

УДК 534.1

*Т. С. Краснопольська, д-р фіз.-мат. наук*  
**ЕФЕКТ ЗОММЕРФЕЛЬДА – КОНОНЕНКА  
ТА ЙОГО ДОСЛІДЖЕННЯ**

Освітлено історію формування розділу механіки – системи з обмеженим збудженням, та його розвиток, огляд експериментів А. Зоммерфельда та фундаментальних робіт В. О. Кононенка і А. Х. Найфе. Виділено найбільш досліджені та перспективні напрямки розвитку проблематики взаємодії систем з механізмами збудження при урахуванні властивостей оточуючого середовища.

*Ключові слова:* ефект Зоммерфельда – Кононенка, обмежена потужність, динамічний хаос.

**Вступ.** Ця стаття є скромною даниною пам'яті видатного українського вченого - академіка АН України Віктора Олімпановича Кононенка, 100 років з дня народження якого виповнюється у вересні 2018 р. В. О. Кононенко (рис. 1) викладав на кафедрі теоретичної механіки в Київському державному університеті на протязі десяти років, являючись академіком Академії наук України з 1964 р. і директором Інституту механіки АН України з 1965 р. До цього він закінчив Харківський інститут інженерів залізничного транспорту, після чого працював на посаді інженера в локомотивному депо Київ-Пасажирський. За два роки він самостійно засвоїв програму механіко-математичного факультету Київського університету і в 1949 р. захистив кандидатську дисертацію. В. О. Кононенко багато років плідно працював у Інституті машинознавства Академії наук СРСР та Московському університеті до повернення в Україну. Його перу належить більш ніж 60 наукових праць. Автору пощастило слухати лекції Віктора Олімпановича, а також бути його аспіранткою. Життя вченого обірвалося несподівано рано в 1975 р., коли йому було всього 57 років.

**Ефект Зоммерфельда – Кононенка.** Під ефектом Зоммерфельда – Кононенка зараз розуміється таке загальне явище, як сукупність динамічних ефектів при взаємодії будь-якого виду збудника коливальних систем, коли вихідна потужність збудника є величиною, порівнянною з потужністю, яка споживається коливальними системами, в основному, при резонансних коливаннях.

Ідеальним джерелом енергії, згідно теорії, побудованої В. О. Кононенком, називається такий збудник, який функціонує незалежно, тобто не зазнаючи зворотного впливу з боку коливальної системи (насправді цей вплив нехтовно малий, чи існують додаткові коригуючі пристрої, які компенсують цей вплив). Ідеальне джерело впливає на систему по за-

здадегідь відомому закону, скажімо, гармонічному з наперед заданою амплітудою і частотою. Неідеальним джерелом називається таке, що при функціонуванні залежить від зворотного впливу з боку коливального навантаження, коли його потужність порівнянна з потужністю, яку споживає навантаження. В такому випадку джерело, або збудник, має обмежену потужність, а коливальна система знаходиться під обмеженим збудженням. Оскільки функціонування неідеального джерела енергії залежить від режиму коливань навантаження (резонансний чи нерезонансний), то його вплив не можна виразити у вигляді явної функції часу заздалегідь заданого виду.

Теорія коливальних систем з обмеженим збудженням сформувалась як самостійний науковий напрямок біля півстоліття тому, в 1964 р., після виходу книги Віктора Олімпановича Кононенка [8, 21].

Однак перші роботи, які заклали фундамент нового наукового напрямку, було опубліковано на самому початку минулого сторіччя видатним німецьким фізиком Арнольдом Зоммерфельдом (рис. 2). Він в 1902 р. опублікував дві основні статті по даній тематиці під одною назвою «Beitrage zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre» в журналах «Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure» та «Physikalische Zeitschrift» [39, 40].



Рис. 1 – Віктор Олімпанович Кононенко



Рис. 2 – Арнольд Зоммерфельд

В цей час 34-річний Зоммерфельд був професором, завідувачем кафедри технічної механіки Технічного університету в м. Аахен на заході Німеччини. 3 липня 1901 р. професор А. Зоммерфельд виступив з

доповіддю на засіданні Товариства німецьких інженерів (Vereines deutscher Ingenieure) в м. Аахен, в якій виклав результати своїх експериментальних досліджень. Метою експериментів був аналіз керованості функціонування електродвигунів та визначення умов проходження малопотужними електродвигунами резонансних зон коливань фундаментів, на яких вони були встановлені.

Найбільш простим в лабораторній реалізації фундаментом був звичайний дерев'яний стіл зі стільницею розмірами  $1\text{ м} \times 2,5\text{ м} \times 0,3\text{ м}$  на чотирьох соснових ніжках довжиною  $1\text{ м}$  з поперечним перетином  $0,063 \times 0,063\text{ м}^2$ , які кріпилися щільно до підлоги. На столі встановлювався електродвигун, до валу якого на відстані  $0,08\text{ м}$  від осі його обертавання закріплювався тягарець масою  $363\text{ г}$ . При обертанні цього тягарця на стіл буде діяти відцентрова сила, яка при  $310\text{ об/хв}$  дорівнювала  $3\text{ кс}$ . Швидкість обертання валу двигуна, змінювалась пропорційно до зміни електричного струму в ланцюзі двигуна, коли змінювались фізичні параметри пристрою. При цьому електрична напруга в ланцюзі електродвигуна  $\epsilon$ , як і слід очікувати, прямо пропорційною струму в ній. Аналогічно змінюється і потужність двигуна ( $Bm$ ). Таким чином, теоретично функціонування електродвигуна очікувалося бути простим у використанні: при збільшенні величини струму в ланцюзі збільшуються напруга та потужність, і як результат, збільшується швидкість обертання валу. На багатьох швидкісних інтервалах так все і відбувалося, крім деяких інтервалів значень, коли двигун виявляв несподівану, але цілком помітну «неслухняність». В таких інтервалах швидкість обертання валу двигуна ніби «завмирала», залишаючись постійною, незважаючи на повільне збільшення як струму, так і напруги. Потім, коли напруга досягала значення, яке гіпотетично відповідало б швидкості обертання на декілька сотень оборотів за хвилину більше, швидкість стрибком збільшувалась до необхідного значення.

На рис. 3 представлено копію оригінального рисунка з вказаних вище статей А. Зоммерфельда, де подано три криві: суцільною лінією показана крива зміни швидкості обертання валу двигуна (в обертах за хвилину), пунктирною - напруга в *Вольтах* і штрихпунктирною лінією зображено криву зміни потужності двигуна в *Ваттах*. Усі три криві представлені як функції зміни величини струму в *Амперах*, значення якого вказані по координатній осі абсцис.

З рис. 3 видно, що коли струм, наприклад, дорівнює  $i = 0,26\text{ А}$ , потужність дорівнює  $10\text{ Вт}$ , напруга –  $32\text{ В}$ , а швидкість обертання валу двигуна –  $310\text{ об/хв}$ . При збільшенні сили струму в ланцюзі такі характеристики, як напруга і потужність також збільшуються. В той же час швидкість обертання валу залишається постійною. Така картина спостерігається, доки струм не досягне значення близько  $0,47\text{ А}$ . При цьому потужність двигуна зростає і буде в 3 рази більшою, ніж досі, тобто вона буде дорівнювати  $30\text{ Вт}$ , напруга близько  $70\text{ В}$ , а швидкість обертання, як і раніше, –  $310\text{ об/хв}$ . Потім без значного збільшення струму і інших характеристик швидкість двигуна стрибком змінюється до величини  $750\text{ об/хв}$  за

хвилину, на 440 об/хв більше. Таким чином, швидкість стрибком збільшується більш, як в 2 рази! Підпис під рисунком А. Зоммерфельд зробив наступного змісту: «Тільки 1/3 роботи є корисною, 2/3 роботи втрачається».

