцності. Розвитку технічного прогресу у цьому напрямку сприяє застосування композиційних матеріалів. У свою чергу, це обумовлює актуальність дослідження їх властивостей, зокрема термопружності, на основі математичного моделювання.

При розв’язанні температурних задач механіки волокнистих композитів, композиційний матеріал, як правило, представляється однорідним матеріалом. Властивості такого матеріалу залежать від термопружних характеристик матриці та волокна, а також об’ємної частки кожного з них у композиті. Врахування анізотропії термопружних властивостей складових композита дозволяє уточнити результати та побудувати більш адекватні моделі, підтверджені експериментальними дослідженнями. Так, поздовжні характеристики складових волокнистого композиту, іноді на порядок або на два відрізняються від поперечних характеристик.

При моделюванні напружено-деформованого стану композитів необхідно враховувати їх термопружні властивості, тому актуальною є задача визначення їх ефективних термопружних характеристик за відповідними характеристиками складових композита. Зокрема, деякі методи оцінки фізичних властивостей композитів розглянуті у [2, 5–8]. У [6, 8] для композиту побудовані залежності його температурних коефіцієнтів лінійного розширення від об’ємного вмісту волокна в композиті і термопружних сталих його складових. В [1] досліджено вплив технологічних параметрів на механічні властивості декількох типів вуглепластиків. Зв'язна нестаціонарна задача термопружності для неоднорідного тіла, що описується системою з чотирьох диференціальних рівнянь другого порядку в частинних похідних з коефіцієнтами, що залежать від координат, розглядається в [4]. Проблеми прогнозування реологічних властивостей композитів з термов'язкопружними характеристиками розглянуті в [9]. Для розв'язання цієї задачі пропонується методика, що ґрунтується на базі спільного застосування методу квазіконстантних операторів і методу скінченних елементів. У [3] розроблено аналітико-числову методику розрахунку термопружного стану термочутливих тіл простої геометричної форми, обмежених координатними поверхнями або їх фрагментами, за умов конвективно-променевого теплообміну через обмежувальні поверхні з навколишнім середовищем та одночасної дії силових навантажень. Сформульовані на базі побудованих математичних моделей крайові задачі для розрахунку температурних полів є нелінійними, а для визначення напружено-деформованого стану – містять системи диференціальних рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами. На базі запропонованих моделей і методів досліджено термопружний стан термочутливої кулі, суцільної та порожнистої куль, простору зі сферичною порожниною, пластини. Побудовано розв'язки задач променево-кондуктивного теплообміну для циліндричної та призматичної оболонок.

Метою даного дослідження є визначення всіх ефективних температурних коефіцієнтів лінійного розширення як функцій термопружних сталих трансверсально-ізотропних матриці і волокна, а також об'ємної частки кожного з них в композиті.

Постановка задачі та загальна схема її розв'язання. У роботі розглядається задача визначення ефективних термопружних коефіцієнтів лінійного розширення композиційного матеріалу. Об'єктом дослідження є односпрямований волокнистий композит. Його елементами є матриця та волокно, розташовані у матеріалі у вигляді сукупності елементарних гексагональних комірок (рис. 1). Матриця і волокно є трансверсально-ізотропними, причому площини ізотропії збігаються й розташовані перпендикулярно осі волокна.

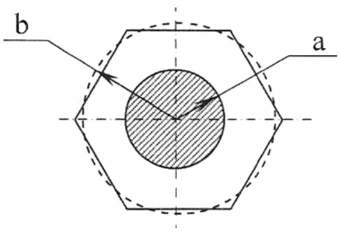

Рис. 1 – **Гексагональна комірка**

Елемент волокнистого композиційного матеріалу представимо у вигляді комбінації двох циліндрів нескінченної довжини – трансверсально-ізотропного порожнистого, що моделює матрицю, та трансверсально-ізотропного суцільного, що моделює волокно.

Нехай об'ємний вміст волокон в композиті дорівнює f. Тоді, враховуючи, що області, які займають матриця та волокно в елементарній комірці мають однакову висоту, виконується співвідношення

$$f = a^2 / b^2 .$$

Для знаходження температурних коефіцієнтів лінійного розширення розв'яжемо дві крайові задачі. Спочатку розв'язується крайова задача сумісного деформування трансверсально-ізотропної матриці та трансверсально-ізотропного волокна. В результаті її розв'язання отримуємо компоненти напружено-деформованого стану як функції термопружних сталих матеріалу матриці та матеріалу волокна, а також об'ємної частки кожного з них у композиті. Далі отримуємо розв'язок аналогічної крайової задачі для композита, який представляється однорідним трансверсально-ізотропним матеріалом із поки що невідомими пружними сталими. В результаті розв'язання отримуємо компоненти напружено-деформованого стану як функції невідомих термопружних сталих однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює композит. Умовою узгодження виступає рівність деяких компонентів вектору переміщень у обох задачах. Із цієї умови знаходимо ефективні температурні коефіцієнти лінійного розширення трансверсально-ізотропного матеріалу як функції термопружних сталих матеріалу матриці та матеріалу волокна, а також об'ємної частки кожного з них в композиті.

Розглянемо вісесиметричний напружено-деформований стан циліндричного тіла. У циліндричній системі координат $(r,\ \theta,\ z)$ два рівняння рівноваги для вісесиметричної задачі термопружності будуть виконуватись тотожно, а третє рівняння при масовій силі $G_r = 0$ набуває вигляду

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0. \qquad (1)$$

Закон Гука з урахуванням впливу сталої температури T для трансверсально-ізотропного матеріалу запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} - \alpha_{11} T &= \frac{1}{E_1}\left(\sigma_{zz} - \nu_{12}\left(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}\right)\right); \\ \varepsilon_{rr} - \alpha_{22} T &= \frac{1}{E_2}\left(\sigma_{rr} - \left(\nu_{21}\sigma_{zz} + \nu_{23}\sigma_{\theta\theta}\right)\right); \\ \varepsilon_{\theta\theta} - \alpha_{33} T &= \frac{1}{E_2}\left(\sigma_{\theta\theta} - \left(\nu_{21}\sigma_{zz} + \nu_{23}\sigma_{rr}\right)\right), \end{aligned} \qquad (2)$$

де $\alpha_{11},\ \alpha_{22},\ \alpha_{33}$ – температурні коефіцієнти лінійного розширення по осям $z,\ r,\ \theta$.

