

УДК 539.3

*А. С. Мішарін, В. Г. Попов д-р фіз.-мат. наук*

## **НАПРУЖЕНИЙ СТАН БІЛЯ ДОВІЛЬНО ОРІЄНТОВАНИХ ТРІЩИН НА ПРОДОВЖЕННІ ЖОРСТКОГО ВКЛЮЧЕННЯ ЗА ДІЇ ЗСУВНОЇ ГАРМОНІЧНОЇ СИЛИ**

Розв'язана задача про визначення динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень для тріщин, які розташовані під кутом на продовженні смугового включення. Включення розташоване в необмеженому пружному тілі, що знаходиться в умовах деформації поздовжнього зсуву, де відбуваються гармонічні коливання, викликані прикладеною до включення зсувною силою. Вихідна задача зводиться до розв'язання системи сингулярних інтегродиференціальних рівнянь з нерухомими особливостями. Для числового розв'язування системи розроблений метод, який враховує реальну асимптотику невідомих функцій і використовує спеціальні квадратурні формули для сингулярних інтегралів.

*Ключові слова:* коефіцієнти інтенсивності напружень, сингулярні інтегродиференціальні рівняння, гармонічні коливання, нерухома особливість, включення, тріщина.

**Вступ.** У сфері будівельних технологій і машинобудуванні конструкції і деталі машин досить часто містять елементи або технологічні дефекти, які можна розглядати як тонкі включення великої жорсткості. Але як показують дослідження [15], тонкі жорсткі включення викликають значну концентрацію напружень в навколишньому середовищі, яка може привести до утворення тріщин, що розповсюджуються під деякими кутами щодо площині включення. Дослідження коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) для тріщини на продовженні включення, які розташовані на одній лінії, в статичній постановці, вивчалися в [3 – 5]. Аналогічна задача для півплощини з тріщиною на продовженні включення розв'язана в [1]. Задачі про визначення динамічного напруженого стану біля дефектів, що представляють собою тонкі включення, від кінців яких під деякими кутами відходять тріщини, майже не розв'язувались. Це пов'язано зі труднощами, які виникають при розв'язанні інтегродиференціальних рівнянь з нерухомими особливостями. У [8 – 10, 16] розв'язані задачі визначення динамічного напруженого стану в околі V-подібних тріщин і включень, а також тріщин у вигляді ламаних. Там же запропонований числовий метод розв'язування інтегральних та інтегродиференціальних рівнянь з нерухомими особливостями. Цей метод враховує реальну асимптотику розв'язання в околі особливих точок і заснований на використанні для сингулярних інтегралів спеціальних квадратурних формул.

Метою даної роботи є дослідження напруженого стану біля довільно орієнтованих тріщин на продовженні жорсткого включення при дії зсувної гармонічної сили. Сформульована задача зведена до системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь з нерухожими особливостями відносно невідомих стрибків напружень і переміщень на поверхні дефекту. Для розв'язування цієї системи використовується колокаційний метод, аналогічний застосованому у [8 – 10, 16].

**Постановка задачі.** Розглядається пружне ізотропне середовище, яке знаходиться у стані антиплоскої деформації. У середовищі міститься наскрізне тонке абсолютно жорстке включення, від якого під довільним кутом виходять тріщини. У площині  $Oxy$  включення і тріщини розташовані як показано на рис. 1.

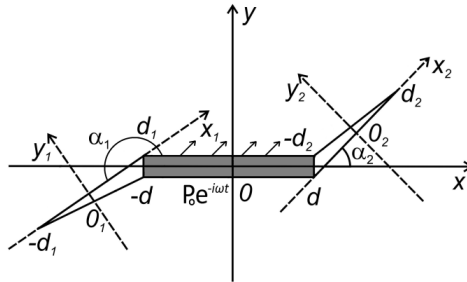


Рис.1 – Схема розташування включення і тріщини

В середовищі відбуваються коливання повздовжнього зсуву внаслідок дії на включення зсувної сили  $P = P_0 e^{-i\omega t}$ , спрямованої вздовж осі  $Oz$ , де  $\omega$  – частота коливань. Множник  $e^{-i\omega t}$ , який визначає залежність від часу, далі скрізь опущений.

За таких умов невідомої є  $z$  – компонента вектора переміщень  $w(x, y)$ , що задовольняє рівняння Гельмгольца:

$$\Delta w + \kappa_2^2 w = 0, \quad \kappa_2^2 = \frac{\rho \omega^2}{G}, \quad (1)$$

де  $\Delta$  – оператор Лапласа в системі координат  $Oxy$ .

Це рівняння слід розглядати з граничними умовами на дефектах, для формування яких з кожним з дефектів зв'язується локальна система координат  $O_l x_l y_l$ ,  $l = 1, 2$ , центр якої збігається з серединою відповідної тріщини (рис. 1).