Поясненню цієї дивної поведінки функціонування електромотора і присвячені були доповідь і стаття. А. Зоммерфельд зробив висновок, що мотор втратив 2/3 своєї потужності на підтримання резонансних коливань ніжок стола. Для пояснення цього факту він дослідив згинні коливання ніжок стола.

Зоммерфельд привів якісний рисунок картини, що спостерігається, який нами наведено на рис. 4. Тут зображені ніжки (довжиною  $l$ ) стола, які знаходяться під дією ваги  $Q$  та створюваної при обертанні ексцентрично розташованої ваги періодичної горизонтальної сили. Ця сила викликає згинні коливання ніжок, прогин яких позначено на рисунку як  $y$ . Коли двигун досягає швидкості обертання валу 310 об/хв, згинні коливання ніжок стають значними настільки, що стільниця починає досить помітно коливатись, як тверде ціле, в горизонтальній площині. Оскільки в експерименті змінювалась частота збуджуючої сили, а амплітуда залишалась, як і раніше, малою, то поява помітних коливань зі значною за величиною амплітудою свідчить про реалізацію умови резонансу їх коливань.

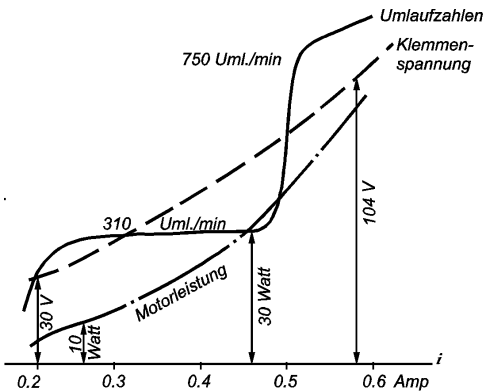


Рис. 3 – Характеристики електродвигуна в залежності від сили струму

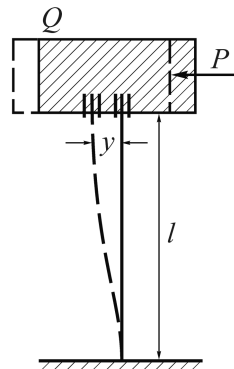


Рис. 4 – Модель згинних коливань ніжок стола

Саме до такого висновку і прийшов А. Зоммерфельд. При додатковому збільшенні струму в двигуні коливання лише підсилюються. Вся додаткова енергія двигуна при цьому витрачається на внутрішньому демпфіруванні при згинних коливаннях, тобто поглинається цими коливаннями. Тому не відбувається збільшення швидкості обертання валу двигуна. В тому, що коливання були резонансними згинними коливаннями ніжок стола, А. Зоммерфельд упевнився, використавши відому формулу Релея [37], яка визначає основну частоту згинних коливань консольного стержня з масою  $M_k$  на вільному кінці. Ця формула дає значення кру-

гової частоти  $p$  в залежності від довжини стержня  $l$  і його жорсткості на згин  $EJ$ . Вона має вигляд

$$p^2 = \frac{3EJ}{l^3 M_k}. \quad (1)$$

А. Зоммерфельд розрахував резонансну частоту, використавши наведену формулу з припущенням, що кожна ніжка несе вагу маси  $M_k = Q / (4g)$ , тобто відповідну чверті ваги двигуна. В його знаменитих роботах ця формула читається як формула для частоти  $n$ , записаної не в радіанах

$$n = \frac{P}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{3gEJ}{l^3 Q}}. \quad (2)$$

У розрахунках модуль пружності приймався рівним  $10^5 \text{ кгс/см}^2$ , а вага -  $Q = 40 \text{ кгс}$ . Теоретичне значення частоти дорівнювало  $335 \text{ об/хв}$ . Тільки після того як збільшився струм (а отже і напруга, і потужність двигуна), мотор опинився в стані, що відповідає швидкості обертання валу, яка створює вплив поза резонансною зоною згінних коливань ніжок. Двигун стрибком, вказаним на рис. 3, збільшив швидкість обертання до  $750 \text{ об/хв}$ . На рис. 3 суцільна крива швидкості обертання валу має другий загин трохи вище  $750 \text{ об/хв}$ . При цій швидкості А. Зоммерфельд спостерігав другий резонанс. В умовах, коли швидкість валу перевищувала  $750 \text{ об/хв}$ , згінні вертикальні коливання дошки стола мали резонанс, що призводило до збільшення поглинання енергії двигуна коливальною системою - стільницею і уповільненню обертання валу. Після проходження резонансної зони відбувався різкий стрибок значення кутової швидкості обертання, хоча потужність двигуна при цьому змінювалась при керуванні плавно. Зоммерфельд описав також можливість різкого збільшення кутової швидкості двигуна шляхом примусового припинення резонансних коливань.

Видатний вчений-механік Степан Прокопович Тимошенко повторив дослід А. Зоммерфельда, використавши маленький електромотор, закріплений на гнучкій сталевій балці на двох опорах. Як пише С. П. Тимошенко, «...коли система знаходилась в резонансі, мали місце сильні згінні коливання балки. Натисканням руки на балку ці коливання відвертались, і легко демонструвалось раптове збільшення швидкості мотора». С. П. Тимошенко не лише повторив дослід А. Зоммерфельда, він також вперше назвав неочікувані явища взаємодії функціонування двигуна і коливальної системи фундаменту «ефектом Зоммерфельда». Слід зауважити, що згадується ефект Зоммерфельда тільки в виданні 1928 р. книги С. П. Тимошенка [41].

Отже, А. Зоммерфельд експериментально зробив відкриття ефекту взаємодії роботи двигуна, чи, іншими словами, механізму збудження, і коливань фундаменту (коливальної системи), а також правильно вказав причину, яка породжує цей ефект. А саме: внаслідок витрат енергії коливальною системою на своєму внутрішньому демпфіруванні, двигун втрачає 2/3 своєї потужності на підтримання резонансних коливань з помітною, тобто немалою, амплітудою.

**Теорія В. О. Кононенка: системи з обмеженим збудженням.** Обґрунтовані рівняння сукупної системи: коливальна підсистема та електродвигун, який обертає масу, вперше були отримані відомим французьким вченим І. Рокаром [38]. Але він припустився помилки у знаках членів рівнянь, що було успішно виправлено І. І. Блехманом, який в 1953 р. опублікував [2], присвячену самосинхронізації вібраторів.

Віктор Олімпанович Кононенко, роботи котрого цитуються в кожній книзі та майже в кожній статті по ефекту Зоммерфельда, високо цінуючи результати, які отримав І. І. Блехман, поглянув на ефект Зоммерфельда з точки зору нестійкості і нереалізованості коливань різних механічних систем в деяких частотних діапазонах. В. О. Кононенко поставив за мету дослідження властивостей коливальних систем, коли вони знаходяться під збудженням від пристроїв, які мають відносно малу потужність. Він назвав такі коливальні системи системами з обмеженим збудженням, а сам механізм (електродвигун) - неідеальним джерелом енергії. В [8], яку потім було перекладено англійською [21], В. О. Кононенком була побудована послідовна теорія взаємодії коливальних систем різного роду (лінійних, нелінійних, параметричних, автоколивальних) з джерелами енергії. В даній теорії задача про взаємодію джерела збудження з механічною коливальною системою полягає у визначенні координат, що описують функціонування приладу (джерела збудження), який створює змінні в часі механічні сили, у визначенні цих сил і коливань механічної системи, які вони викликають. У силу виконання закону збереження енергії взаємодія механічної коливальної системи і механізму збудження існує завжди, однак часто зворотній вплив з боку системи на механізм виявляється нехтовно малим.