Якщо вважати осьове напруження сталим, то з (2) випливає, що $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}(r)$, $\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}(r)$, і, відповідно, $\varepsilon_{zz} = const,$. З урахуванням оберненого закону Гука для трансверсально-ізотропного матеріалу і рівнянь

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \qquad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_r}{r} \tag{3}$$

для вісесимметричного напружено-деформованого стану рівняння (1) запишеться у вигляді

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = \left(\frac{\nu_{12}(1+\nu_{23})}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{11} + \alpha_{22} + \frac{(\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{12})}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{33}\right)\frac{\partial T}{\partial r} -$$

$$-\frac{T(1-\nu_{23}-2\nu_{21}\nu_{12})(\alpha_{22}-\alpha_{33})}{r(1-\nu_{21}\nu_{12})}.$$

Розв’язок цієї задачі має вигляд

$$u_r(r) = \left(\frac{\nu_{12}(\nu_{23}+1)}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{11} + \alpha_{22} + \frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{12}}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{33}\right)\cdot\frac{1}{r}\int_{r_1}^{r_2} Trdr + C_1 r + \frac{C_2}{r},$$

де C_1 і C_2 – сталі, що визначаються з граничних умов. Звідси, використовуючи (3), отримуємо:

$$\varepsilon_{rr}(r) = \frac{du_r}{dr} = -\left(\frac{\nu_{12}(\nu_{23}+1)}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{11} + \alpha_{22} + \frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{12}}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{33}\right)\cdot\left(\frac{1}{r^2}\int_{r_1}^{r_2} Trdr - T\right) +$$

$$+C_1 - \frac{C_2}{r^2};$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}(r) = \frac{u_r}{r} = \left(\frac{\nu_{12}(\nu_{23}+1)}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{11} + \alpha_{22} + \frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{12}}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{33}\right)\cdot\frac{1}{r^2}\int_{r_1}^{r_2} Trdr + C_1 + \frac{C_2}{r^2}.$$

Скориставшись оберненим законом Гука для трансверсально-ізотропного матеріалу, отримуємо:

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{E_2\left[\nu_{12}(1+\nu_{23})\varepsilon_{zz} + (1+\nu_{23})C_1 + (\nu_{23}+2\nu_{21}\nu_{12}-1)\cdot C_2/r^2\right]}{1-2\nu_{21}\nu_{12}-\nu_{23}^2-2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{21}} -$$

$$-\frac{E_2}{1+\nu_{23}}\cdot\left(\frac{\nu_{12}(\nu_{23}+1)}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{11} + \alpha_{22} + \frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{12}}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{33}\right)\cdot\frac{1}{r^2}\int_{r_1}^{r_2} Trdr;$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r)=\frac{E_2\left[\nu_{12}(1+\nu_{23})\varepsilon_{zz}+(1+\nu_{23})C_1+(1-\nu_{23}-2\nu_{21}\nu_{12})\frac{C_2}{r^2}\right]}{1-2\nu_{21}\nu_{12}-\nu_{23}^2-2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{21}}+$$

$$+\frac{E_2}{1+\nu_{23}}\cdot\left(\frac{\nu_{12}(\nu_{23}+1)}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{11}+\alpha_{22}+\frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{12}}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{33}\right)\cdot\frac{1}{r^2}\int_{r_1}^{r_2}Trdr-$$

$$-\frac{E_2T(\alpha_{33}+\nu_{12}\alpha_{11})}{1-\nu_{21}\nu_{12}}.$$

Підставляючи отримані співвідношення та значення $\sigma_{zz}=\sigma_0$ у вираз (2), знаходимо співвідношення для ε_{zz}

$$\varepsilon_{zz}=\frac{\sigma_0(1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu_{21})}{E_1(1-\nu_{23})}-\frac{2\nu_{21}C_1}{(1-\nu_{23})}+\frac{T(\nu_{21}\alpha_{33}+\alpha_{11})(1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu_{21})}{(1-\nu_{21}\nu_{12})(1-\nu_{23})}.$$

Враховуючи співвідношення

$$\varepsilon_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z},$$

отримаємо вираз для осьових переміщень

$$u_z(z)=\int\varepsilon_{zz}dz=$$

$$=\left(\frac{\sigma_0(1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu_{21})}{E_1(1-\nu_{23})}-\frac{2\nu_{21}C_1}{(1-\nu_{23})}+\frac{T(\nu_{21}\alpha_{33}+\alpha_{11})(1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu_{21})}{(1-\nu_{21}\nu_{12})(1-\nu_{23})}\right)z+C_3. \quad (4)$$

За умови $u_z(0)=0$ маємо $C_3=0$. Співвідношення (4) набуває вигляду

$$u_z(z)=\left(\frac{\sigma_0(1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu_{21})}{E_1(1-\nu_{23})}-\frac{2\nu_{21}C_1}{(1-\nu_{23})}+\frac{T(\nu_{21}\alpha_{33}+\alpha_{11})(1-\nu_{23}-2\nu_{12}\nu_{21})}{(1-\nu_{21}\nu_{12})(1-\nu_{23})}\right)z. \quad (5)$$

З урахуванням отриманого співвідношення (5) вирази для напружень набудуть вигляду:

$$\sigma_{rr}(r)=E_2\left(\frac{\sigma_0\nu_{12}}{E_1(1-\nu_{23})}+\frac{C_1}{(1-\nu_{23})}-\frac{C_2}{r^2(1+\nu_{23})}\right)+\frac{E_2T\nu_{12}(\nu_{21}\alpha_{33}+\alpha_{11})}{(1-\nu_{21}\nu_{12})(1-\nu_{23})}-$$

$$-\frac{E_2}{1+\nu_{23}}\cdot\left(\frac{\nu_{12}(\nu_{23}+1)}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{11}+\alpha_{22}+\frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{12}}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{33}\right)\cdot\frac{1}{r^2}\int_{r_1}^{r_2}Trdr;$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = E_2\left(\frac{\sigma_0\nu_{12}}{E_1(1-\nu_{23})} + \frac{C_1}{(1-\nu_{23})} + \frac{C_2}{r^2(1+\nu_{23})}\right) +$$
$$+\frac{E_2T\left((\nu_{12}\nu_{21}+\nu_{23}-1)\alpha_{33}+\nu_{12}\nu_{23}\alpha_{11}\right)}{(1-\nu_{21}\nu_{12})(1-\nu_{23})} +$$
$$+\frac{E_2}{1+\nu_{23}}\cdot\left(\frac{\nu_{12}(\nu_{23}+1)}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{11}+\alpha_{22}+\frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{12}}{1-\nu_{21}\nu_{12}}\alpha_{33}\right)\cdot\frac{1}{r^2}\int_{r_1}^{r_2} Trdr\,.$$

Таким чином, для вісесиметричного напружено-деформованого стану отримані всі компоненти напружень, деформацій і переміщень як функції термопружних характеристик матеріалу і сталих.