Нехай  $w_l(x_l, y_l)$ ,  $l = 1, 2$  – переміщення в системі координат, пов'язаної з  $l$ -ою тріщиною. Тоді, при відсутності на берегах тріщин навантаження, повинні виконуватися рівності:

$$\tau_{y_l z}(x_l, 0) = 0, \quad x_l \in [-d_l, d_l], \quad l = 1, 2. \quad (2)$$

Також на поверхні тріщин переміщення  $w_l(x_l, y_l)$ ,  $l=1,2$  терплять розриви з невідомими стрибками, для яких вводяться позначення:

$$w_l(x_l, +0) - w_l(x_l, -0) = \chi_l(x_l), \quad x_l \in [-d_l, d_l], \quad l=1,2 \quad (3)$$

Граничні умови на включенні сформулюємо з умов ідеального зчеплення з зовнішнім середовищем:

$$w(x, 0) = a, \quad x \in [-d; d]. \quad (4)$$

де  $a$  – невідома амплітуда поздовжніх (уздовж осі  $Oz$ ) коливань включення.

Також на поверхні включення дотичні напруження мають розрив з невідомим стрибком, для якого вводиться позначення:

$$\tau_{yz}(x, +0) - \tau_{yz}(x, -0) = \chi(x), \quad x \in [-d, d] \quad (5)$$

Невідома амплітуда визначається з рівняння руху включення, яке у випадку гармонічних коливань має вигляд:

$$-m\omega^2 a = \int_{-d}^d \chi(\eta) d\eta + P, \quad m = 2d\rho_v h. \quad (6)$$

**Метод розв'язання.** Для розв'язання сформульованої задачі в системі координат, пов'язаної з дефектами, будуються розривні розв'язки рівняння (1) зі стрибками (3) і (5). Ці розривні розв'язки знаходяться за формулами [11]

$$w^d(x, y) = \int_{-d}^d \frac{\chi(\eta)}{G} r_2(\eta - x, y) d\eta, \quad w_l^d(x_l, y_l) = \int_{-d_l}^{d_l} \chi_l(\eta) \frac{\partial}{\partial y_l} r_2(\eta - x_l, y_l) d\eta, \quad (7)$$

де  $r_2(\eta - x, y) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)} \left( \kappa_2 \sqrt{(\eta - x)^2 + y^2} \right)$ ,  $H_0^{(1)}(x)$  – функція Ганкеля.

Після цього переміщення у середовищі подаються у вигляді

$$w(x, y) = w^d(x, y) + w_1^g(x, y) + w_2^g(x, y), \quad (8)$$

де  $w_l^g(x, y)$ ,  $l=1,2$  знаходяться за формулами (7) після переходу в них до координат  $Oxy$ .

Щоб остаточно визначити переміщення необхідно відшукати невідомі стрибки (3), (5). Для цього слід скористатися умовами (2), (4). При цьому рівність (4) замінимо двома еквівалентними рівностями:

$$\frac{\partial w^d(x, 0)}{\partial x} = 0, \quad w^d(d, 0) = a. \quad (9)$$

Після підстановки (8) в граничні умови (2) і (9) отримуємо систему інтегро-диференціальних рівнянь щодо невідомих стрибків. Ця система після виділення сингулярних складових ядер і переходу до проміжку  $[-1, 1]$  має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left( \frac{S(\tau, \zeta)}{\tau - \zeta} + G(\tau, \zeta) + R(\tau, \zeta) \right) F(\tau) d\tau + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left( \kappa_0^2 D \ln |\tau - \zeta| + R_0(\tau, \zeta) \right) \Phi(\tau) d\tau = 0, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_0(\tau) [\gamma \ln |1 + \tau| + R_1(\tau)] d\tau - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_2(\tau) R_2(\tau) d\tau = -\frac{R_1}{4\epsilon \kappa_0^2 \gamma^2 \bar{\rho}}, \end{cases} \quad (10)$$

де

$$F(\tau) = (\varphi_0(\tau), \varphi_1'(\tau), \varphi_2'(\tau))^T = (f_0(\tau), f_1(\tau), f_2(\tau))^T; \quad \Phi(\tau) = (0, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau))^T;$$

$S(\tau, \zeta)$  – діагональна матриця з елементами  $q_0(\tau, \zeta) \equiv -1$ ,

$$q_l(\tau, \zeta) = \frac{1 + (-1)^l \tau}{1 + (-1)^l \zeta}, \quad l = 1, 2 \text{ на діагоналі}; \quad G(\tau, \zeta) = \{g_{lj}(\tau, \zeta)\}, \quad l, j = 0, 1, 2 -$$

