

УДК 539.3

С. О. Пискунов, д-р техн. наук, В. В. Валер

ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ В НЕОДНОРІДНОМУ ТЕМПЕРАТУРНОМУ ПОЛІ НА ОСНОВІ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Наведені вихідні співвідношення нестационарної і стационарної задачі теплопровідності, що описують різні види граничних умов, та диференціальні рівняння теплопровідності з їх варіаційними еквівалентами. Розроблений спеціальний косокутний скінченний елемент, теплофізичні і геометричні характеристики якого обчислюються у точці інтегрування, що знаходиться у центрі елемента. Наведено алгоритм розв'язання системи диференціальних рівнянь за методом скінченних різниць із застосуванням схеми Кранка – Ніколсона. Отримано розподілення температур для нескінченної пластини та циліндра, а також розглянуто термопружне деформування циліндра та стержня.

Ключові слова: нестационарна теплопровідність, осесиметричні тіла, плоскодеформовані тіла, універсальний скінченний елемент, метод скінченних елементів.

Вступ. Значна кількість відповідальних об'єктів техніки знаходиться під дією термосилового навантаження, пов'язаного з нерівномірним розподілом температури. Експлуатація таких об'єктів відбувається як при сталих значеннях зовнішніх факторів, так і при складних умовах температурних режимів. У цьому випадку визначення нерівномірних температурних полів потребує розв'язування нестационарної задачі теплопровідності, а в окремих випадках – стационарної задачі теплопровідності.

Вихідні співвідношення задачі теплопровідності. Температурне поле неоднорідного тіла за відсутності внутрішніх джерел тепла описується [6]:

- в загальному випадку, рівнянням нестационарної теплопровідності

$$\operatorname{div}(\lambda \nabla T) = C \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1)$$

- в окремому випадку, рівнянням стационарної теплопровідності

$$\operatorname{div}(\lambda \nabla T) = 0. \quad (2)$$

У криволінійній системі координат x^α [2] покомпонентна форма диференціального рівняння (1) приймає вигляд [1]

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\lambda g^{\alpha\beta} \sqrt{g} \frac{\partial T}{\partial x^\beta} \right) = C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3)$$

і диференціального рівняння (2) відповідно

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\lambda g^{\alpha\beta} \sqrt{g} \frac{\partial T}{\partial x^\beta} \right) = 0. \quad (4)$$

Для забезпечення однозначності розв'язання рівняння (3) вводяться відповідні початкові та граничні умови. За початкові умови приймається відоме розподілення температур по тілу у фіксований момент часу t_0 , що являє собою початкову часову координату

$$T(x^\alpha, t_0) = T_0(x^\alpha), \quad x^\alpha \in L, \quad (5)$$

де $T_0(x^\alpha)$ – задана функція координат.

В теорії теплопровідності нараховують чотири види граничних умов. В даній роботі застосовуються граничні умови першого і третього роду.

Граничні умови першого роду, або умова Діріхле (рис. 1, а) – задане розподілення температури на поверхні тіла для кожного моменту часу:

$$T(x^\alpha, t) = f(x^\alpha, t), \quad x^\alpha \in L_1, \quad (6)$$

де $f(x^\alpha, t)$ – задана функція; L_1 – частина поверхні тіла S , на якій задані граничні умови першого роду.

Для стаціонарної задачі теплопровідності, коли температура на поверхні є постійною,

$$T(x^\alpha) = const, \quad x^\alpha \in L_1. \quad (7)$$

Граничні умови третього роду, або умова Робена (рис. 1, б) – задана температура зовнішнього середовища і закон теплообміну між поверхнею тіла і зовнішнім середовищем (теплообмін за законом Н'ютона – Ріхмана)

$$-\lambda \frac{\partial T(x^\alpha, t)}{\partial n} = \alpha [T(x^\alpha, t) - \theta(x^\alpha, t)], \quad x^\alpha \in L_2, \quad (8)$$

де α – коефіцієнт тепловіддачі; θ – температура зовнішнього середовища; L_2 – частина поверхні тіла S , на якій задані граничні умови третього роду.