Розв'язок задачі термопружності для вісесиметричних областей. Розглянемо сумісну температурну деформацію суцільного циліндра $0 \le r \le a$, що моделює волокно, і порожнистого циліндра $a \le r \le b$,що моделює матрицю.

Крайові умови підберемо таким чином, щоб вони відповідали експериментальним даним, отриманим для композиційного матеріалу. В місці зчеплення волокна з матрицею відсутній стрибок за радіальним переміщенням та радіальним напруженням, для довільного $z = h$ осьові переміщення і волокна, і матриці сталі й однакові:

$$\sigma^{\circ}_{rr}(a) = \sigma^{*}_{rr}(a), \qquad u^{\circ}_r(a) = u^{*}_r(a), \quad u^{\circ}_z(h) = u^{*}_z(h)\,. \tag{6}$$

Тут і далі символом $^{\circ}$ будемо позначати величини, що відносяться до волокна, а символом * – величини, що відносяться до матриці.

Враховуючи крайові умови, маємо

$$\sigma^{*}_{rr}(b) = 0\,. \tag{7}$$

Оскільки $\alpha_{22} = \alpha_{33}$, радіальні переміщення трансверсально-ізотропного волокна будуть описуватись співвідношенням

$$u^{\circ}_r(r) = \frac{\left(1+\nu^{\circ}_{23}\right)\left(\nu^{\circ}_{12}\alpha^{\circ}_{11}+\alpha^{\circ}_{22}\right)}{1-\nu^{\circ}_{21}\nu^{\circ}_{12}}\cdot\frac{1}{r}\int_0^r Trdr + C_1 r + \frac{C_2}{r}\,,$$

а враховуючи, що при $r = 0$, $u^{\circ}_r(r)$ обмежене, випливає, що $C_2 = 0$. Тоді це співвідношення запишеться у вигляді (перепозначимо C_1 на C):

$$u^{\circ}_r(r) = \frac{\left(1+\nu^{\circ}_{23}\right)\left(\nu^{\circ}_{12}\alpha^{\circ}_{11}+\alpha^{\circ}_{22}\right)}{1-\nu^{\circ}_{21}\nu^{\circ}_{12}}\cdot\frac{Tr}{2} + Cr\,. \tag{8}$$

Напружено-деформований стан трансверсально-ізотропного волокна буде описуватися, окрім (8), такими співвідношеннями:

$$u_z^{\circ}(z)=\left(\frac{\sigma_0^{\circ}\left(1-\nu_{23}^{\circ}-2\nu_{12}^{\circ}\nu_{21}^{\circ}\right)}{E_1^{\circ}\left(1-\nu_{23}^{\circ}\right)}-\frac{2\nu_{21}^{\circ}C}{1-\nu_{23}^{\circ}}+\frac{T\left(\nu_{21}^{\circ}\alpha_{22}^{\circ}+\alpha_{11}^{\circ}\right)\left(1-\nu_{23}^{\circ}-2\nu_{12}^{\circ}\nu_{21}^{\circ}\right)}{\left(1-\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ}\right)\left(1-\nu_{23}^{\circ}\right)}\right)z\,;$$

$$\sigma_{rr}^{\circ}(r)=\frac{E_2^{\circ}}{1-\nu_{23}^{\circ}}\left(\frac{\sigma_0^{\circ}\nu_{12}^{\circ}}{E_1^{\circ}}+C\right)+\frac{E_2^{\circ}T\nu_{12}^{\circ}\left(\nu_{21}^{\circ}\alpha_{22}^{\circ}+\alpha_{11}^{\circ}\right)}{\left(1-\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ}\right)\left(1-\nu_{23}^{\circ}\right)}-\frac{E_2^{\circ}\left(\nu_{12}^{\circ}\alpha_{11}^{\circ}+\alpha_{22}^{\circ}\right)}{1-\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ}}\cdot\frac{T}{2}\,;$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{\circ}(r)=\frac{E_2^{\circ}}{1-\nu_{23}^{\circ}}\left(\frac{\sigma_0^{\circ}\nu_{12}^{\circ}}{E_1^{\circ}}+C\right)+$$

$$+\frac{E_2^{\circ}T\left(\left(\nu_{12}^{\circ}\nu_{21}^{\circ}+\nu_{23}^{\circ}-1\right)\alpha_{22}^{\circ}+\nu_{12}^{\circ}\nu_{23}^{\circ}\alpha_{11}^{\circ}\right)}{\left(1-\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ}\right)\left(1-\nu_{23}^{\circ}\right)}+\frac{E_2^{\circ}\left(\nu_{12}^{\circ}\alpha_{11}^{\circ}+\alpha_{22}^{\circ}\right)}{1-\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ}}\cdot\frac{T}{2}\,.$$

Аналогічно запишемо співвідношення, які описують напружено-деформований стан трансверсально-ізотропної матриці (перепозначимо C_1 на A, а C_2 на B):

$$u_z^{*}(z)=$$

$$=\left(\frac{\sigma_0^{*}\left(1-\nu_{23}^{*}-2\nu_{12}^{*}\nu_{21}^{*}\right)}{E_1^{*}\left(1-\nu_{23}^{*}\right)}-\frac{2\nu_{21}^{*}A}{1-\nu_{23}^{*}}+\frac{T\left(\nu_{21}^{*}\alpha_{22}^{*}+\alpha_{11}^{*}\right)\left(1-\nu_{23}^{*}-2\nu_{12}^{*}\nu_{21}^{*}\right)}{\left(1-\nu_{21}^{*}\nu_{12}^{*}\right)\left(1-\nu_{23}^{*}\right)}\right)z\,;\quad(9)$$

$$u_r^{*}(r)=\frac{\left(1+\nu_{23}^{*}\right)\left(\nu_{12}^{*}\alpha_{11}^{*}+\alpha_{22}^{*}\right)}{1-\nu_{21}^{*}\nu_{12}^{*}}\cdot\frac{T\left(r^2-a^2\right)}{2r}+Ar+\frac{B}{r}\,;$$

$$\sigma_{rr}^{*}(r)=E_2^{*}\left(\frac{\sigma_0^{*}\nu_{12}^{*}}{E_1^{*}\left(1-\nu_{23}^{*}\right)}+\frac{A}{1-\nu_{23}^{*}}-\frac{B}{r^2\left(\nu_{23}^{*}+1\right)}\right)+\frac{E_2^{*}T\nu_{12}^{*}\left(\nu_{21}^{*}\alpha_{22}^{*}+\alpha_{11}^{*}\right)}{\left(1-\nu_{21}^{*}\nu_{12}^{*}\right)\left(1-\nu_{23}^{*}\right)}-$$