матриця, ненульові елементи якої дорівнюють:

$$\begin{aligned} g_{10}(\tau, \zeta) &= \frac{\gamma \sin \beta_1 \tau^+}{p_1(\tau^+, \zeta^-)}, \quad g_{20}(\tau, \zeta) = \frac{\gamma \sin \beta_2 \tau^-}{p_2(\tau^-, \zeta^+)}, \quad g_{01}(\tau, \zeta) = \frac{-\tau^-}{p_1(\zeta^+, \tau^-)}, \\ g_{02}(\tau, \zeta) &= \frac{\tau^+}{p_2(\zeta^-, \tau^+)}; \quad p_j(x, y) = \gamma^2 x^2 + 2\gamma \gamma_j xy \cos \beta_j + \gamma_j^2 y^2, \quad j = 1, 2, \quad (11) \\ \tau^\pm &= 1 \pm \tau, \quad \zeta^\pm = 1 \pm \zeta; \end{aligned}$$

$D$  – діагональна матриця з елементами  $0, \gamma_l^2, l = 1, 2$  по діагоналі;

$$\begin{aligned} f_l(\tau) &= d_l^{-1} \chi_l(\eta), \quad x_l = d_l \zeta, \quad \eta = d_l \tau, \quad \gamma_l = d_l b^{-1}, \quad f_0(\tau) = G^{-1} \chi(\eta), \\ \eta &= d\tau, \quad \gamma = db^{-1}, \quad b = \max(d, d_l), \quad P_1 = P_0 b^{-1}. \end{aligned}$$

Із формули (11) випливає, що функції  $g_{lj}(\tau, \zeta)$  мають нерухомі особливості при  $\tau = \pm 1, \zeta = \pm 1$ . Матриці  $R(\tau, \zeta)$  і  $R_0(\tau, \zeta)$  складаються з функцій, що визначають регулярні інтеграли.

**Наближене розв'язання системи інтегро-диференціальних рівнянь.** Наявність в сингулярної складової системи (10) нерухомих особливостей впливає на поведінку її розв'язку в околі точок  $\zeta = \pm 1$  [6]. Асимпто-

тика розв'язку в околі цих точок, як і у [9], визначається за методикою, викладеною в [12]. Тому невідомі функції будемо розшукувати у вигляді:

$$\begin{aligned} (f_l(\tau))' &= (1+(-1)^l \tau)^{\delta_l} (1-(-1)^l \tau)^{-\frac{1}{2}} \psi_l(\tau), \quad l=1,2, \\ f_0(\tau) &= (1+\tau)^{\delta_1} (1-\tau)^{\delta_2} \psi_0(\tau), \end{aligned} \quad (12)$$

де степеневі показники знаходяться за формулами:

$$\delta_l = -\frac{\pi + 2\beta_l}{2(\pi + \beta_l)}, \quad 0 < \beta_l < \pi, \quad l=1,2, \quad \beta_1 = \alpha_1 - \pi, \quad \beta_2 = \alpha_2.$$

При цьому, щоб функції з такими особливостями були розв'язком системи (10), повинні виконуватися рівності [12]:

$$\psi_1(1) = (\gamma_1/\gamma) \delta_1 \psi_0(-1), \quad \psi_2(-1) = (\gamma_2/\gamma) \delta_2 \psi_0(1), \quad (13)$$

а функції  $\psi_l(\tau)$ ,  $l=0,1,2$ , вважаються такими, що задовольняють умові Гельдера на проміжку  $[-1;1]$ . Подальше розв'язання базується на апроксимації цих функцій інтерполяційними многочленами:

$$\psi_l(\tau) = \sum_{m=1}^n \psi_{lm} \frac{P_{ln}(\tau)}{(\tau - \tau_{lm}) [P'_{ln}(\tau_{lm})]}, \quad l=0,1,2, \quad (14)$$

де

$$\psi_{lm} = \psi_l(\tau_{lm}), \quad P_{0n}(\tau) = P_n^{\delta_2, \delta_1}(\tau), \quad P_{1n}(\tau) = P_n^{-\delta, -1/2}(\tau), \quad P_{2n}(\tau) = P_n^{-1/2, -\delta}(\tau)$$

- многочлени Якобі, а  $\tau_{lm}$  – корені цих многочленів.

Подання (12), (14) дають можливість застосувати для інтегралів з ядром Коші застосуємо наступні квадратурні формули [2]:

$$\int_{-1}^1 \frac{q_l(\tau, \zeta_{lk})(f_l(\tau))}{\tau - \zeta_{lk}} d\tau = \sum_{m=1}^n \frac{A_{lm} q_l(\tau_{lm}, \zeta_{lk}) \psi_{lm}}{\tau_{lm} - \zeta_{lk}}, \quad k=1, \dots, n-1, \quad l=0,1,2, \quad (15)$$

де  $\zeta_{lk}$  – нулі відповідних функцій Якобі другого роду  $J_n^{\delta_2, \delta_1}(\tau)$ ,  $J_n^{\delta_1, -1/2}(\tau)$ ,  $J_n^{-1/2, \delta_2}(\tau)$ , а  $A_{lm}$  – коефіцієнти відповідних квадратурних формул Гаусса – Якобі [7].