Згідно теорії В. О. Кононенка, розглянемо змушені коливання лінійної системи з одним ступенем свободи, яка отримує збудження від неідеального джерела енергії - електродвигуна, враховуючи при цьому обидві системи: коливальну і збуджуючу. Динамічна система, яка моделює експеримент А. Зоммерфельда, подана на рис. 5. Нехай джерело енергії, двигун  $D$ , обертає ротор (з моментом інерції  $I$ ), на валу якого закріплено неврівноважену масу  $m$ , що розташована на відстані  $a$  від осі обертання.

При обертанні маси  $m$  виникає сила інерції, її вертикальною складовою є

$$-m a \frac{d^2(\cos \Theta - 1)}{dt^2},$$

і вона діє на пружину жорсткістю  $k$  як на фундамент, на якому встановлено двигун. Нехай рушійний момент електродвигуна відомий, відповідає статичній характеристиці двигуна і може бути записаний як  $M(\dot{\Theta})$ , тобто як функція швидкості обертання валу двигуна. Крім того, двигун має відомий момент сил опору обертання ротора  $H(\dot{\Theta})$ .

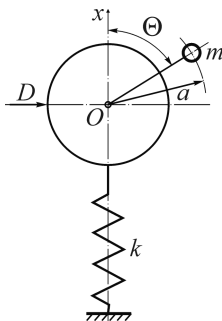


Рис. 5 – Система, яка моделює експеримент А. Зоммерфельда

Опір коливальному руху пружини врахуємо у вигляді лінійної сили  $\beta \dot{x}$ .

Тут  $(\dot{\quad})$  позначає диференціювання за часом,  $\dot{\Theta} = d\Theta/dt$ ,  $\dot{x} = dx/dt$ . Тоді кінетична енергія  $T$  і потенціальна енергія  $\Pi$  загальної системи виражаються у такий спосіб

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x} - a \dot{\Theta} \sin \Theta)^2 + \frac{1}{2} I \dot{\Theta}^2; \\ \Pi = \frac{1}{2} k x^2 + m g a \cos \Theta, \end{cases} \quad (3)$$

де  $m_1$  - маса двигуна.

Рівняння Лагранжа другого роду з урахуванням сил опору запишемо у вигляді

$$\begin{cases} m_0 \ddot{x} + \beta \dot{x} + k x = m a \dot{\Theta}^2 \cos \Theta + m a \ddot{\Theta} \sin \Theta; \\ I \ddot{\Theta} + H(\dot{\Theta}) = M(\dot{\Theta}) + m a \ddot{x} \sin \Theta + m a g \sin \Theta - I_1 \Phi, \end{cases} \quad (4)$$

де  $m_0 = m_1 + m$ ;  $I_1 = m a^2$  - момент інерції маси  $m$ ;  $\Phi$  - нелінійна функція змінних  $\ddot{\Theta}$ ,  $\dot{\Theta}$ ,  $\Theta$ .

Як впливає із системи (4), яка є нелінійною (як і будь-яка функція  $\cos \Theta$ ,  $\sin \Theta$ ),  $ma \ddot{x} \sin \Theta$  - момент, що створюється силами інерції маси  $m$  при її коливаннях на пружині. Цей момент виражає зворотній вплив коливальної системи на функціонування джерела енергії - ротора з неврівноваженою масою. Його вплив буде тим більшим, чим більшою буде амплітуда коливань  $x$ . І можна очікувати, що найбільш значним цей вплив виявиться в умовах резонансних коливань.

В умовах резонансу, коли розстройка між частотою власних коливань  $\omega = \sqrt{k/m_0}$  і частотою збуджуючої сили  $\dot{\Theta} = d\Theta/dt$  є малою величиною, введемо малий параметр  $\varepsilon$ . Тоді різницю частот, чи розстройку, в умовах резонансу запишемо у вигляді  $\Delta = \omega - \dot{\Theta} = \varepsilon \alpha_0$ . Збуджуючу силу ( $ma \dot{\Theta}^2 \cos \Theta + ma \ddot{\Theta} \sin \Theta$ ) і силу тертя  $\beta \dot{x}$  будемо вважати також малими, вважаючи, що  $m/m_1 \leq 1$ ,  $\beta/m_1 \leq 1$  і  $m/I \leq 1$ . Згідно з прийнятими обмеженнями рівняння матимемо наступний вигляд з точністю до членів порядку  $\varepsilon$ :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon (q_1 \dot{\Theta}^2 \cos \Theta + q_1 \ddot{\Theta} \sin \Theta - q_2 \dot{x}); \\ \ddot{\Theta} = \varepsilon [M(\dot{\Theta}) + q_3 \ddot{x} \sin \Theta], \end{cases} \quad (5)$$

де

$$\varepsilon q_1 = \frac{ma}{m_0}; \quad \varepsilon q_2 = \frac{\beta}{m_0}; \quad \varepsilon q_3 = \frac{ma}{I};$$

$$\varepsilon M(\dot{\Theta}) = \frac{M(\dot{\Theta}) - H(\dot{\Theta})}{I}; \quad \frac{I_1}{I} = O(\varepsilon^2).$$

Доданок  $mag \sin \Theta$  опущений як такий, що не представляє особливого інтересу. При  $\varepsilon = 0$  рівняння (5) описують гармонічні коливання і обертання з постійною швидкістю  $\dot{\Theta} = \text{const}$ . Тому при  $\varepsilon \neq 0$  коливання будуть близькі до гармонічних, а  $\dot{\Theta}$  - близька до постійної, тобто є функцією, що повільно змінюється. Відшукувати змінні будемо, дотримуючись асимптотичних методів Боголюбова – Митропольського [3], у вигляді

$$x = A \cos(\Theta + B), \text{ коли } \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\Theta + B) \text{ та } \frac{d\Theta}{dt} = \Omega. \quad (6)$$

При цьому нові змінні  $A$ ,  $B$ ,  $\Omega$  будуть функціями, які повільно змінюються в часі  $t$ . Виконуючи заміну змінних і усереднюючи отримані



рівняння по швидкому часу - куту  $\Theta = \Omega t$ , для нових змінних отримаємо систему рівнянь у вигляді

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2} \left( q_2 A + q_1 \frac{\Omega^2}{\omega} \sin B \right); \\ \frac{dB}{dt} = \varepsilon \left( \alpha - \frac{q_1 \Omega^2}{2 \omega A} \cos B \right); \\ \frac{d\Omega}{dt} = \varepsilon \left[ M(\Omega) + \frac{1}{2} q_3 A \omega \Omega \sin B \right]. \end{array} \right. \quad (7)$$

Розглянемо розв'язки даної системи при ustalених стаціонарних режимах, які відповідають випадку, коли  $A$ ,  $B$  і  $\Omega$  є постійними. Тоді, прирівнюючи праві частини рівнянь (7) до нуля, отримуємо

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{m}{m_0} \frac{4\Omega^2}{\sqrt{4\omega^2(\omega - \Omega)^2 + \beta^2 \omega^2 / m_0^2}} \\ \operatorname{tg} B = \frac{\beta}{2m_0(\Omega - \omega)}. \end{array} \right. \quad (8)$$

А рівняння для визначення  $\Omega$  має вигляд

$$\Phi_1(\Omega) = M(\Omega) - H(\Omega) - \frac{\beta}{2\Omega} \omega^2 A^2 = 0. \quad (9)$$

Система може здійснювати коливання тільки з частотою  $\Omega$ , яка задовольняє рівнянню (9), що має декілька коренів. Як видно з (9), частота  $\Omega$  залежить як від характеристик двигуна  $M(\Omega)$  і  $H(\Omega)$ , так і від амплітуди коливань  $A$ .