$$-\frac{E_2^{*}\left(\alpha_{22}^{*}+\nu_{12}^{*}\alpha_{11}^{*}\right)}{1-\nu_{21}^{*}\nu_{12}^{*}}\cdot\frac{T\left(r^2-a^2\right)}{2r^2}\,;$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{*}(r)=E_2^{*}\left(\frac{\sigma_0^{*}\nu_{12}^{*}}{E_1^{*}\left(1-\nu_{23}^{*}\right)}+\frac{A}{1-\nu_{23}^{*}}+\frac{B}{r^2\left(\nu_{23}^{*}+1\right)}\right)+$$

$$+\frac{E_2^* T\cdot\left(\left(\nu_{12}^*\nu_{21}^*+\nu_{23}^*-1\right)\alpha_{22}^*+\nu_{23}^*\nu_{12}^*\alpha_{11}^*\right)}{\left(1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*\right)\left(1-\nu_{23}^*\right)}+\frac{E_2^*\left(\alpha_{22}^*+\nu_{12}^*\alpha_{11}^*\right)}{1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*}\cdot\frac{T\left(r^2-a^2\right)}{2r^2}.$$

Виходячи з крайових умов (6) та (7), знаходимо сталі A, B і C та залежність між σ_0° і σ_0^*. Використовуючи другу рівність (6), маємо

$$C=A+\frac{B}{a^2}-\frac{T}{2}\cdot\frac{\left(1+\nu_{23}^\circ\right)\left(\nu_{12}^\circ\alpha_{11}^\circ+\alpha_{22}^\circ\right)}{1-\nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ}. \tag{10}$$

Із рівності (7) отримуємо

$$A=\frac{B\left(1-\nu_{23}^*\right)}{b^2\left(1+\nu_{23}^*\right)}-\frac{\sigma_0^*\nu_{12}^*}{E_1^*}-\frac{T\nu_{12}^*\left(\nu_{21}^*\alpha_{22}^*+\alpha_{11}^*\right)}{1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*}+$$

$$+\frac{T\left(1-\nu_{23}^*\right)(1-f)\left(\nu_{12}^*\alpha_{11}^*+\alpha_{22}^*\right)}{2\left(1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*\right)}.$$

Тоді (10) запишеться у вигляді

$$C=B\left(\frac{f\left(1-\nu_{23}^*\right)+\left(1+\nu_{23}^*\right)}{a^2\left(1+\nu_{23}^*\right)}\right)-\frac{\sigma_0^*\nu_{12}^*}{E_1^*}-\frac{T\nu_{12}^*\left(\nu_{21}^*\alpha_{22}^*+\alpha_{11}^*\right)}{1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*}+$$

$$+\frac{T(1-f)\left(1-\nu_{23}^*\right)\left(\nu_{12}^*\alpha_{11}^*+\alpha_{22}^*\right)}{2\left(1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*\right)}-\frac{T\left(1+\nu_{23}^\circ\right)\left(\nu_{12}^\circ\alpha_{11}^\circ+\alpha_{22}^\circ\right)}{2\left(1-\nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ\right)}.$$

Позначивши

$$d_1=E_2^*(f-1)\left(1-\nu_{23}^\circ\right);\qquad d_2=E_2^\circ\left(f\left(1-\nu_{23}^*\right)+\left(1+\nu_{23}^*\right)\right),$$

з першої рівності (6) маємо

$$B=\frac{a^2E_2^\circ\left(1+\nu_{23}^*\right)}{d_1-d_2}\left(\frac{\sigma_0^\circ\nu_{12}^\circ}{E_1^\circ}-\frac{\sigma_0^*\nu_{12}^*}{E_1^*}\right)-\frac{a^2TE_2^\circ\left(1+\nu_{23}^*\right)}{d_1-d_2}\left(\frac{\nu_{12}^*\left(\nu_{21}^*\alpha_{22}^*+\alpha_{11}^*\right)}{1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*}+\alpha_{22}^0\right)+$$

$$+\frac{a^2T\left(1+\nu_{23}^*\right)\left(\nu_{12}^*\alpha_{11}^*+\alpha_{22}^*\right)\left(d_1+E_2^o\left(1-\nu_{23}^*\right)(1-f)\right)}{2\left(d_1-d_2\right)\left(1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*\right)}.$$

Тоді

$$C = \frac{d_2 \overset{\circ}{\nu}_{12}}{\left(d_1 - d_2\right) \overset{\circ}{E}_1} \overset{\circ}{\sigma}_0 - \frac{d_1 \overset{*}{\nu}_{12}}{\left(d_1 - d_2\right) \overset{*}{E}_1} \overset{*}{\sigma}_0 + \frac{T\left(d_1 \overset{*}{\alpha}_{22} - d_2 \overset{\circ}{\alpha}_{22}\right)}{d_1 - d_2} - \frac{T\left(1 + \overset{\circ}{\nu}_{23}\right)\left(\overset{\circ}{\nu}_{12} \overset{\circ}{\alpha}_{11} + \overset{\circ}{\alpha}_{22}\right)}{2\left(1 - \overset{\circ}{\nu}_{21} \overset{\circ}{\nu}_{12}\right)};$$

$$A = \frac{\overset{\circ}{\nu}_{21} f \left(1 - \overset{*}{\nu}_{23}\right)}{d_1 - d_2} \overset{\circ}{\sigma}_0 - \frac{\overset{*}{\nu}_{12}}{\overset{*}{E}_1} \cdot \frac{f \overset{\circ}{E}_2 \left(1 - \overset{*}{\nu}_{23}\right) + d_1 - d_2}{d_1 - d_2} \overset{*}{\sigma}_0 +$$

$$+ \frac{T\left(1 - \overset{*}{\nu}_{23}\right)\left(\overset{*}{\nu}_{12} \overset{*}{\alpha}_{11} + \overset{*}{\alpha}_{22}\right)}{2\left(1 - \overset{*}{\nu}_{21} \overset{*}{\nu}_{12}\right)} \cdot \frac{2 f \overset{\circ}{E}_2 + d_1 - d_2}{d_1 - d_2} -$$

$$- \frac{f T \overset{\circ}{E}_2 \left(1 - \overset{*}{\nu}_{23}\right)}{d_1 - d_2} \left(\frac{\overset{*}{\nu}_{12} \left(\overset{*}{\nu}_{21} \overset{*}{\alpha}_{22} + \overset{*}{\alpha}_{11}\right)}{1 - \overset{*}{\nu}_{21} \overset{*}{\nu}_{12}} + \overset{\circ}{\alpha}_{22} \right) - \frac{T \overset{*}{\nu}_{12} \left(\overset{*}{\nu}_{21} \overset{*}{\alpha}_{22} + \overset{*}{\alpha}_{11}\right)}{1 - \overset{*}{\nu}_{21} \overset{*}{\nu}_{12}}.$$