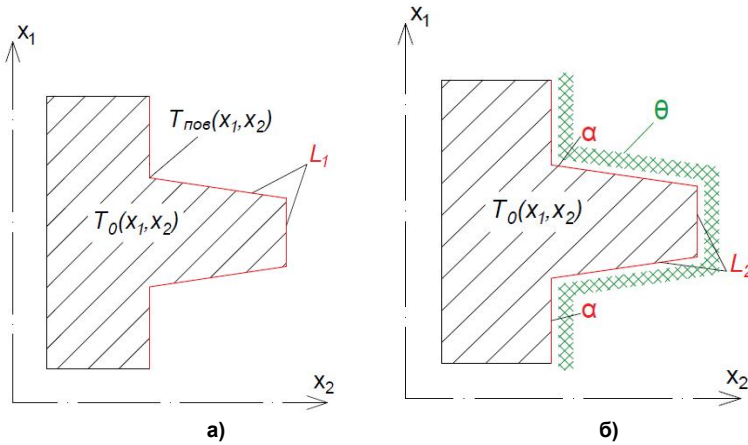


Рис. 1 – Граничні умови теплопровідності

Для стаціонарної задачі теплопровідності граничні умови третього роду набувають вигляду

$$-\lambda \frac{\partial T(x^\alpha)}{\partial n} = \alpha [T(x^\alpha) - \theta(x^\alpha)], \quad x^\alpha \in L_2. \quad (9)$$

Рівняння (3) з початковими умовами (5) та граничними умовами (6), (8) однозначно визначає нестационарне температурне поле в тілі; рівняння (4) з початковими умовами (5) та граничними умовами (7), (9) – стаціонарне температурне поле в тілі.

Диференціальне рівняння (3) з початковими умовами (5) та граничними умовами (6), (8) є еквівалентним варіаційному рівнянню двовимірної задачі нестационарної теплопровідності [5]

$$\delta\chi = \int_S \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \delta T}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta} \right) \sqrt{g} dL + \int_L \alpha (T - \theta) \delta T dL - \int_S C \frac{\partial T}{\partial t} \delta T \sqrt{g} dL. \quad (10)$$

Відповідно, диференціальне рівняння (4) з початковими умовами (5) та граничними умовами (7), (9) є еквівалентним варіаційному рівнянню плоскої задачі стаціонарної теплопровідності [5]

$$\delta\chi = \int_S \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \delta T}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta} \right) \sqrt{g} dL + \int_L \alpha (T - \theta) \delta T dL. \quad (11)$$

Індекси, яким відповідають грецькі букви, приймають значення 1, 2; а індекси, яким відповідають латинські літери, приймають значення 1, 2, 3. Дане правило зберігається і надалі.

Розв'язувальні співвідношення методу скінченних елементів (МСЕ) для двовимірної задачі теплопровідності. Для дискретизації осесиметричних та плоскодеформованих тіл використовуються скінченні елементи (СЕ), що являють собою чотирикутники довільної форми. Кожному СЕ у відповідність поставлена місцева криволінійна система координат x^i , яка пов'язана з геометрією елемента так, що осі x^1 і x^2 спрямовані вздовж сторін поперечного перетину СЕ. У місцевій системі координат поперечний переріз скінченного елемента представлений як квадрат із одиничною стороною (рис. 2).

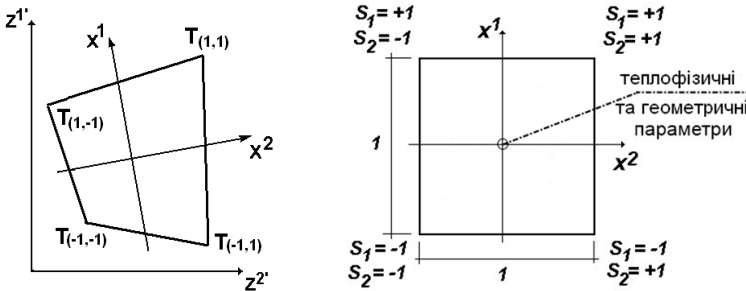


Рис. 2 – Косокутний універсальний СЕ

В межах СЕ передбачається, що коефіцієнт теплопровідності λ , питома об'ємна теплоємність C та значення компонент метричного тензора g^{ij} несуттєво змінюються в площині СЕ і приймаються рівними їх відповідним значенням у центрі:

$$\lambda = \overset{\circ}{\lambda} = \lambda|_{x^\alpha=0}, \quad C = \overset{\circ}{C} = C|_{x^\alpha=0}, \quad g^{ij} = \overset{\circ}{g}^{ij} = g^{ij}|_{x^\alpha=0} \quad (12)$$

При розв'язанні задачі стаціонарної теплопровідності за невідомі приймаються значення температури в вузлах елемента $T_{(S_1, S_2)}$.