Рівняння (9) можна вважати рівнянням рівноваги моментів рушійних сил і сил опору. Якщо почленно помножити його додатки на  $\Omega$  і врахувати, що  $N_1(\Omega) = M(\Omega)\Omega$  - потужність джерела енергії,  $N_2(\Omega) = H(\Omega)\Omega$  - потужність, яка витрачається на внутрішньому опорі двигуна при обертанні валу, а доданок  $\omega^2 A^2 \beta / 2$  є потужність, яка витрачається на подолання сили демпфірування при коливаннях пружини, то рівняння (9) можна записати, як співвідношення потужностей

$$N_1(\Omega) - N_2(\Omega) - \frac{1}{2} \beta \omega^2 A^2 = 0. \quad (10)$$

Співвідношення моментів (9) та співвідношення потужностей (10) легко отримати з перших інтегралів рівнянь руху, для чого помножимо перше рівняння (4) на  $\Omega \dot{x}$ , друге рівняння - на  $\dot{\Theta}$  і складемо обидва рівняння. В результаті отримуємо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} m_1 \frac{d}{dt} (\dot{x})^2 + \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} \left[ (\dot{x} - a \dot{\Theta} \sin \Theta)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2} I \frac{d}{dt} (\dot{\Theta})^2 + \frac{1}{2} k \frac{d}{dt} x^2 + m g \frac{d}{dt} (a \cos \Theta) = \end{aligned} \quad (11)$$

$$= M(\dot{\Theta}) \dot{\Theta} - H(\dot{\Theta}) \dot{\Theta} - \beta(\dot{x})^2.$$

Проінтегруємо цей вираз по часу і запишемо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x} - a \dot{\Theta} \sin \Theta)^2 + \frac{1}{2} I (\dot{\Theta})^2 + \frac{1}{2} k x^2 + m g (a \cos \Theta) = \\ & = \int_0^{\infty} \left\{ \left[ M(\dot{\Theta}) - H(\dot{\Theta}) \right] \frac{d\Theta}{dt} - \beta \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right\} dt + E_0, \end{aligned} \quad (12)$$

де  $E_0$  - постійна часу.

В лівій частині співвідношення (12) представлено повну енергію  $E_k$  відповідної консервативної системи  $E_k = T + \Pi$ , що випливає із порівняння (3) і (12).

Інтеграл в правій частині (12) виражає співвідношення підведеної і витраченої енергій. При сталих режимах  $m_0$  виконує вимушені коливання, а вал двигуна обертається з постійною швидкістю  $\Omega = d\Theta/dt$ .

При цьому енергія всієї системи при усталених режимах, які відповідають положенню рівноваги системи, тобто розв'язку (8), (9), описується функцією, яка не залежить від часу. Тому енергія неконсервативної частини  $E_H$

$$E_H = \int_0^{\infty} \left\{ \left[ M(\dot{\Theta}) - H(\dot{\Theta}) \right] \frac{d\Theta}{dt} - \beta \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right\} dt = \text{const}, \quad (13)$$

тобто  $\frac{dE_H}{dt} = 0$ , звідки випливає

$$\left[ M(\dot{\Theta}) - H(\dot{\Theta}) \right] \frac{d\Theta}{dt} - \beta(\dot{x})^2 = 0. \quad (14)$$

Дане співвідношення в першому наближенні в умовах резонансу, коли  $\omega - \Omega = \varepsilon \alpha_0$ , і після процедури усереднення по швидкому часу  $\Theta$ , співпадає з рівнянням (10).

Щоб відповісти на запитання про те, який з можливих стаціонарних режимів руху може бути реалізований, необхідно дослідити усталеність можливих режимів. Склавши лінеарізовані рівняння в варіаціях і записавши критерії стійкості Рауса – Гурвіца, отримуємо, що вони потребують (серед кількох додаткових умов) виконання нерівності виду

$$\frac{d\Phi_1}{d\Omega} < 0 \quad (15)$$

для стійкості стаціонарних режимів, відповідних положенню рівноваги.

Тепер представимо якісно на одному графіку (рис. 6) потужність джерела  $N_1^{(i)}(\Omega)$  (на рис. 6 наведено графіки трьох різних потужностей двигуна при  $(i = 0, 1, 2)$ ), що відповідають різним фізичним параметрам функціонування двигуна, і потужність, яка споживається  $N_3(\Omega) = N_2(\Omega) + \beta A^2 \omega^2 / 2$ . Зауважимо, що графік потужності  $\beta A^2 \omega^2 / 2$  буде мати пік, який відповідає резонансу амплітудно-частотної характеристики  $A(\Omega)$ , яка має максимум при  $\omega = \Omega$ . Тоді величини  $\Omega_1$ , які відповідають точкам перетину потужностей, є коренями рівняння (10). При цьому умова стійкості (15) виконується на «зростаючих» ділянках потужності  $N_3(\Omega)$ , (де  $-dN_3/d\Omega < 0$ ), тобто, наприклад, на інтервалах  $\Omega_1 - \Omega_4$ ,  $\Omega_3 - \Omega_6$ , але не виконується на спадаючій ділянці  $N_3(\Omega)$ , наприклад, від точки 4 до 0. Представимо тепер, що ми можемо керувати потужністю двигуна, змінюючи його фізичні параметри. Керуванню будуть відповідати, як ми бачили на рис. 3, зміна значень  $\Omega$  (об/хв, на рис. 3). Вихідна потужність і  $\Omega$  повинні змінюватись в деякому розумінні пропорційно. У такий спосіб, керуванню двигуном для збільшення  $\Omega$  відповідає переміщення характеристики  $N_1(\Omega)$  вгору на рис. 6. Мова йде про дуже повільне, квазістаціонарне переміщення. При переміщенні від характеристики  $N_1^{(0)}(\Omega)$  до  $N_1^{(1)}(\Omega)$  для стаціонарних режимів  $\Omega$  змінюється від  $\Omega_1$  до  $\Omega_4$ . При цьому чим гостріший резонанс, тим менша різниця  $\Omega_4 - \Omega_1$ . В точці 4 маємо границю області стійкості, далі відбувається стрибок в точку 5, при цьому різниця  $\Omega_5 - \Omega_4$  може бути досить великою. Нагадаємо, що в експерименті А. Зоммерфельда швидкість  $\Omega$  стрибком більш чим подвоювалась. По-

дальше повільне переміщення від  $N_1^{(1)}(\Omega)$  до  $N_1^{(2)}(\Omega)$  буде супроводжуватись поступовим зростанням  $\Omega$  від  $\Omega_5$  до  $\Omega_6$ .

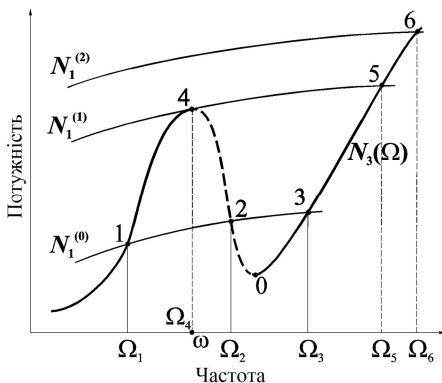


Рис. 6 – Порівняння потужності джерела і потужності, що споживається

Спостерігач буде бачити даний процес наступним чином: спочатку збільшення вихідної потужності супроводжується ростом амплітуди коливань (сходження від точки 1 до точки 4) без помітної зміни  $\Omega$ , і після досягнення піку як резонансної кривої, так і  $\beta A^2 \omega^2 / 2$  настане різкий стрибок  $\Omega$ , без зміни  $N_1^{(1)}(\Omega)$  від  $\Omega_4$  до  $\Omega_5$ . Саме таку картину описав Зоммерфельд. А пояснив її теоретично і аналітично В. О. Кононенко, який також провів ряд експериментів. Вичерпна повнота пояснення дослідів Зоммерфельда, присутня в роботах В. О. Кононенка, дає підставу для того, щоб назвати сукупні явища, до яких призводить взаємодія джерела енергії і коливальної системи, ефектом Зоммерфельда – Кононенка.

**Розвиток теорії ефекту Зоммерфельда – Кононенка.** За минулі після опублікування книги В. О. Кононенка півстоліття науковий розділ «Коливальні системи з обмеженим збудженням» отримав розвиток в декількох напрямках. Перш за все відмітимо п'ять основних магістралей розвитку.