Нарешті, з третьої рівності (6) знаходимо співвідношення між $\overset{*}{\sigma}_0$ і $\overset{\circ}{\sigma}_0$. Нехай

$$d^{\circ} = \frac{\overset{*}{E}_2 \left(f - 1\right)\left(1 - \overset{\circ}{\nu}_{23} - 2 \overset{\circ}{\nu}_{12} \overset{\circ}{\nu}_{21}\right) - \overset{\circ}{E}_2 \left(f\left(1 - \overset{*}{\nu}_{23} - 2 \overset{\circ}{\nu}_{12} \overset{*}{\nu}_{21}\right) + \left(1 + \overset{*}{\nu}_{23}\right)\right)}{\overset{\circ}{E}_1};$$

$$d^{*} = \frac{\overset{*}{E}_2 \left(f - 1\right)\left(1 - \overset{\circ}{\nu}_{23} - 2 \overset{*}{\nu}_{12} \overset{\circ}{\nu}_{21}\right) - \overset{\circ}{E}_2 \left(f\left(1 - \overset{*}{\nu}_{23} - 2 \overset{*}{\nu}_{12} \overset{*}{\nu}_{21}\right) + \left(1 + \overset{*}{\nu}_{23}\right)\right)}{\overset{*}{E}_1},$$

тоді отримуємо

$$d^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}_0 - d^{*} \overset{*}{\sigma}_0 =$$

$$= T\left(2 \overset{\circ}{\nu}_{21} \overset{*}{E}_2 \left(f - 1\right) - 2 \overset{*}{\nu}_{21} \overset{\circ}{E}_2 f\right)\left(\overset{*}{\alpha}_{22} - \overset{\circ}{\alpha}_{22}\right) + \left(d_1 - d_2\right)\left(\overset{*}{\alpha}_{11} - \overset{\circ}{\alpha}_{11}\right). \quad (11)$$

Розглянемо тепер аналогічну задачу для однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює поведінку композиційного матеріалу. Нехай виконуються рівності

$$\sigma_{zr} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{r\theta} = 0.$$

Для того щоб збіглися умови рівноваги для обох задач, необхідно, щоб виконувалися умови:

$$\pi a^2 \overset{\circ}{\sigma}_0 + \pi\left(b^2 - a^2\right) \overset{*}{\sigma}_0 = 0 \quad \text{або} \quad \overset{\circ}{\sigma}_0 f + \overset{*}{\sigma}_0 \left(1 - f\right) = 0.$$

Використовуючи (11), отримуємо:

$$\sigma_0^* = \frac{\gamma T f}{d^\circ + f\left(d^* - d^\circ\right)}; \qquad \sigma_0^\circ = -\frac{\gamma T\left(1-f\right)}{d^\circ + f\left(d^* - d^\circ\right)}, \tag{12}$$

де $\gamma = \left(2\nu_{21}^\circ E_2^*\left(f-1\right) - 2\nu_{21}^* E_2^\circ f\right)\left(\alpha_{22}^\circ - \alpha_{22}^*\right) + \left(d_1 - d_2\right)\left(\alpha_{11}^\circ - \alpha_{11}^*\right)$.

У випадку відсутності дії сил виникають лише температурні деформації:

$$\varepsilon_{rr} = \alpha_{22} T; \qquad \varepsilon_{zz} = \alpha_{11} T.$$

Тоді переміщення будуть визначатися за формулами:

$$u_r\left(r\right) = \alpha_{22} T r + C_1; \qquad u_z\left(z\right) = \alpha_{11} T z + C_2 .$$

Сталі $C_1 = C_2 = 0$ з урахуванням того, що для цієї задачі будуть виконуватися умови $u_r\left(0\right) = 0$ та $u_z\left(0\right) = 0$. Тоді має місце

$$u_r\left(r\right) = \alpha_{22} T r; \qquad u_z\left(z\right) = \alpha_{11} T z. \tag{13}$$

Умовами узгодження для задачі про поздовжнє розтягнення однорідного трасверсально-ізотропного композита та задачі про сумісне поздовжнє розтягнення матриці й волокна є рівність осьових переміщень для довільної осьової координати та рівність радіальних переміщень на зовнішній частині циліндричної поверхні:

$$u_r\left(b\right) = u_r^*\left(b\right); \tag{14}$$

$$u_z\left(h\right) = u_z^\circ\left(h\right) = u_z^*\left(h\right). \tag{15}$$

Тоді співвідношення (15), з урахуванням (9), (13), запишемо у вигляді

$$\frac{1}{1-\nu_{23}^*}\left(\frac{\sigma_0^*\left(1-\nu_{23}^* - 2\nu_{12}^*\nu_{21}^*\right)}{E_1^*} - 2A\nu_{21}^* + \frac{T\left(\nu_{21}^*\alpha_{22}^* + \alpha_{11}^*\right)\left(1-\nu_{23}^* - 2\nu_{12}^*\nu_{21}^*\right)}{\left(1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*\right)}\right) = \alpha_{11} T.$$

Використовуючи (12) та вираз, отриманий раніше для A, матимемо

$$\alpha_{11} = \frac{\gamma f d^*}{\left(d^\circ + f\left(d^* - d^\circ\right)\right)\left(d_1 - d_2\right)} + \frac{2\nu_{21}^* f E_2^\circ}{d_1 - d_2}\left(\alpha_{22}^\circ - \alpha_{22}^*\right) + \alpha_{11}^*. \tag{16}$$

З умови (14) знайдемо вираз для α_{22}. Тоді

$$\frac{\left(1+\nu_{23}^*\right)\left(\alpha_{22}^* + \nu_{12}^*\alpha_{11}^*\right)}{1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*}\cdot\frac{T}{2}\left(1-f\right) + A + \frac{B}{b^2} = \alpha_{22} T.$$