Розподіл температури у межах поперечного перетину СЕ описується білінійним законом

$$T = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1, S_2)} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right). \quad (13)$$

Для СЕ, які примикають до границь області, розподілення температури вздовж координатної лінії визначається за формулою

$$T = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1, S_2)} \left(\frac{1}{2} + S_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right). \quad (14)$$

Вирази для похідних від температури і часу мають вигляд:

$$T_{,\alpha} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)} \left(\frac{1}{2} + S_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) S_{\alpha} , \quad (15)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \frac{T_{(S_1 S_2)}}{\partial t} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right). \quad (16)$$

При скінченноелементній апроксимації тіла для системи з N СЕ рівняння (3) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \delta\chi = \sum_{n=1}^N \delta\chi_n = \sum_{n=1}^N \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \delta T}{\partial x^{\beta}} g^{\alpha\beta} \right) \sqrt{g} dx^1 dx^2 + \\ + \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \alpha T \delta T \sqrt{g} dx^1 dx^2 - \int_L \alpha \theta \delta T \sqrt{g} dL - \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} C \frac{\partial T}{\partial t} \delta T \sqrt{g} dx^1 dx^2 = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Після підстановки в (5) значень температури (6) та її похідних (15), (16) та обчислення інтегралів, отримаємо

$$\begin{aligned} \delta\chi_n = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} T_{(S_1, S_2)} \delta T_{(P_1, P_2)} R_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} - \\ - \int_L \alpha \theta \delta T \sqrt{g} dL + \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} T_{(S_1, S_2)} \delta T_{(P_1, P_2)} B_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} - \\ - \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \frac{T_{(S_1 S_2)}}{\partial t} \delta T_{(P_1 P_2)} C_{(S_1, S_2, P_1, P_2)}, \end{aligned} \quad (18)$$

де

$$R_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} = \lambda \left(\frac{1}{4} S_{\alpha} P_{\beta} g^{\alpha\beta} + \frac{1}{12} S_1 S_2 P_1 P_2 g^{\alpha\alpha} \right) \sqrt{g} \quad (19)$$

– коефіцієнти матриці теплопровідності;

$$B_{(S_{\alpha}, P_{\alpha})} = \alpha \sqrt{g} \left(\frac{(S_{\alpha} P_{\alpha} + 3)}{12} \right) \sqrt{g^{(3-\alpha)(3-\alpha)}} \quad (20)$$

– добавка до коефіцієнтів матриці теплопровідності на границі області, що співпадають з координатною лінією x^α ($\alpha = 1, 2$);

$$C_{(S\alpha, P\alpha)} = \frac{C\sqrt{g}}{2} (S_1 P_1 + 3)(S_2 P_2 + 3) \quad (21)$$

– коефіцієнти матриці теплоємності.

Інтеграл $\{Q_0\}$, що містить θ , визначається чисельно тільки на контурі тіла і при формуванні системи рівнянь переноситься в праву частину.

В силу довільності варіації $\delta T_{(P_1 P_2)}$ рівняння (10) еквівалентне системі звичайних диференціальних рівнянь

$$\sum_{n=1}^N \left([R] + [B] - [C] \{T\}_{,t} \right) = \sum_{l=1}^L \{Q_0\}, \quad (22)$$

де коефіцієнти матриць $[R]$, $[B]$, $[C]$ визначаються за формулами (19) – (21).