1. Взаємодія коливальних систем з неідеальними джерелами енергії різної фізичної природи; як неідеальне джерело розглядалися: електромеханічний збудник, гідравлічний і пневматичний, електромагнітний, електродинамічний, електростатичний, магнітострикційний, електрострикційний, п'єзозбудник і двигун внутрішнього згоряння.

2. Взаємодія коливальних систем різного типу коливань: змушених, параметричних, автоколивань і змішаних (змушених і параметричних, змушених і автоколивань, параметричних і автоколивань, змушених па-

раметричних і автоколивань), віброударних, з частотою, що випадково змінюється, з урахуванням запізнення з неідеальними джерелами енергії.

3. Взаємодія коливальних систем з механізмами збудження при урахуванні властивостей оточуючого навколишнього середовища, тобто при врахуванні витрат енергії на випромінювання і на подолання опору гідросередовища чи твердого середовища, що деформується.

4. Дослідження принципово різних режимів взаємодії в системі «коливальна підсистема – механізм збудження», а саме, перехідних і ustalених-стаціонарних: які відповідають положенню рівноваги, періодичних (квазіперіодичних) і хаотичних.

5. Розвиток та дослідження методами сучасної теорії динамічних систем моделі взаємодії серцево-судинної та респіраторної систем, модифікованої урахуванням зворотного впливу діяльності серця на основні параметри дихання такі, як амплітуда і частота респіраторної системи.

Коротко охарактеризуємо, що зроблено в кожному з перерахованих розділів.

У першому розділі, безумовно, найбільш детально розглянутим механізмом збудження обмеженою потужності є електромеханічний збудник, тобто неврівноважений ротор або кривошипний механізм з пружиною, що приводяться в рух електродвигуном. Такий механізм вивчався в згаданих вище роботах А. Зоммерфельда, І. Рокара, І. І. Блехмана, В. О. Кононенка, а також у дослідженнях Л. Пуста [7]. Гідралічний механізм, або гідрозбуджувач, в якому сили створюються змінним тиском в гідросередовищі, яке рухає поршень, зазвичай моделюється дією двох двигунів обмеженої потужності. При цьому один формує амплітуду, а інший частоту впливу на коливальну систему. Перші роботи в цьому напрямку належать академіку РАН К. В. Фролову і його учням [1]. Електромагнітний збудник генерує сили, які створюються за рахунок зміни магнітного поля при дії на феромагнітне тіло. Цей напрямок створено роботами К. Ш. Ходжаєва [4]. Електродинамічний вібратор функціонує на генерації сил, що діють на провідник зі струмом в магнітному полі. Для такого роду механізму математична модель була створена в [10]. Електростатичний збудник працює на основі руху провідників і пластин конденсатора, заряд яких змінюється в часі [4]. Принцип генерації змінної сили в магнітострикційних, електрострикційних і п'єзозбуджувачах заснований на деформації деяких твердих тіл в змінних електромагнітних полях [4, 11, 16]. Двигуни внутрішнього згоряння, які широко використовуються в техніці як механізми обмеженої потужності, вивчені досить докладно і добре в серії робіт В. Л. Вейца і О. Є. Кочури [4].

Другий розділ теорії коливальних систем з обмеженим збудженням є найбільш вивченим. Перш за все, це роботи учнів і колег В. О. Кононенка, а саме роботи К. В. Фролова [1], С. С. Корабльова [8], Р. Ф. Ганієва [5, 6], М. Ф. Діментберга [18], а також іноземних авторів. В книзі А. А. Аліфова і К. В. Фролова [1] дається докладний аналіз динаміки автоколивальних систем, які взаємодіють з джерелами енергії, при наявності різноманітних нелінійних пружних в'язей, періодичних, параметричних взаємодій та запізнювання. Цікаві результати були отримані М. Ф. Діментбер-

гом і К. В. Фроловим при дослідженні ефекту Зоммерфельда – Кононенка в системі з параметрами, що випадково змінюються. Було показано, що при непередбачуваній зміні власної частоти можливий перехід через резонанс без ефекту Зоммерфельда – Кононенка, при цьому амплітуди коливань, а відповідно і споживання енергії - значні по величині.

До третього напрямку відносяться роботи, де досліджуються конкретні суцільні деформівні тіла та навколишні середовища, що мають неідеальне збудження. Найбільш дослідженим ефект Зоммерфельда – Кононенка є для такої розподіленої пружної системи, як стрижень. Типи коливань та їх стійкість розглядались для різних стрижнів у [9, 19, 20]. Цікавими є результати досліджень [22, 23], метою яких було виявлення характерних рис обмеженого збудження систем, коли основна доля енергії, що споживається системою, відповідає енергії, що переноситься однорідними хвилями, а не споживається на внутрішньому демпфуванні. Конкретний розгляд даної проблеми було проведено на прикладі коливань нескінченної пружної пластини, контактуючої з акустичною рідиною, при збудженні електродвигуном обмеженої потужності [22, 23]. Специфіка таких систем полягає в тому, що не можна застосовувати резонансні методи, які, наприклад, можна застосовувати у задачах збудження хвиль у нескінченному просторі двигуном на пружному фундаменті [24].

Нарешті зауважимо, що до даного напрямку досліджень також належать роботи по вивченню явищ взаємодії ґрунтів та двигунів з дебалансами. При вібраційних дослідженнях ґрунтових основ споруд (побудови амплітудно-частотних характеристик) з використанням поверхневих штампів виникає проблема оцінки необхідної потужності двигуна, який приводить в рух дебаланси. В ситуації, подібній умовам зазначеного вище експерименту А. Зоммерфельда, вібраційний момент зростає при збільшенні маси вібростанини і при резонансних явищах в ґрунтовому середовищі, наприклад, при певній висоті шару пружно-податливого ґрунту на жорсткій підстилаючій основі. В околиці резонансних частот системи вібраційний момент дебалансу може перевищувати момент на валу двигуна, при цьому усталені коливання системи будуть неможливими в деяких діапазонах частот (ефект Зоммерфельда – Кононенка). Результати розробки чисельно-аналітичної методики порівняння моменту на валу двигуна вібростанини і вібраційного моменту від гармонічних коливань системи «масивний штамп-шарувата ґрунтова основа» було опубліковано в [13]. Для визначення реакції та руху поверхні ґрунтового середовища при вібрації поверхневого штампа використовувалось числове моделювання на основі розв'язку динамічних контактних задач методом ортогональних поліномів. Слід також відзначити роботи М. П. Ярошевича і Ю. В. Міхліна зі співавторами по дослідженню в цьому напрямку [12, 14].

Четвертий розділ теорії коливальних систем з обмеженим збудженням складають нові дослідження у цій галузі з аналізу найбільш типових режимів взаємодії. В наш час надшвидких комп'ютерів та обчислювальних станцій стало можливим проаналізувати режими, які неможна описати аналітичними формулами. Оскільки всі задачі теорії коливальних

систем з неідеальним джерелом енергії є нелінійними, то аналітично отримати їх розв'язки не можливо. Однак отримати числовий розв'язок можливо. Тому чисельне моделювання, перш за все, було застосоване для отримання розв'язку для перехідних режимів [1].

Принципово новий клас усталених режимів становлять хаотичні, які в задачах теорії коливальних систем з обмеженим збудженням вперше були знайдені та отримані в роботах автора у співпраці з Є. Д. Печуком та О. Ю. Швецем [11, 27 – 32], починаючи з 1986 р. За останній час лавина наукових робіт була опублікована саме зі специфіки хаотичних режимів в системах з неідеальним збудженням. Такі роботи виконуються у науковій школі під керівництвом відомого бразильського вченого Х. М. Балтазара [15 – 17, 19, 33], що свідчить про зацікавленість до задач теорії коливальних систем з обмеженим збудженням та нашими з О. Ю. Швецем пріоритетними результатами.