Підставимо вирази для констант A і B , отримаємо

$$\alpha_{22} = -\frac{\gamma f}{\left(d_1 - d_2\right)\left(d^{\circ} + f\left(d^{*} - d^{\circ}\right)\right)}\left(2\nu_{21}^{\circ}\left(1-f\right) + \frac{\nu_{12}^{*}\left(2fE_2^{\circ} + d_1 - d_2\right)}{E_1^{*}}\right) +$$

$$+\frac{2fE_2^{\circ}}{d_1 - d_2}\left(\alpha_{22}^{*} - \alpha_{22}^{\circ}\right) + \alpha_{22}^{*}. \qquad (17)$$

Визначимо термопружні характеристики для волокнистого композиту з наступними характеристиками. Матеріал матриці: модуль пружності $E_1^{*} = E_2^{*} = 10^6$ $МПа$, коефіцієнт Пуассона $\nu_{12}^{*} = \nu_{21}^{*} = \nu_{23}^{*} = 0,4$, температурні коефіцієнти лінійного розширення $\alpha_{11}^{*} = \alpha_{22}^{*} = \alpha_{33}^{*} = 10^{-5}$ K^{-1}. Матеріал волокна: модуль пружності $E_1^{\circ} = 10^9$ $МПа$, $E_2^{\circ} = k \cdot E_1^{\circ}$, коефіцієнт Пуассона $\nu_{12}^{\circ} = \nu_{23}^{\circ} = 0,3$, $\nu_{21}^{\circ} = \nu_{12}^{\circ} \cdot E_2^{\circ} / E_1^{\circ}$, температурні коефіцієнти лінійного розширення $\alpha_{11}^{\circ} = 10^{-6}$ K^{-1}, $\alpha_{22}^{\circ} = \alpha_{33}^{\circ} = k \cdot \alpha_{11}^{\circ}$.

Скориставшись формулами (16), (17), отримаємо залежності, зображені відповідно на рис. 2 та рис. 3.

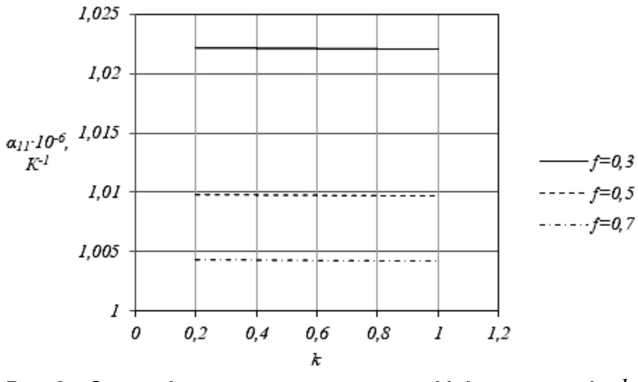

Рис. 2 – **Залежність температурного коефіцієнта** α_{11} **від** k

На графіках, наведених на рис. 2 та рис. 3 відображена залежність температурних коефіцієнтів α_{11} та α_{22} від k при k ϵ $[0,2\ ;\ 1]$. Графіки побудовані для різних значень об’ємного вмісту волокна f в композиті, а саме: $f = 0,3$, $f = 0,5$, $f = 0,7$. Зі збільшенням k значення коефіцієнта лінійного термопружного розширення α_{11} зазнає незначного зменшення. При збільшенні k зростає значення коефіцієнта лінійного термопружного розширення α_{22} . З побудованих графіків видно, що дані залежності близькі до лінійних.

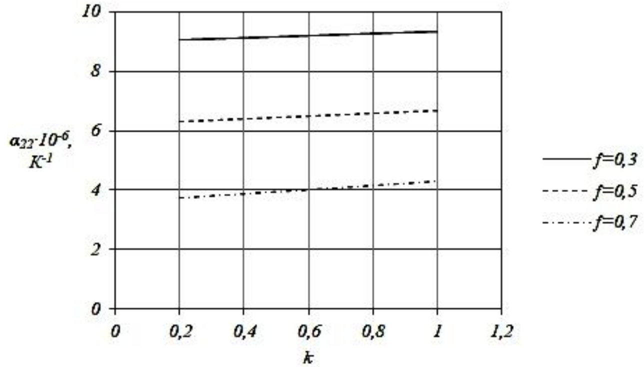

Рис. 3 – **Залежність температурного коефіцієнта** α_{22} **від** k

Висновки. Запропоновано методику гомогенізації термопружних характеристик односпрямованого композиту з трансверсально-ізотропними волокном і матрицею. Отримано аналітичні співвідношення для температурних коефіцієнтів лінійного розширення композиту як функції характеристик його складових і об'ємної частки волокна в композиті. Згідно із запропонованою методикою проведено розрахунок температурних коефіцієнтів для композиту з ізотропною матрицею і трансверсально-ізотропним волокном. Перспективи подальших досліджень у даному напрямку пов'язані з визначенням всіх ефективних характеристик композиційних матеріалів з анізотропними матрицею і волокном і застосуванням їх до розв'язання задач термопружності.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. ***Аношкин А. Н.*** Технологии и задачи механики композиционных материалов для создания лопатки спрямляющего аппарата авиационного двигателя / А. Н. Аношкин, В. Ю. Зуйко, Г. С. Шипунов, А. А. Третьяков // Вестн. ПНИПУ. – 2014. – №4. – С. 5–44.

2. ***Бойко Л. А.*** Зависимость температурных напряжений в компонентах стекловолокнистого композита от процентного содержания стеклянных волокон в материале / Л. А. Бойко, Л. С. Ксендзенко, Н. Ю. Василенко, Д. С. Баева // Вестн. инженерной школы ДВФУ. – 2013. – №4 (17). – С. 76–81.

3. ***Вовк О. М.*** Аналітико-числове розв'язування задач термопружності за конвективно-променевого теплообміну: автореф. дис. канд. фіз.-мат. наук / О. М. Вовк. – Львів: Ін-т прикл. пробл. мех. і матем. ім. Я. С. Підстригача, 2008. – 20 с.

4. ***Горбачев В. И.*** Интегральные формулы в связанной задаче термоупругости неоднородного тела. Применение в механике композитов / В. И. Горбачев // Прикл. математика и механика. – 2014. – Т. 78. – № 2. – С. 277–299.

5. ***Зарубин В. С.*** Оценка методом самосогласования эффективной теплопроводности трансверсально изотропного композита с изотропными эллипсоидальными включениями / В. С. Зарубин,. Г. Н. Кувыркин, И. Ю. Савельева // Вестн. Московского гос. техн. ун-та им. Н. Э. Баумана. – 2015. – № 4 (61). – С. 99–110.

6. ***Карпинос Д. М.*** Композиционные материалы. Справочник / Д. М. Карпинос. – К.: Наук. думка, 1985. – 593 с.