Для розв'язання системи диференціальних рівнянь (22) застосовується метод скінченних різниць. Вздовж часової координати t вибирається скінченна множина N точок t_n ($n = 0, 1, \dots, N$) з кроком Δt_n таким чином, щоб $t_n \big|_{n=0} = t_n$; $t_n \big|_{n=N} = t_n$. Замінюючи похідну за часом в (22) скінченно-різницеvim алгоритмом другого порядку точності за схемою Кранка – Ніколсона [5] і приймаючи за невідомі значення температури в вузлах сіткової області в момент часу t_{n+1} , матимемо систему алгебричних рівнянь відносно $T_{(S_1, S_2)}^{n+1}$ в матричному вигляді

$$[C] \{T\}_{n+1} + ([R] + [B]) \{T\}_{n+1} = [C] \{T\}_n - ([R] + [B]) \{T\}_n + \{Q_0\}_n. \quad (23)$$

Для стаціонарної теплопровідності процес виведення матриці теплопровідності є аналогічним.

Достовірність отриманих розв'язків задач теплопровідності і термопружності. Розроблений алгоритм розв'язання задач перевірений на тестових прикладах задач стаціонарної і нестаціонарної теплопровідності.

Дослідимо розподілення температур по частині циліндра (рис. 3), що знаходиться в стаціонарному температурному режимі. Вихідні дані: $r_1 = 10$ мм, $r_2 = 40$ мм, температура на внутрішній поверхні стінки $T_1 = 100$ °C, температура на зовнішній поверхні стінки $T_2 = 400$ °C.

Поверхні вздовж осі z^2 абсолютно теплоізолювані.

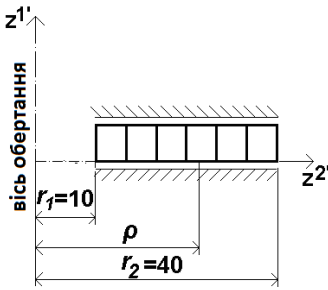


Рис. 3 – Частина циліндра

За еталонний прийнятий аналітичний розв'язок, отриманий в [4]. Як видно, отримані результати (табл. 1) майже повністю збігаються із еталонним розв'язком.

Таблиця 1 – Порівняльні результати

ρ , мм	Температура T , °C		Похибка, %
	Аналітично	МСЕ	
10	100	100	0
15	187,74	186,62	0,60
20	250	247,87	0,85
25	298,27	296,12	0,72
30	337,74	336,62	0,33
35	371,10	370,33	0,21
40	400	400	0

Розглянемо довгий циліндр (рис. 4) при конвекційному теплообміні між його поверхнею і навколишнім середовищем, температура якого θ_2 змінюється в залежності від часу t за законом $\theta_2 = \theta_0(1 + k_1 \cdot e^{k\tau})$, де $\tau = \alpha t / r^2$ – безрозмірний час; r – радіус циліндру; $\theta_0 = 823^\circ \text{C}$; $\alpha = 0,557 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{сек}$ – коефіцієнт теплопровідності; $k_1 = -0,5473$; $k = 53,6$. Температура циліндра при $t_0 = 0$ прийнята 323°C , критерій теплової подібності $B_i = \alpha \cdot r / \lambda = 15$.

Для даної задачі досліджувалась узгодженість розв'язку, який отриманий за розробленою методикою, з аналітичним розв'язком [6], а також з числовим розв'язком, отриманим на основі використання просторово-часових СЕ [3] в залежності від кількості СЕ по радіусу. Аналіз резуль-

татів показав, що при достатньо малій (5 СЕ) кількості елементів, взятих по товщині циліндра, максимальна похибка не перевищує 3%, а десять елементів забезпечують точність з максимальною похибкою до 1%.

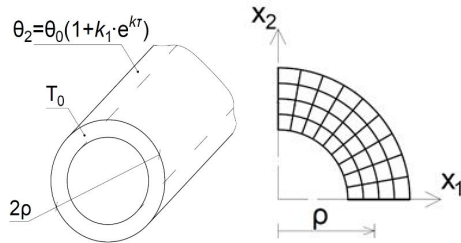


Рис. 4 – Схема і скінченноелементна модель суцільного циліндра

На рис. 5 у вигляді ізоліній показано розподіл температури в циліндрі для моментів часу $t = 180c, 300c, 420c, 540c$.