Проблеми моделювання процесів в біофізиці останнім часом є надпопулярними і нагальними. Відомо, що робота серця знаходиться в тісному зв'язку з діяльністю легенів, і моделювання їх взаємодії являє собою важливу і дуже актуальну задачу сучасної біофізики. Основним експериментальним матеріалом для моделювання серцевих ритмів є електрокардіограми (ЕКГ). До недавнього часу, іррегулярність поведінки ЕКГ, яка спостерігається у здорової людини, пояснювалася лише наявністю стохастичної складової, пов'язаної з впливом на серцево-судинну систему випадкових сигналів, що виникають, наприклад, в результаті діяльності органів почуттів під впливом навколишнього середовища. У зв'язку з відкриттям явища детермінованого хаосу, для моделювання і діагностики серцевих ритмів останнім часом широко застосовується нелінійна динаміка, заснована на сучасній теорії динамічних систем. Можливість виникнення хаотичних режимів у динамічних системах, які не є за своєю природою стохастичними, дозволяє по-новому пояснювати багато закономірностей серцевих ритмів і досліджувати вплив параметрів існуючих моделей на результуючу динаміку. Метою наших робіт [25, 26] був розвиток і дослідження методами сучасної теорії динамічних систем моделі взаємодії серцево-судинної та респіраторної систем, модифікованої урахуванням зворотного впливу діяльності серця на основні параметри дихання такі, як амплітуда і частота осциляцій. При цьому, респіраторна система моделювалася як генератор Заславського [25, 26], що описує свого роду джерело енергії. Таким чином, серце розглядалося як коливальна система під дією обмеженого збудження. В результаті виявлено, що урахування зворотного механічного впливу серця на дихання, призводить до хаотизації сталих режимів моделі, які, згідно з дослідженням ритмограм серця, є характерною особливістю нормального функціонування кардіосистем.

На закінчення вважаємо вказати на одне важливе застосування задач теорії коливальних систем з обмеженим збудженням. До систем рівнянь виду (5) призводять задачі про рух ракет з малою асиметрією властивостей при проходженні через шари атмосфери. При розгляді задачі про рух тіл, які опускаються на Землю, відомий американський

вчений А. Х. Найфе та його колеги [34 – 36] моделювали їх коливання рівняннями з параметрами, які повільно змінюються. В такому випадку періодичне збудження коливань також має частоту, яка не є наперед заданою величиною, а змінюється в часі, причому її величина залежить від коливань об'єкта. Таким чином, задача зводиться до розв'язання системи виду (5). Зокрема, рух тіла, що обертається при спуску через шари атмосфери на Землю, може бути описаний системою рівнянь

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + iI_x I^{-1} \Omega \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = \varepsilon K \exp[i(\Theta + \Theta_0)] + \gamma |\xi|^2 \xi + \varepsilon^2 \mu_1 \xi; \\ \ddot{\Theta} = \varepsilon^2 \nu_0 + \varepsilon^2 \nu_2 \Omega + \varepsilon \nu_1 \operatorname{Im}[\xi \exp(-i\Theta)], \end{cases} \quad (16)$$

де  $I_x$  та  $I$  - поздовжній і поперечний моменти інерції тіла;  $\xi$  - комплексний кут атаки;  $\dot{\Theta} = \Omega$ ;  $\Theta_0$  - постійна; параметри  $K$ ,  $\gamma$ ,  $\mu_1$ ,  $\nu_i$  - функції повільного часу  $T_2 = \varepsilon^2 t$ .

Система рівнянь (16) може розглядатись як коливальна система з неідеальним збудженням, оскільки частота збудження залежить від коливань і навпаки. Методи дослідження цієї важливої проблеми техніки професор А. Х. Найфе запозичив з робіт та теорії В. О. Кононенка, що він неодноразово підкреслював [34, 36]. Більш того, він включив в курс лекцій [36] з теорії нелінійних коливань розділ, присвячений теорії українського академіка В. О. Кононенка - коливальні системи з неідеальним збудженням. Високо цінуючи роботи В. О. Кононенка, саме А. Х. Найфе сформулював перші задачі по дослідженню неідеальних систем Х. М. Балтазару, який був у нього на курсах підвищення кваліфікації.

На закінчення підкреслимо, що розділ механіки – коливальні системи з обмеженим збудженням, фундамент якого заклали наукові роботи талановитого вченого, всебічно освіченої людини Віктора Олімпановича Кононенка, який читав лекції у багатьох наших університетах та семи університетах Сполучених Штатів Америки, плідно надалі розвивається і сьогодні.

**Висновок.** Таким чином, дослідження ефекту Зоммерфельда – Кононенка, який в силу виконання закону збереження енергії існує завжди (однак часто зворотна дія збоку систем на механізми виявляється нехтовно малою), за останні півстоліття набули широкого та всебічного розвитку і пояснили цілу низку цікавих механічних та фізичних явищ.

## БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Алифьев А. А., Фролов К. В.** Взаимодействие нелинейных колебательных систем с источниками энергии. М.: Наука, 1989. 328 с.
2. **Блехман И. И.** Самосинхронизация вибраторов некоторых вибрационных машин // Инж. сборник. 1953. Т. 16. С. 49–72.
3. **Боголюбов Н. Н., Ю. А. Митропольский** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.



4. **Вибрации в технике.** Т. 2 / Под ред. И. И. Блехмана. М.: Машиностроение, 1979. 352 с.
5. **Ганиев Р. Ф., Кононенко В. О.** О нелинейных колебаниях твердого тела, несущего вращающийся ротор. // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 5. С. 31–37.
6. **Ганиев Р. Ф., Кононенко В. О.** Колебания твердых тел. М.: Наука, 1976. 432 с.
7. **Динамика** тел, взаимодействующих со средой. / отв. ред. А. Н. Гузь. К.: Наукова Думка, 1991. 392 с.
8. **Кононенко В. О.** Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М.: Наука, 1964. 256 с.
9. **Кононенко В. О., Краснополянская Т. С.** Динамическое взаимодействие колеблющегося стержня с источником энергии // В сб.: Избранные проблемы прикладной механики. М.: ВИНТИ. 1974. С. 431–438.
10. **Кононенко В. О., Краснополянская Т. С.** Ламповый генератор в системе возбуждения механических колебаний // Вибротехника. 1977. Т. 28. № 4. С. 105–120.
11. **Краснополянская Т. С., Швец А. Ю.** Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением Москва-Ижевск: РХД, 2008. 278 с.
12. **Михлин Ю. В., Перепелкин Н. В.** Динамика неидеальных механических систем и гашение резонансных колебаний // Пробл. обчислюв. механіки і міцності конструкцій. 2009. Т. 13. С. 163–169.
13. **Савицкий О. А., Краснополянская Т. С., Трофимчук А. Н.** Колебания фундаментов на слоистых вязкоупругих основаниях при динамических нагрузках // Будівельні конструкції: Міжвід. наук-техн. зб. наук. праць (будівництво). Механіка ґрунтів, геотехніка, фундаментобудування. Вип. 71 : В 2-х кн. : Кн. 1. К.: НДІБК, 2008. С. 317–324.
14. **Ярошевич М. П., Ярошевич Т. С.** Динаміка розбігу вібраційних машин з дебалансним приводом. Луцьк: РВВ ДНТУ, 2010. 220 с.
15. **An overview** on non-ideal vibrations. / J. M. Balthazar et al. // Meccanica. 2003. Vol. 38. P. 613–621.
16. **Balthazar J. M.** Nonlinear dynamic interactions and phenomena. Vibrating systems with limited power supply - an emergent topic after Prof. Kononenko. // In: Proceedings of the 5th International Conference on Nonlinear Dynamics. Kharkov : NTU KhPI, 2016. P. 16–22.
17. **Dantas M. J. H., Balthazar J. M.** On local analysis of oscillations of a non-ideal and non-linear mechanical model. // Meccanica. 2004. Vol. 39. P. 313–330.
18. **Dynamics of an unbalanced shaft interacting with a limited power supply.** / M. F. Dimentberg et al. // Nonlinear dynamics. 1997. Vol. 13. P. 171–187.
19. **Felix J. L. P., Balthazar J. M., Brasil R. M. L. R. F.** Saturation control of a non-ideal vibrating portal frame foundation type shear-building. // J. Vibr. Control. 2005. Vol. 11. P. 121–136.
20. **Fenili A., Balthazar J. M., Brasil R. M. L. R. F.** Mathematical modeling of a beam-like flexible structure in slewing motion assuming non-linear curvature. // J. Sound Vibr. 2003. Vol. 268. P. 825–838.
21. **Kononenko V. O.** Vibrating Systems with a Limited Power-Supply. London : Iliffe, 1969. 236 p.
22. **Krasnopolskaya T. S.** Problems of nonlinear oscillations of mechanical systems with limited power supply. // In: Proceedings of the 9th International Conference on Nonlinear Oscillations. Kyev : Naukova Dumka, 1984. Vol. 3. P. 150–152.
23. **Krasnopolskaya T. S.** Infinite hydro-elastic system vibrations with a limited power supply. // In: Proceedings of International Conference on Engineering Aero-hydro-elasticity. Prague : Czechoslovak Scientific and Technical Society, 1989. P. 282–288.