7. ***Козуб Г. О.*** Зв'язана задача термопружності для конструкцій з анізотропних матеріалів: дис. канд. тех. наук / Г. О. Козуб. – Запоріжжя: Запорізький нац. техн. ун-т, 2008. – 163 с.

8. ***Кристенсен Р.*** Введение в механику композитов / Р. Кристенсен. – М.: Мир, 1982. – 336 с.

9. ***Куимова Е. В.*** Численное прогнозирование эффективных термовязкоупругих характеристик однонаправленного волокнистого композита с вязкоупругими компонентами / Е. В. Куимова, Н. А. Труфанов // Вестник СамГУ. – 2009. – №4 (70). – С. 129–148.

УДК 539.3

М. И. Клименко, канд. физ.-мат. наук,
С. Н. Гребенюк, д-р техн. наук, А. М. Богуславская

ТЕРМОУПРУГИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА С ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫМИ МАТРИЦЕЙ И ВОЛОКНОМ

Предлагается методика определения эффективных термоупругих характеристик однонаправленного композиционного материала. Композит, состоящий из трансверсально-изотропных волокна и матрицы, моделируется сплошным однородным трансверсально-изотропным материалом. Применение предложенной методики позволяет получить термоупругие характеристики композита в виде функций термоупругих характеристик его составляющих. Проведен расчет температурных коэффициентов для композита с трансверсально-изотропными матрицей и волокном.

Ключевые слова: *матрица, волокно, композиционный материал, термоупругие постоянные, температурные коэффициенты линейного расширения.*

UDC 539.3

M. I. Klymenko, PhD (Tech.), S. M. Grebeniuk, Dr. Sci. (Tech.)
A. M. Boguslavska

THERMOMECHANICAL BEHAVIOR OF THE FIBER COMPOSITE MATERIAL WITH TRANSVERSAL-ISOTROPIC MATRIX AND FIBER

The methodology of determination of the effective thermoelastic characteristics of the unidirectional composite is proposed. The composite consisting of transversal-isotropic fiber and matrix is modeled by the solid homogeneous transversal-isotropic material. Application of the proposed methodology allows obtaining composite's thermoelastic characteristics in the form of functions of thermoelastic functions of its components. Calculation of the temperature coefficients for the composite with the transversal-isotropic matrix and fiber is made.

Keywords: *matrix, fiber, composite material, thermoelastic constants, coefficient of thermoelastic linear expansion.*

We describe the definition of effective coefficients of linear expansion of composite material. The subject of research is the unidirectional composite with hexagonal fibers. We suppose that the matrix and the fiber are transversal-isotropic materials, whereby the isotropic plane is situated vertical to the fiber axis. The element of fiber composite material is represented as the combination of two cylinders of infinite length – transversal-isotropic hollow $a \le r \le b$ cylinder modeling matrix and transversal-isotropic solid $0 \le r \le a$ cylinder modeling the fiber. Thermoelastic coefficients of linear expansion are found as a result of solution of two boundary problems. We solve the boundary problem of joint deformation of matrix and fiber. As a result of the solution we obtain the components of the vector of displacement:

$$u_r(r) = \left(\frac{\nu_{12}(\nu_{23}+1)}{1-\nu_{21}\nu_{12}} \alpha_{11} + \alpha_{22} + \frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{12}}{1-\nu_{21}\nu_{12}} \alpha_{33} \right) \cdot \frac{1}{r} \int_{r_1}^{r_2} Trdr + C_1 r + \frac{C_2}{r} ;$$

$$\sigma_{rr}(r) = E_2 \left(\frac{\sigma_0 \nu_{12}}{E_1(1-\nu_{23})} + \frac{C_1}{(1-\nu_{23})} - \frac{C_2}{r^2(1+\nu_{23})} \right) + \frac{E_2 T \nu_{12}(\nu_{21}\alpha_{33}+\alpha_{11})}{(1-\nu_{21}\nu_{12})(1-\nu_{23})} -$$

$$- \frac{E_2}{1+\nu_{23}} \cdot \left(\frac{\nu_{12}(\nu_{23}+1)}{1-\nu_{21}\nu_{12}} \alpha_{11} + \alpha_{22} + \frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{12}}{1-\nu_{21}\nu_{12}} \alpha_{33} \right) \cdot \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^{r_2} Trdr ;$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = E_2 \left(\frac{\sigma_0 \nu_{12}}{E_1(1-\nu_{23})} + \frac{C_1}{(1-\nu_{23})} + \frac{C_2}{r^2(1+\nu_{23})} \right) +$$

$$+ \frac{E_2 T\left((\nu_{12}\nu_{21}+\nu_{23}-1)\alpha_{33}+\nu_{12}\nu_{23}\alpha_{11}\right)}{(1-\nu_{21}\nu_{12})(1-\nu_{23})} +$$

$$+ \frac{E_2}{1+\nu_{23}} \cdot \left(\frac{\nu_{12}(\nu_{23}+1)}{1-\nu_{21}\nu_{12}} \alpha_{11} + \alpha_{22} + \frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{12}}{1-\nu_{21}\nu_{12}} \alpha_{33} \right) \cdot \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^{r_2} Trdr ,$$

where α_{11}, α_{22}, α_{33} – are temperature coefficients of linear expansion along the axes z, r, θ.

The symbol $^\circ$ – we will denote the values that belong to the fiber, and the symbol * – the values related to the matrix. Using the boundary conditions:

$$\overset{\circ}{\sigma}_{rr}(a) = \overset{*}{\sigma}_{rr}(a); \quad \overset{\circ}{u}_r(a) = \overset{*}{u}_r(a); \quad \overset{*}{\sigma}_{rr}(b) = 0 ,$$

we find elastic constants C_1, C_2 and the dependence between $\overset{\circ}{\sigma}_0$, $\overset{*}{\sigma}_0$:

$$\overset{\circ}{d}\,\overset{\circ}{\sigma}_0 - \overset{*}{d}\,\overset{*}{\sigma}_0 =$$

$$= T\left(2\overset{\circ}{\nu}_{21}\overset{*}{E}_2(f-1) - 2\overset{*}{\nu}_{21}\overset{\circ}{E}_2 f\right)\left(\overset{*}{\alpha}_{22} - \overset{\circ}{\alpha}_{22}\right) + (d_1 - d_2)\left(\overset{*}{\alpha}_{11} - \overset{\circ}{\alpha}_{11}\right), \qquad (1)$$

where

$$d_1 = E_2^*\left(f-1\right)\left(1-\nu_{23}^\circ\right),\; d_2 = E_2^\circ\left(f\left(1-\nu_{23}^*\right)+\left(1+\nu_{23}^*\right)\right),$$

$$d^\circ = \frac{E_2^*\left(f-1\right)\left(1-\nu_{23}^\circ-2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^\circ\right)-E_2^\circ\left(f\left(1-\nu_{23}^*-2\nu_{12}^\circ\nu_{21}^*\right)+\left(1+\nu_{23}^*\right)\right)}{E_1^\circ};$$

$$d^* = \frac{E_2^*\left(f-1\right)\left(1-\nu_{23}^\circ-2\nu_{12}^*\nu_{21}^\circ\right)-E_2^\circ\left(f\left(1-\nu_{23}^*-2\nu_{12}^*\nu_{21}^*\right)+\left(1+\nu_{23}^*\right)\right)}{E_1^*}.$$