Далі аналогічні формули необхідно отримати для інтегралів з нерухомими особливостями:

$$E_{lj} = \int_{-1}^1 f_l(\tau) g_{lj}(\tau, \zeta) d\tau, \quad l=0,1,2. \quad (16)$$

Якщо  $1 \pm \zeta > \varepsilon > 0$ , то функції (11) є нескінченно диференційованими і до інтегралів (15) можна застосувати квадратурні формули Гаусса – Якобі. Основна проблема полягає в обчисленні цих інтегралів при  $1 \pm \zeta \rightarrow 0$ . Для цього використовуються подання (12), (14) і інтеграли (16) знаходяться так само як і у [9, 14]. Остаточні формули для обчислення інтегралів з нерухомими особливостями при  $\zeta = \zeta_{jk}$  мають вигляд:

$$E_{lj} = (-1)^l \sum_{m=1}^n \Psi_{lm} S_{mk}^{lj}, \quad l = 0, 1, 2 \quad (17)$$

$$S_{mk}^{lj} = \sum_{p=1}^3 B_p^{lj}(\tau_{lm}, \zeta_{jk}) h_p^{lj}(r_{lj}^k), \quad \varepsilon > r_{lj} > 0,$$

$$r_{0j} = \gamma_j (1 + (-1)^j \zeta_{jk}) / (2\gamma), \quad r_{l0} = \gamma (1 + (-1)^l \zeta_{lk}) / (2\gamma_l),$$

$$B_1^{0j}(x, y) = A_{l0}^m z_{0j}(x, y), \quad B_1^{l0}(x, y) = \frac{A_{l0}^m \gamma_l^2 (1 + (-1)^l x) \cos \beta_l}{p_l(x, y)},$$

$$B_p^{0j}(x, y) = \frac{z_{0j}(x, y) [(1 + (-1)^j x)^{3-p} \gamma_j^2 y^2 - x^{3-p} p_j(x, y)]}{n! x^{3-p} (1+x) [P_n^{\delta_{3-j}, \delta_j}(x)]'}$$

$$B_p^{l0}(x, y) = \frac{[(1 + (-1)^l x)^{3-p} \gamma_l^2 y^2 + ((-1)^l p_l(x, y))^{3-p}] \cos \beta_l}{n! x p_l(x, y) [P_n^{\delta_{3-l}, \delta_l}(x)]'}$$

$$z_{0j}(x, y) = \frac{\gamma (1 + (-1)^j x) + \gamma_j (1 + (-1)^j y) \cos \beta_l}{p_l(x, y)}, \quad h_1^{lj}(y) \equiv 1,$$

$$h_p^{0j}(y) = \frac{2^{\delta_j + \delta_{3-j}} \Gamma(\delta_{3-j} + n + 1)}{\gamma^2 \sin(\beta_j) \sin(\pi \delta_j)} \left( \sin(\pi \delta_{3-j}) \sum_{s=0}^{\infty} c_{sp}^{0j} y^{s + \delta_j} - \sin(\pi(\delta_j + \delta_{3-j})) \sum_{s=0}^{\infty} d_{sp}^{0j} y^s \right),$$

$$h_p^{l0}(y) = -\frac{2^{\delta_l - 0.5} \Gamma(n + 0.5)}{\gamma_l^2 \sin(\beta_l)} \left( \frac{\pi}{\sin(\pi \delta_l)} \sum_{s=0}^{\infty} c_{sp}^{l0} y^{s + \delta_l} - \sum_{s=0}^{\infty} d_{sp}^{l0} y^s \right),$$

$$c_{sp}^{0j} = (-1)^{s+1} \Gamma(s - \delta_j - n) b_{sp}^j, \quad c_{sp}^{l0} = \frac{b_{sp}^l}{\Gamma(n - s + 0.5)},$$

$$b_{sp}^j = \frac{\Gamma(\delta_i + s + n + 1) \sin(\beta_i (\delta_i + s + p - 2))}{s! \Gamma(s + \delta_i + 1)},$$

$$d_{sp}^{0j} = \frac{u_{sp}^j \Gamma(s - \delta_j - \delta_{3-j} - n + p - 2)(n + s + p - 2)! \Gamma(s - \delta_{3-j} - n)}{\Gamma(s - \delta_j + 1)},$$

$$d_{sp}^{l0} = \frac{u_{sp}^l \Gamma(\delta_l + s + p - 2)}{\Gamma(\delta_l - s + n + 0.5)}, \quad u_{sp}^i = \frac{(-1)^{s+1} \sin(\beta_i(s+1))}{(s + p - 2)!}, \quad l, j = 1, 2, p = 2, 3.$$

Таким чином, при  $1 - (-1)^l \zeta_{lk} \rightarrow 0$ ,  $l = 1, 2$  і  $1 \pm \zeta_{0k} \rightarrow 0$  інтеграли (17) подаються швидко збіжними степеневими рядами.