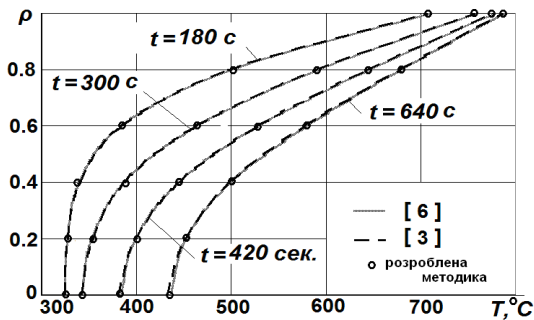


Рис. 5 – Розподіл температури у суцільному циліндрі

Суцільна лінія відповідає аналітичному розв'язку [6], штрихпунктирна – розв'язку, отриманому за МСЕ [3], а кружками – за розробленою методикою. Зіставлення кривих аналітичного і наближених розв'язків дозволяє констатувати, що запропонована методика досить добре узгоджується з аналітичним і числовим розв'язками інших авторів.

Розглянемо розподіл температури по товщині необмеженої сталевій пластини (рис. 6) при конвекційному теплообміні між її поверхнею $z^I = +h/2$ і навколишнім середовищем. Поверхня $z^I = -h/2$ передбачається ідеально теплоізолюваною. Початкова температура пластини $T_0 = 293^\circ K$, температура теплоносія $\theta = 1273^\circ K$, коефіцієнт теплопровідності $\alpha = 0,66 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{сек}$. Критерій теплової подібності, що відповідає товщині пластини, $h = 0,008 \text{ м}$, $B_i = \alpha \cdot R/\lambda = 0,2$.

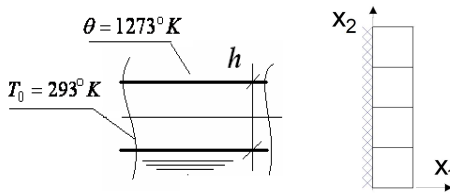


Рис. 6 – Розрахункова схема і СЕ-модель необмеженої пластини

На рис. 7 показано розподілення температури по товщині пластини для моментів часу $t = 5c, 10c, 15c, 20c, 30c, 60c$. Як і в попередньому прикладі, суцільна лінія відповідає аналітичному розв'язку [6], штрихпунктирна – розв'язку, отриманому за МСЕ [3], а кружками – за розробленою методикою.

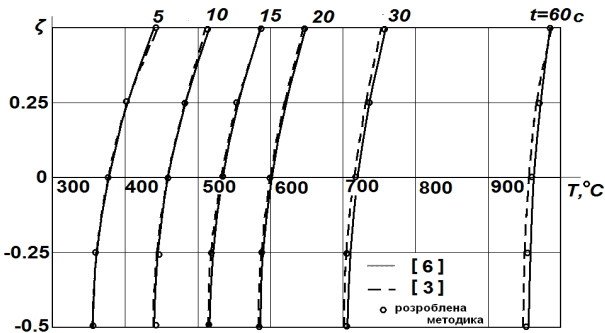


Рис. 7 – Розподіл температури у необмеженій пластині

Термопружне деформування нерівномірно нагрітої товстостінної труби. Товстостінна труба (рис. 8, а) знаходиться в температурному полі, змінення якого вздовж радіусу описується за законом:

$$T = -71.66 \cdot (r/b - 0.2)^{1.6}.$$

Модуль пружності ϵ залежним від температури:

$$E = E(T) = 10^3 \cdot e^{-0.04606 \cdot T}; \nu = 0,3; \alpha_T = 1 \cdot 10^{-4} \text{ град}^{-1} [6].$$

Розв'язування задачі на основі МСЕ виконане в умовах плоскої деформації. Дискретна модель плоскої задачі наведена на рис. 8, б. Результати представлені на рис. 8, в у вигляді епюр колових напружень σ_φ , які повністю збігаються із еталонним розв'язком, отриманим в [6].

Термопружне деформування призматичного стержня. Призматичний стержень розмірами $1 \times 1 \times 10$ см знаходиться під дією температури, яка лінійно змінюється вздовж його осі від 200°C до 0°C (рис. 9). Значення фізико-механічних характеристик матеріалу прийняті такими ж, як у попередньому прикладі. При розв'язанні даного тестового прикладу було

проведено перевірку достовірності моделювання термопружного стану при нерівномірному розподіленні температури вздовж поперечного перерізу стержня.