24. **Krasnopolskaya T. S.** Chaos in acoustic subspace raised by the Sommerfeld-Kononenko effect. // *Meccanica*. 2006. Vol. 41. P. 299–310.
25. **Krasnopolskaya T. S., Pechuk E. D.** Chaos in a modified cardiorespiratory model. // *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM)*. 2013. No. 4. P. 563–570.
26. **Krasnopolskaya T. S., Pechuk E. D.** Cardiorespiratory System with Strong Interaction. // *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM)*. 2017. No. 1. P. 141–146.
27. **Krasnopolskaya T. S., Pechuk E. D.** Chaos in a coupled shaker-oscillator model. // *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM)*. 2018. No. 3. P. 249–257.
28. **Krasnopolskaya T. S., Shvets A. Yu.** Chaos in dynamics of machines with a limited power supply. // In: *Proceedings of the Eighth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*; ed. M. Okrouglick, L. Pust. Prague: Institute of Thermo-mechanics, 1991. Vol. 1. P. 181–184.
29. **Krasnopolskaya T. S., Shvets A. Yu.** Chaotic oscillations of a spherical pendulum as the effect of interaction with excitation device. // *Complexity in Physics and Technology*. Singapore: World Scientific. 1992. P. 77–89.
30. **Krasnopolskaya T. S., Shvets A. Yu.** Chaos in vibrating systems with limited power-supply. // *Chaos*. 1993. Vol. 3. P. 387–395.
31. **Krasnopolskaya T. S., Shvets A. Yu.** Chaotic surface waves in limited power-supply cylindrical tank vibrations // *J. Fluids & Structures*. 1994. Vol. 8. P. 1–18.
32. **Krasnopolskaya T. S., Shvets A. Yu.** Chaotic interaction between fluid vibration in a cylindrical tank and electromotor // *Flow-Induced Vibration*. Rotterdam: Balkema, 1995. P. 269–280.
33. **Nayfeh A. H., Mook D. T., Marshall L. R.** Nonlinear coupling of pitch and roll modes in ship motions // *J. Hydronautics*. 1973. Vol. 7. P. 145–152.
34. **Nayfeh A. H., Saric, W. S.** An analysis of asymmetric rolling bodies with nonlinear aerodynamics. // *AIAA J.* 1972. Vol. 10. P. 1004–1011.
35. **Nayfeh A. H., Mook D. T.** *Nonlinear oscillations*. Weinheim: Wiley, 2004. 704 p.
36. **Nonlinear interactions in a piezoceramic bar transducer powered by a vacuum tube generated by a non-ideal source.** / J. M. Balthazar et al. // *Trans. ASME: Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. 2009. Vol. 4. 011013-1–011013-7.
37. **Rayleigh W.** *The theory of sound*. London: Macmillan, 1877. Vol. 1. 326 p.
38. **Rocard Y.** *Dynamique générale des vibrations*. Paris: Masson, 1943. 459 p.
39. **Sommerfeld A.** *Beitrage zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre*. // *Phys. Z.* 1902. Band 3. S. 266–271.
40. **Sommerfeld A.** *Beitrage zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre*. // *Z. Ver-eines deutscher Ingenieure*. 1902. Band 46. P. 391–394.
41. **Timoshenko S.** *Vibration Problems in Engineering*. New York: Van Nostrand, 1928. 480 p.

УДК 534.1

*Т. С. Краснопольская, д-р физ.-мат. наук*  
**ЭФФЕКТ ЗОММЕРФЕЛЬДА – КОНОНЕНКО  
 И ЕГО ИССЛЕДОВАНИЯ**

Приведены краткая история формирования раздела механики – системы с ограниченным возбуждением, и его развитие, обзор экспериментов А. Зоммерфельда и фундаментальных работ В. А. Кононенко и А. Х. Найф. Выделены наиболее исследованные и перспективные направления развития

проблематики взаємодія систем з механізмами возбурдення при учете свойств окружющей среды.

*Ключевые слова:* эффект Зоммерфельда – Кононенко, ограниченная мощность, динамический хаос.

UDC 534.1

*T. S. Krasnopolskaya, Dr. Sci. (Phys.-Math.)*

## THE SOMMERFELD – KONONENKO EFFECT AND ITS STUDIES

A brief history of the formation of the section of mechanics — a study of systems with limited excitation and its development in modern mechanics are presented in this paper. A review of A. Sommerfeld's experiments and the fundamental works of V. A. Kononenko and A. H. Naif are presented. New studies in this direction and a significant number of scientific papers has been published, which indicates their relevance and interest in them.

*Keywords:* Sommerfeld – Kononenko effect, limited power, dynamical chaos.

This article is a modest tribute to the memory of the outstanding Ukrainian scientist and academician of the Academy of Sciences of Ukraine, V. O. Kononenko, on occasion of the 100th anniversary of his birth in September 2018. Scientific works by V. O. Kononenko formed a new direction in mechanics – a study of systems with limited excitation. The history of the formation of this direction and its development in modern mechanics are presented in this paper. Studies in this area are based on experiments by A. Sommerfeld, who discovered the effect of the interaction of the engine (excitation mechanism) and the foundation oscillations (oscillatory system). V. O. Kononenko has set the goal of studying the properties of various systems under excitation by devices with relatively low power. He called such vibrational systems «systems with limited excitation», and the devices of excitation (electric motors) «limited sources of energy». This direction was widely developed since then. The interactions of systems with different types of oscillations were most deeply studied. The problem of interactions when properties of the environment (for example, a solid deformed medium) are taken into account has been successfully solved. American scientist A. H. Nyafeh formulated problems of interaction in missile technology and solved a number of specific problems. New studies in this direction for chaotic regimes were developed in more detail. A significant number of scientific papers has been published. Among those papers are works of Brazilian school of mechanics led by Professor H. M. Balthazar.

## REFERENCES

1. *Alifov A. A., Frolov, K. V.* Interaction of Nonlinear Oscillatory Systems with Energy Sources. Moscow: Nauka. 1989. 328 p. (in Russian).
2. *Blekhman I. I.* Self-synchronization of vibrators of some vibrating machines // *Inzh. Sb.* 1953. Vol. 16. P. 49 -72. (in Russian).
3. *Bogolyubov N. N., Mitropolsky Yu. A.* Asymptotical methods in the theory of non-linear oscillations. Moscow: Nauka, 1974. 504 p. (in Russian).