Для інтегралів з логарифмічною функцією у результаті інтегрування частинами та використання подання похідних (12), отримуємо наступні квадратурні формули [13]:

$$\int_{-1}^1 f_l(\tau) \ln|\tau - \zeta_{lk}| d\tau = \sum_{m=1}^n A_{lm} \Psi_{lm} B_{km}^l, \quad (18)$$

де

$$B_{km}^l = -(1 + \zeta_{lk})(\ln|1 + \zeta_{lk}| - 1) - (\tau_{lm} - \zeta_{lk})(\ln|\tau_{lm} + \zeta_{lk}| - 1), \quad l = 1, 2.$$

Для обчислення інтегралів, що містять безпосередньо невідомі функції  $\varphi_l(\tau)$ ,  $l = 1, 2$ , необхідно знайти їх наближене значення за допомогою рівностей:

$$\varphi_1(\tau) = \int_{-1}^{\tau} (\varphi_1(\tau))' d\tau, \quad \varphi_2(\tau) = -\int_{\tau}^1 (\varphi_2(\tau))' d\tau. \quad (19)$$

Далі використовується подання для похідних (12), а також тотожність Дарбу – Крістофеля. Внаслідок цього після інтегрування з (19) отримано вирази:

$$\varphi_l(\tau) = (-1)^{l+1} (1 - (-1)^l \tau)^{1/2} \sum_{m=1}^n A_{lm} \Psi_{lm} Q_{km}^l(\tau), \quad (20)$$

$$Q_{km}^l(\tau) = 2^{1+\delta_l} F\left(\frac{1}{2}; -\delta_l; \frac{3}{2}; \frac{1 - (-1)^l \tau}{2}\right) \Big/ \sigma_0^2 + \frac{(-1)^l (1 + (-1)^l \tau)^{1+\delta_l}}{2} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{n-1} \frac{P_{lj}(\tau_{lm}) P_{l,j-1}(\tau)}{j \sigma_j^2}, \quad l = 1, 2,$$

де

$$P_{1j}(\tau_{1m}) = P_j^{\delta_l, -1/2}(\tau_{1m}), \quad P_{2j}(\tau_{2m}) = P_j^{-1/2, \delta_l}(\tau_{2m}),$$

$$P_{1,j-1}(\tau) = P_{j-1}^{\delta_l+1, 1/2}(\tau), \quad P_{2,j-1}(\tau) = P_{j-1}^{1/2, \delta_l+1}(\tau).$$

Подання (20) є основою для наступних квадратурних формул з невідомими функціями  $\varphi_l(\tau)$ :

$$\int_{-1}^1 \varphi_l(x) R_0(\tau, \zeta_{jk}) dx = \sum_{m=1}^n A_{lm} \psi_{lm} U_{mi}^l(\tau_{li}) R(\tau_{lm}, \zeta_{jk}), \quad (21)$$

$$U_{mi}^l(\tau_{li}) = - \sum_{i=1}^n A_{li} Q_{km}^l(\tau_{li}), \quad A_{li} = \frac{2\sqrt{2}}{(1-\tau_{li}^2)((P_n(\tau_{li}))')^2}, \quad j, l = 1, 2,$$

де  $P_{1n}(\tau) = P_n^{0,1/2}(\tau)$ ,  $P_{2n}(\tau) = P_n^{1/2,0}(\tau)$  - многочлені Якобі, а  $\tau_{li}$  - корені цих многочленів.

Застосування квадратурних формул (15), (17), (18), (21), а також формул Гаусса – Якобі призводить до заміни системи інтегро-диференціальних рівнянь (10) системою лінійних алгебричних рівнянь щодо значень функцій  $\psi_l$ ,  $l = 0, 1, 2$  в вузлах інтерполяції.

Для механіки руйнування найбільший інтерес КІН:

$$K_1 = \lim_{x_1 \rightarrow -d_1 - 0} \sqrt{-x_1 - d_1} \cdot \tau_{y_1 z}^d(x_1, 0),$$

$$K_2 = \lim_{x_2 \rightarrow d_2 + 0} \sqrt{x_2 - d_2} \cdot \tau_{y_2 z}^d(x_2, 0).$$

Через розв'язок системи наближені значення КІН виражаються формулами:

$$K_l = -G \sqrt{d_l} 2^{\delta_l - 1} \psi_l((-1)^l), \quad l = 1, 2. \quad (22)$$