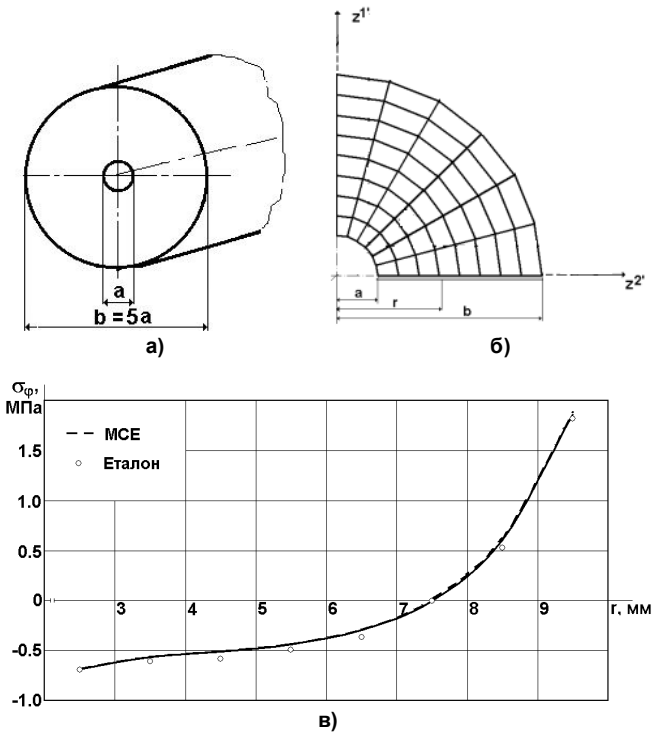


Рис. 8 – Розподілення температури в товстостінній трубі

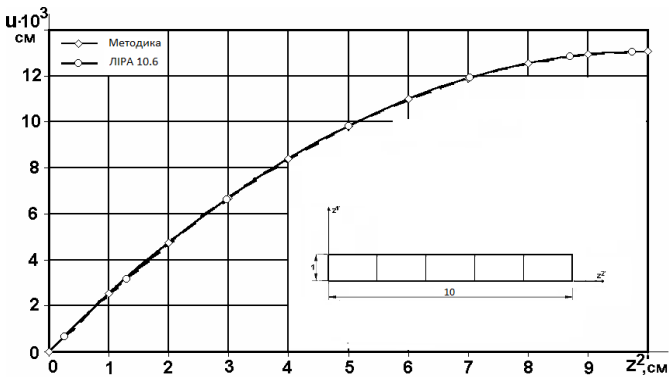


Рис. 9 – Розподілення температури в призматичному стержні

У якості еталонного прийнято розв'язок, отриманий за допомогою програмного комплексу ЛІРА 10.6 при використанні дискретної моделі, наведеної на рис. 9. Результати розрахунку за розробленою методикою повністю співпадають з еталонним розв'язком.

Аналіз результатів свідчить, що в даному прикладі спостерігається добра узгодженість наближеного і аналітичного розв'язків.

Висновок. Таким чином, для розглянутих випадків розподілення температур і теплофізичних характеристик матеріалу забезпечується достовірність результатів, отриманих за розробленою методикою.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Блох В. И.** Теория упругости. Харьков: Изд-во ХГУ, 1964. 484 с.
2. **Гулярь О. І., Пискунов С. О., Максим'юк Ю. В., Андрієвський В. П.** Алгоритм розв'язання вісесиметричних задач нестационарної теплопровідності // Опір матеріалів і теорія споруд. 2015. Вип. 95. С. 64–72.
3. **Гулярь А. И., Кислоцкий В. Н., Сахаров А. С., Чорный С. М.** Решения трехмерной задачи теплопроводности в криволинейной системе координат методом конечных элементов // Сопrotивление материалов и теория сооружений. 1974. Вып. XXII. С. 32–46.
4. **Димніч А. Х., Троянський О. А.** Теплопровідність: навч. посібник. Донецьк, 2003. 370 с.
5. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 318 с.
6. **Коваленко А. Д.** Основы термоупругости. К.: Наукова думка, 1970. 204 с.
7. **Шабров Н. Н.** Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей. Л.: Машиностроение, 1968. 212 с.