4. **Vibrations in Engineering**. Vol. 2 / Ed. I.I. Blekhman. Moscow: Mashinostroenie, 1979. 352 p. (in Russian).
5. **Ganiev R. F., Kononenko V. O.** On nonlinear oscillations of a rigid body carrying a rotating rotor // *Izv. Akad.Nauk SSSR, Mekh.* 1965. No. 5. P. 31–37. (in Russian).
6. **Ganiev R. F., Kononenko V. O.** *Vibration of Solids*. Moscow: Nauka, 1976. 432 p. (in Russian).
7. **Dynamics of bodies interacting with the environment** / A.N. Guz et al., ed. A.N. Guz. Kiev: Naukova Dumka, 1991. 392 p. (in Russian).
8. **Kononenko V. O.** *Vibrating Systems with a Limited Power Supply*. Moscow: Nauka, 1964. 256 p. (in Russian).
9. **Kononenko V. O., Krasnopolskaya T. S.** Dynamic interaction of an oscillating rod with an energy source / In: *Selected Problems of Applied Mechanics*. Moscow: VINITI, 1974. P. 431-438. (in Russian).
10. **Kononenko V. O., Krasnopolskaya T. S.** Lamp generator in the system of excitation of mechanical oscillations // *Vibrotehnika*, 1977. Vol. 28. No. 4, P. 105–120. (in Russian).
11. **Krasnopolskaya T. S., Shvets A. Yu.** Regular and Chaotic Dynamics of Systems with Limited Excitation. Moscow-Izhevsk: RChD, 2008. 278 p. (in Russian).
12. **Mikhlin Yu. V., Perepelkin N. V.** Dynamics of non-ideal mechanical systems and suppression of resonant oscillations // *Problems of computational mechanics and strength of structures*. 2009. Vol. 13. P. 163-169. (in Russian).
13. **Savitskii O. A., Krasnopolskaya T. S., Trofimchuk A. N.,** Oscillations of foundations on layered viscoelastic substrates under dynamic loads // In.: *Building Construction. Collection of Articles. Soil Mechanics, Geotechnics, Foundation Engineering*. Vol.1. Kiev: NDIBK. 2008. Vol. 71. P. 317-324. (in Russian).
14. **Yaroshevich M. P., Yaroshevich T. S.** Dynamics of running of vibrating machines with a disbalance drive. Lutsk: RVV DNTU. 2010. 220 p. (in Ukrainian).
15. **An overview** on non-ideal vibrations / J. M. Balthazar et al. // *Meccanica*. 2003. Vol. 38. P. 613-621.
16. **Balthazar J. M.** Nonlinear dynamic interactions and phenomena. Vibrating systems with limited power supply - an emergent topic after Prof. Kononenko // In: *Proceedings of the 5th International Conference on Nonlinear Dynamics*. Kharkov: NTU KhPI, 2016. P. 16–22.
17. **Dantas M. J. H., Balthazar J. M.** On local analysis of oscillations of a non-ideal and non-linear mechanical model // *Meccanica*. 2004. Vol. 39. P. 313-330.
18. **Dynamics of an unbalanced shaft interacting with a limited power supply**. / M. F. Dimentberg et al. // *Nonlinear dynamics*. 1997. Vol. 13. P. 171-187.
19. **Felix J. L. P., Balthazar J. M., Brasil R. M. L. R. F.** Saturation control of a non-ideal vibrating portal frame foundation type shear-building // *J. Vibr. Control*. 2005. Vol. 11. P. 121-136.
20. **Fenili A., Balthazar J. M., Brasil R. M. L. R. F.** Mathematical modeling of a beam-like flexible structure in slewing motion assuming non-linear curvature // *J. Sound Vibr.* 2003. Vol. 268. P. 825-838.
21. **Kononenko V. O.** *Vibrating Systems with a Limited Power-Supply*. London: Iliffe, 1969. 236 p.
22. **Krasnopolskaya T. S.** Problems of nonlinear oscillations of mechanical systems with limited power supply // In: *Proceedings of the 9th International Conference on Nonlinear Oscillations*. Kiev: Naukova Dumka. 1984. Vol. 3. P. 150-152.
23. **Krasnopolskaya T. S.** Infinite hydro-elastic system vibrations with a limited power supply // In: *Proceedings of International Conference on Engineering Aero-hydro-elasticity*. Prague: Czechoslovak Scientific and Technical Society. 1989. P. 282-288.

24. **Krasnopolskaya T. S.** Chaos in acoustic subspace raised by the Sommerfeld-Kononenko effect. // *Meccanica*. 2006. Vol. 41. P. 299-310.
25. **Krasnopolskaya T. S., Pechuk E. D.** Chaos in a modified cardiorespiratory model. // *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM)*. 2013. No. 4. P. 563-570.
26. **Krasnopolskaya T. S., Pechuk E. D.** Cardiorespiratory System with Strong Interaction // *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM)*. 2017. No. 1. P. 141-146.
27. **Krasnopolskaya T. S., Pechuk E. D.** Chaos in a coupled shaker-oscillator model // *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM)*. 2018. No. 3. P. 249-257.
28. **Krasnopolskaya T. S., Shvets A. Yu.** Chaos in dynamics of machines with a limited power supply // In: *Proceedings of the Eighth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*; ed. M. Okrouglick, L. Pust. Prague: Institute of Thermo-mechanics, 1991. Vol. 1. P. 181-184.
29. **Krasnopolskaya T. S., Shvets A. Yu.** Chaotic oscillations of a spherical pendulum as the effect of interaction with excitation device. // *Complexity in Physics and Technology*. Singapore : World Scientific, 1992. P. 77-89.
30. **Krasnopolskaya T. S., Shvets A. Yu.** Chaos in vibrating systems with limited power-supply. // *Chaos*. 1993. Vol. 3. P. 387-395.
31. **Krasnopolskaya T. S., Shvets A. Yu.** Chaotic surface waves in limited power-supply cylindrical tank vibrations // *J. Fluids & Structures*. 1994. Vol. 8. P. 1-18.
32. **Krasnopolskaya T. S., Shvets A. Yu.** Chaotic interaction between fluid vibration in a cylindrical tank and electromotor // *Flow-Induced Vibration*. Rotterdam : Balkema, 1995. P. 269-280.
33. **Nayfeh A. H., Mook D. T., Marshall L. R.** Nonlinear coupling of pitch and roll modes in ship motions // *J. Hydronautics*. 1973. Vol. 7. P. 145-152.
34. **Nayfeh A. H., Saric, W. S.** An analysis of asymmetric rolling bodies with nonlinear aerodynamics // *AlAA J.* 1972. Vol. 10. P. 1004-1011.
35. **Nayfeh A. H., Mook D. T.** *Nonlinear oscillations*. Weinheim : Wiley, 2004. 704 p.
36. **Nonlinear interactions in a piezoceramic bar transducer powered by a vacuum tube generated by a non-ideal source.** / J. M. Balthazar et al. // *Trans. ASME : Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. 2009. Vol. 4. 011013-1–011013-7.
37. **Rayleigh W.** *The theory of sound*. London: Macmillan, 1877. Vol. 1. 326 p.
38. **Rocard Y.** *Dynamique générale des vibrations*. Paris: Masson, 1943. 459 p.
39. **Sommerfeld A.** *Beitrage zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre* // *Phys. Z.* 1902. Band 3. S. 266-271.
40. **Sommerfeld A.** *Beitrage zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre*. // *Z. Ver-eines deutscher Ingenieure*. 1902. Band 46. S. 391-394.
41. **Timoshenko S.** *Vibration Problems in Engineering*. New York: Van Nostrand, 1928. 480 p.

*Інститут гідромеханіки НАН України,  
Київ, Україна*

*Надійшла до редколегії 24.09.2018*