**Аналіз числових результатів і висновки.** При проведенні числової реалізації, по-перше, ставилась мета дослідити практичну збіжність запропонованого методу числового розв'язку. Для цього розглянуто дефект, показаний на рис.1, при  $\alpha_1 = \pi + \beta$ ,  $\alpha_2 = \beta$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ . Тріщини і включення мають однакову довжину  $d = d_l$ ,  $l = 1, 2$ . За формулами (22) розраховані безрозмірні значення КІН ( $k_l = K_l G^{-1} / \sqrt{d_l}$ ,  $l = 1, 2$ ). Причому в результаті симетрії маємо, що  $k_1 = k_2 = k$ . Розрахунки виконано при значенні кута  $\beta = 45^\circ$ . Результати обчислень наведені у вигляді графіків залежності абсолютної величини КІН від безрозмірного хвильового числа  $\kappa_0 = \kappa_2 b$ ,  $b = \max(d, d_l)$ . Криві 1 – 4 відповідають значенням  $n = 5, 10, 15, 20$ , що, в свою чергу, відповідає кількості вузлів інтерполяції у формулі (14). Можна бачити, що в розглянутому числовому частотному діапазоні, при отриманні значень КІН з похибкою, що не перевищує  $0,1\%$ , достатньо



до 20 вузлів інтерполяції в (14). А для хвиль з малою частотою  $\kappa_0 \leq 1,5$  достатньо і 5 вузлів (див. рис. 2).

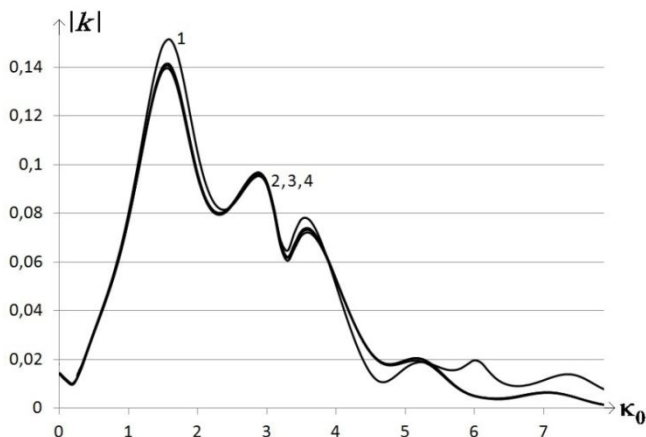


Рис. 2 – Залежності абсолютної величини КІН від безрозмірного хвильового числа  $\kappa_0$

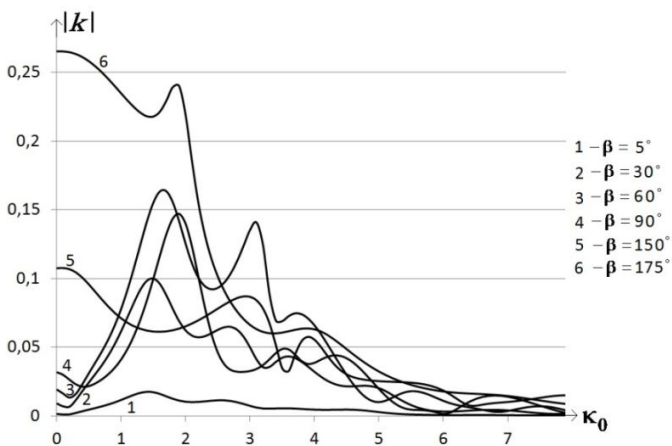


Рис.3 – Вплив розташування тріщин на величину КІН при зміні значень кута  $\beta$

Проведено дослідження впливу розташування тріщин на значення КІН при зміні значень кута  $\beta$  в залежності від безрозмірного значення хвильового числа при дії зсувної гармонійної сили. При збільшенні кута  $\beta$ , для малих значеннях частоти, спостерігається збільшення значень

КІН. Найменші значення КІН спостерігаються при виході на випадок коли дефекти лежать на одній прямій (див. рис. 3).

У цілому, в наслідок складності хвильового поля, що виникло за дії зсувної гармонічної сили, залежність КІН від частоти має істотні максимуми, на величину і положення яких впливає конфігурація дефекту.

### БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Акопян В. Н., Амирджанян А. А.** Напряженное состояние полуплоскости с выходящим на границу абсолютно жестким включением и трещиной // Известия национальной академии наук Армении. Механика. 2015. Т. 68. № 1.- С. 25–36.
2. **Андреев А. Р.** Прямой численный метод решения сингулярных интегральных уравнений первого рода с обобщенными ядрами // Изв. РАН МТТ. 2005. №1. С. 126–146.
3. **Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Стащук Н. Г.** Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. К.: Наукова Думка, 1983. 288с.
4. **Бережницкий Л. Т., Стащук Н. Г.** Коэффициенты интенсивности напряжений около трещины на продолжении линейного жесткого включения // Докл. АН УССР. Сер. А. 1981. №11. С. 30–46.
5. **Бережницкий Л. Т., Стащук Н. Г., Громяк Р.С.** К определению критического размера макротрещины, возникающей на продолжении линейного жесткого включения // Пробл. Прочности. 1989. № 2. С. 68–71.
6. **Дудучава Р. В.** Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики. Тбилиси: Мецниереба, 1979. 133 с.
7. **Крылов В. И.** Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967. 500 с.
8. **Литвин О. В., Попов В. Г.** Взаємодія гармонічної хвилі поздовжнього зсуву з V-подібним включенням // Математичні методи та фізико-механічні поля. Т. 60 №1. С. 96–106.
9. **Мишарін А. С., Попов В. Г.** Дослідження напруженого стану біля тріщини і включення, що виходять з однієї точки, при дії силою поздовжнього зсуву. // Вісник Київського нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Сер.: фізико-математичні науки. 2017. № 3. С. 147–150.
10. **Попов В. Г.** Две трещины, выходящие из одной точки под воздействием волны продольного сдвига // Изв. РАН МТТ. 2018. №2. С. 91–100.
11. **Попов В. Г.** Метод разрывных решений в плоских динамических задачах теории упругости. Дисс. д.ф.-м.н. 1996 р.
12. **Попов В. Г.** Дифракция упругих волн сдвига на включении сложной формы, расположенном в неограниченной упругой среде // Гидроаэромеханика и теория упругости: Численные и аналитические методы решения задач гидроаэродинамики и теории упругости. Д.: ДГУ. 1986. С. 121–127.
13. **Попов В. Г.** Напружений стан навколо двох тріщин, що виходять з однієї точки при гармонічних коливаннях поздовжнього зсуву // Вісник Київського нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки. 2013. № 3. С. 205–208.
14. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 344 с.
15. **Сулим Г. Т.** Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Львів: Дослід.-видав. центр НТШ, 2007. 716 с.
16. **Ропов V. G.** A crack in the shape of a three-link broken line under the action of a longitudinal shear wave // Journal of Mathematical Sciences. 2017. Vol. 222. No. 2. P. 112–120.

*А. С. Мишарин, В. Г. Попов, д-р физ. мат. наук*

**НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ВОЗЛЕ  
ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫХ ТРЕЩИН  
НА ПРОДОЛЖЕНИИ ЖЕСТКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ  
ПРИ ДЕЙСТВИИ СДВИГАЮЩЕЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ СИЛЫ**

Решена задача об определении динамических коэффициентов интенсивности напряжений для трещин, расположенных под углом от концов включения. Включение расположено в неограниченном упругом теле, находящемся в условиях деформации продольного сдвига, где происходят гармонические колебания, вызванные приложенной к включению сдвигающей силы. Исходная задача сводится к решению системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с неподвижными особенностями. Для численного решения системы разработан метод, учитывающий реальную асимптотику неизвестных функций и использует специальные квадратурные формулы для сингулярных интегралов.

*Ключевые слова:* коэффициенты интенсивности напряжений, сингулярные интегро-дифференциальные уравнения, гармонические колебания, неподвижная особенность, включение, трещина.

*A. S. Misharin, V. G. Popov, Dr. Sci. (Phys.-Math.)*

**STRESS STATE NEAR ARBITRARILY ORIENTED CRACKS  
ON THE CONTINUATION OF A RIGID INCLUSION  
UNDER THE ACTION OF THE SHEAR HARMONIC FORCES**

The problem about determining of the dynamic stress intensity factors for the cracks that are located at an angle from the ends of the inclusion is solved. The inclusion is located in an unbounded elastic body, under the conditions of deformation of the longitudinal shear, where harmonic oscillations occur due to the shear force applied to the inclusion. The initial problem is reduced to solve the system of singular integral-differential equations with fixed singularities. The method for numerical solution of the system is developed. It takes into account the real asymptotic of the unknown functions and uses the special quadrature formulas for singular integrals.

*Keywords:* stress intensity factors, singular integro-differential equations, harmonic oscillation, fixed singularity, inclusion, crack.

The isotropic elastic surroundings which in the condition of the antiplane strain is considered. In the surroundings there is a through thin absolutely rigid inclusion, from which cracks appear at an arbitrary angle. In the plane  $Oxy$  of inclusion and cracks are located as shown in Fig. 1.

It is required to determine the stress state near the defect under the action on it by plane shear harmonic forces.

Displacements are determined from the equations of the motion of elastic surroundings in terms of antiplane deformation. Boundary conditions are formed in the assumption that the inclusion is fully coupled with the surroundings (matrix), and the surface of cracks are not loaded.

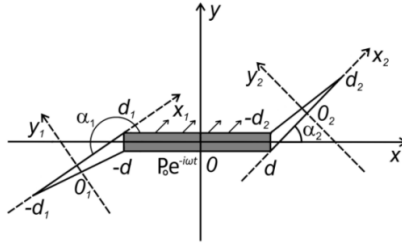


Fig.1 – Scheme of location of inclusion and cracks

The method of the solution is based on the presentation of displacements in the body as a superposition of three discontinuous solutions which are built according to the cracks and the inclusion. Then, in the case of satisfaction of the boundary conditions we obtain the system of singular integral equations concerning the jumps of stresses and displacements to the defect.