Next, we obtain the solution of an analogous boundary problem for a composite which is represented by a homogenous transversal-isotropic material. As a result of the solution we obtain the components of the stress-strain state as the function of unknown thermoelastic constants of a homogenous transversal-isotropic material modeling the composite:

$$u_r\left(r\right)=\alpha_{22}Tr; \qquad u_z\left(z\right)=\alpha_{11}Tz.$$

It is necessary that the conditions are fulfilled:

$$\pi a^2\sigma_0^\circ+\pi\left(b^2-a^2\right)\sigma_0^*=0, \text{ or } \sigma_0^\circ f+\sigma_0^*\left(1-f\right)=0.$$

Using (1), we obtain:

$$\sigma_0^* = \frac{\gamma Tf}{d^\circ+f\left(d^*-d^\circ\right)}; \qquad \sigma_0^\circ = -\frac{\gamma T\left(1-f\right)}{d^\circ+f\left(d^*-d^\circ\right)},$$

where $\gamma=\left(2\nu_{21}^\circ E_2^*\left(f-1\right)-2\nu_{21}^* E_2^\circ f\right)\left(\alpha_{22}^\circ-\alpha_{22}^*\right)+\left(d_1-d_2\right)\left(\alpha_{11}^\circ-\alpha_{11}^*\right)$.

The conditions of agreement for the problem of longitudinal extension of a homogeneous transversal-isotropic composite as well as the problem of the joint longitudinal extension of the matrix and fiber are the equality of axial displacements for an arbitrary axial coordinate and the equality of radial displacements on the outer part of the cylindrical surface:

$$u_r\left(b\right)=u_r^*\left(b\right); \qquad u_z\left(h\right)=u_z^*\left(h\right).$$

By applying these conditions, one can find effective temperature coefficients for linear expansion of the transversal-isotropic material as a function of the thermoelastic constant material of the matrix and fiber material, as well as the volume fraction of each of them in the composite:

$$\alpha_{11}=\frac{\gamma f d^*}{\left(d^\circ+f\left(d^*-d^\circ\right)\right)\left(d_1-d_2\right)}+\frac{2\nu_{21}^* f E_2^\circ}{d_1-d_2}\left(\alpha_{22}^\circ-\alpha_{22}^*\right)+\alpha_{11}^*;$$

$$\alpha_{22} = -\frac{\gamma f}{(d_1 - d_2)\left(d^{\circ} + f\left(d^{*} - d^{\circ}\right)\right)}\left(2\nu_{21}^{\circ}(1-f) + \frac{\nu_{12}^{*}\left(2fE_2^{\circ} + d_1 - d_2\right)}{E_1^{*}}\right) +$$

$$+\frac{2fE_2^{\circ}}{d_1 - d_2}\left(\alpha_{22}^{*} - \alpha_{22}^{\circ}\right) + \alpha_{22}^{*}.$$

As a result, we obtain the analytical relations for the temperature coefficients of linear expansion of the composite as a function of the characteristics of its components and the volume fraction of fiber in the composite. According to the proposed method, we carry out the calculation of temperature coefficients for a composite with an isotropic matrix and transversal-isotropic fiber.

REFERENCES

1. ***Anoshkin A. N.*** Technologies and problems of composite materials mechanics for production of outlet guide vane for aircraft jet engine / A. N. Anoshkin, V. Yu. Zuiko, G. S. Shipunov, A. A. Tretyakov // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2014. – No 4. – P. 5–44. (in Russian).

2. ***Boiko L. A.*** Dependence of temperature pressure in components of a glass-fiber composite from percentage of glass fibres in material / L. A. Boiko, L. S. Ksendzenko, N. Y. Vasilenko, D. S. Baeva // FEFU: School of Engineering Bulletin. – 2013. – No 4 (17). – P. 76–81. (in Russian).

3. ***Vovk O. M.*** Analytical and numerical solving of thermoelasticity problems for convective-radial heat transfer: the author's abstract of the candidate thesis / O. M. Vovk. – Lviv: Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics. – 2008. – 20 p. (in Ukrainian).

4. ***Gorbachev V. I.*** Integral formulas in the related problem of thermoelasticity of inhomogeneous body. Application in the Mechanics of Composites / V. I. Gorbachev // Prikladnaya matematika i mekhanika. – 2014. – Vol. 78. – No. 2. – P. 277–299. (in Russian).

5. ***Zarubin V. S.*** Estimation of the effective thermal conductivity of transversely isotropic composite with isotropic ellipsoidal inclusions by the method of self-correlation / V. S. Zarubin, G. N. Kuvyrkin, I. Yu. Savelyeva // Bulletin of the Bauman Moscow State Technical University. – 2015. – No 4 (61). – P. 99–110. (in Russian).

6. ***Karpinos D. M.*** Composite materials. Reference book / D. M. Karpinos. – Kiev: Nauk. dumka, 1985. – 593 p. (in Russian).

7. ***Kozub H. O.*** The connected problem of thermoelasticity for structures with anisotropic materials: the dissertation of the candidate of technical sciences / H. O. Kozub. – Zaporizhzhia: Zaporizhzhia National Technical University, 2008. – 163 p. (in Ukrainian).

8. ***Kristensen R.*** Introduction to Composite Mechanics / R. Kristensen. – Moskow: Mir, 1982. – 336 p. (in Russian).

9. ***Kuimova E. V.*** The numerical prediction of effective thermoviscoelastic properties of unidirectional fiber composite with the viscoelastic components / E. V. Kuimova, N. A. Trufanov // Vestnik of Samara State University. – 2009. – No 4 (70). – P. 129–148. (in Russian).

Запорізький національний
університет,
Запоріжжя, Україна

Надійшла до редколегії 12.05.2017