УДК 539.3

С. О. Пискунов, д-р техн. наук, В. В. Валер

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ В НЕОДНОРОДНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ НА ОСНОВЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Приведены исходные соотношения для нестационарной и стационарной задач теплопроводности, описывающие различные виды граничных условий, и дифференциальные уравнения теплопроводности с их вариационными эквивалентами. Разработан специальный косоугольный конечный элемент, теплофизические и геометрические характеристики которого определяются в точке интегрирования, находящейся в центре элемента. Приведен алгоритм решения системы дифференциальных уравнений методом конечных разностей с применением схемы Кранка – Николсона. Получены распределения температур для бесконечной пластины и цилиндра, рассмотрено термоупругое деформирование цилиндра и стержня.

Ключевые слова: нестационарная теплопроводность, осесимметричные тела, плоскодеформируемые тела, универсальный конечный элемент, метод конечных элементов

DETERMINATION OF PARAMETERS OF THE THERMOELASTIC STATE IN THE NON-HOMOGENOUS TEMPERATURE FIELD ON THE BASIS OF FINITE ELEMENT METHOD

The paper presents the basic relations of the transient and steady-state heat transfer problems, namely the equations describing different types of boundary conditions, and the differential equations of heat conduction with their variational equivalents. A special curvilinear finite element is developed, the thermophysical and geometric characteristics of which are calculated at the integration point located in the center of the element. Algorithm for solving of the system of differential equations using the finite difference method and the Crank-Nicholson scheme is presented. The temperature distribution for an infinite plate and cylinder is obtained, and the thermoelastic deformation of the cylinder and of the rod is considered.

Keywords: transient heat transfer, axisymmetric bodies, plane-deformed bodies, general finite element, finite element method.

Operation and maintenance of many critical objects take place in complicated temperature conditions. In such cases, it is necessary to determine the distribution of non-homogenous temperature fields, as well as to determine their influence on the physical and mechanical characteristics of the structure. The paper presents the basic relations of the transient and steady-state heat transfer problems, namely the equations describing different types of boundary conditions, and the differential equations of heat conduction with their variational equivalents.

A special curvilinear finite element is developed, the thermophysical and geometric characteristics of which are calculated at the integration point located in the center of the element. The equations for the temperature distribution across the cross-section of the element are given, as well as the expressions for the temperature derivatives. Expressions for finite-element approximation of a body and deduction of a matrix of heat conduction for a finite element are given. Algorithm for solving the system of differential equations using the finite difference method and the Crank-Nicholson scheme is presented.

The finite element and the reliability of the development algorithm were verified for solving the test problems of stationary heat conductivity, transient thermal conductivity and thermoelasticity. Series of two-dimensional problems have been solved. The temperature distribution for an infinite plate during transient thermal loading and part of cylinder during steady-state thermal loading is obtained. Thermoelastic deformation of the tube and the rod is considered. The obtained results were compared favorably with classical numerical studies of other authors.

In conclusion, developed algorithm can be used for simple cases of temperature distribution and thermophysical properties of the material.

REFERENCES

1. **Blokh V. I.** Theory of Elasticity. Kharkov: Ed. Gos. University, 1964. 484 p. (in Russian).
2. **Guljar O. I., Piskunov S. O., Maksim'yuk Yu. V., Andrievsky V.P., Gular O.I.** The algorithm for solving the axisymmetric problems of transient heat transfer // Strength of materials and theory of structures. 2015. Vol. 95. P. 64–72. (in Ukrainian).
3. **Gulyar A. I., Kislokiy V. N., Sakharov A. S., Chorny S. M.** Solutions of the three-dimensional problem of heat conductivity in the curvilinear coordinate system by the finite element method // Strength of materials and theory of structures. Iss. XXII. 1974. P. 32–46. (in Russian).
4. **Dimnich A. Kh., Troyansky O .A.** Thermal conductivity: [cur. manual]. Donetsk, 2003. 370 p.
5. **Zenkevich O.** Finite Element Method in Engineering. Moscow: Mir, 1975. 318 p. (in Russian).
6. **Kovalenko A. D.** Foundations of Thermoelasticity. Kiev.: Naukova Dumka, 1970. 204 p. (in Russian).
7. **Shabrov N. N.** The finite element method in calculating the details of thermal engines. Leningrad: Mashinostroenie, 1968. 212 p. (in Russian).

*Київський національний університет
будівництва і архітектури,
Київ, Україна*

Надійшла до редколегії 08.09.2018