The original problem is reduced to the system of singular integro-differential equations with the fixed singularity.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left( \frac{S(\tau, \zeta)}{\tau - \zeta} + G(\tau, \zeta) + R(\tau, \zeta) \right) F(\tau) d\tau + \\ \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left( \kappa_0^2 D \ln|\tau - \zeta| + R_0(\tau, \zeta) \right) \Phi(\tau) d\tau = 0, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_0(\tau) [\gamma \ln|1 + \tau| + R_1(\tau)] d\tau - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_2(\tau) R_2(\tau) d\tau = -\frac{P_1}{4\varepsilon \kappa_0^2 \gamma^2 \bar{\rho}}. \end{array} \right.$$

The numerical method for solving this system which considers real asymptotic unknown function and special quadrature formulas for singular integrals is proposed. The formulas for calculating of the stress intensity factor (SIF) for cracks, amplitude of translational motion and the rotation angle of the inclusion are obtained. The numerical research of SIF depending on the dimensionless wave number is done. The frequencies with a maximum value of SIF are found.

## REFERENCES

1. **Akopyan V. N., Amirjanyan A. A.** Stress state in the half-plane with absolutely rigid inclusions and crack reaching the border // Proceedings of the National Academy of Sciences of Armenia. Mechanics. Vol. 68. No 1. 2015. P. 25 - 36. (in Russian).
2. **Andreev A. V.** Direct numerical method for solving the one-dimensional integro-differential equations with generalized kernels // Izv. RAS. MTT. 2007. No 2. P. 50-65. (in Russian).
3. **Berezhnitsky L. T., Panasyuk V. V., Stashchuk N. G.** Interaction of rigid linear inclusions and cracks in a deformed body // Kiev: Naukova Dumka, 1983. 288p. (in Russian).

4. **Berezhnitskii L. T., Stashchuk N. G.** Coefficients of stress intensity near a crack on the extension of a linear rigid inclusion // Dokl. Academy of Sciences of Ukraine. Ser. A.1981.No 11. P. 30–46. (in Russian).
5. **Berezhnitskii L.T., Stashchuk N. G., Gromyak R. S.** On the determination of the critical size of a macrocrack arising on the extension of a linear rigid inclusion // Probl. Strength.1989. No 2. P. 68–71. (in Russian).
6. **Duduchava R. V.** Convolution integral equations with discontinuous presymbols, singular integral equations with fixed singularities, and their applications to problems of mechanics. Tbilisi: Metsniereba, 1979.133 p. (in Russian).
7. **Krylov V. I.** Approximate calculation of integrals. Moscow: Nauka, 1967. 500 p. (in Russian).
8. **Litvin O. V.** The Interaction of harmonic wave of longitudinal shear with v-shaped inclusion // Math. Methods and physical-mechanical fields. 2017. Vol. 60. No 1. P. 96–106. (in Ukrainian).
9. **Misharin A. S., Popov V. G.** The research of the stress state near the crack and inclusion coming from one point, under the action of the longitudinal shear force // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Ser.: Physics & Mathematics. 2017. Vol. 3. P. 147–150. (in Ukrainian).
10. **Popov V. G.** Two cracks that extend from a single point under the influence of a longitudinal shear wave // Izv. RAS MTT. 2018. No 2. P. 91–100. (in Russian).
11. **Popov V. G.** The method of discontinuous solutions in plane dynamic problems of the theory of elasticity // Dissertation of the Doctor of Physical and Mathematical Sciences – 1996. (in Russian).
12. **Popov V. G.** Diffraction of elastic shear waves by the inclusion of a complex shape located in an unbounded elastic medium // Hydroaeromechanics and the theory of elasticity: Numerical and analytical methods for solving problems of hydroaerodynamics and elasticity theory. Dnepropetrovsk: Dnepropetr. state. Univ., 1986. P. 121–127. (in Russian).
13. **Popov V. G.** The stress condition near two cracks, which begin of one point under harmonic longitudinal oscillation // Bulletin of the Taras Shevchenko National University of Kyiv. Ser.: Physics and Mathematics. 2013. Vol 3. P. 205–208. (in Ukrainian).
14. **Popov G. Ya.** The Concentration of elastic stresses near stamps, cuts, thin inclusions and reinforcements // Moscow: Nauka,1982. 344 p. (in Russian).
15. **Sulim G. T.** The base of mathematical theory of thermoelastic equilibrium of deformable bodies with thin inclusions // Lviv: Doslid.-issued. NTSh center, 2007. 716 p. (in Ukrainian).
16. **Popov V. G.** A crack in the shape of a three-link broken line under the action of a longitudinal shear wave // Journal of Mathematical Sciences. 2017. Vol. 222. No. 2. P. 112–120.

*Національний університет  
«Одеська морська академія»,  
Одеса, Україна*

*Надійшла до редколегії 25.10.2018*