

УДК 539.312

*В. І. Пожуєв¹, д-р фіз.-мат. наук,
А. В. Пожуєв², канд. фіз.-мат. наук, А. В. Фасоляк¹*

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ У ПРУЖНОМУ ПІВПРОСТОРИ ЗА ДОПОМОГОЮ БІПОЛЯРНОЇ СИСТЕМИ КООРДИНАТ

Розглянуто нестационарну динамічну задачу для циліндричної оболонки у лінійно-пружному однорідному ізотропному та інерційному півпросторі. Досліджено взаємний вплив оболонки та поверхні півпростору на динамічний напружено-деформований стан даної механічної системи. Розв'язок даної задачі отримано за допомогою застосування біполярної системи координат. Проведено порівняння отриманих результатів із аналогічними результатами у інших роботах.

Ключові слова: циліндрична оболонка, біполярна система координат, пружний півпростір, динамічні навантаження, поверхня півпростору.

Вступ. Досить важливе значення для практики має розрахунок динамічного напружено-деформованого стану для механічних систем, що складаються з пружного півпростору, що містить циліндричну порожнину, підкріплену тонкою пружною оболонкою. Зокрема, до такої розрахункової схеми призводять задачі моделювання тунелів метрополітену, трубопроводів та інших підземних конструкцій.

Досить добре досліджені динамічні задачі для циліндричних оболонок у необмеженому пружному інерційному просторі (при глибині залягання оболонки більше 5 її діаметрів). Роботи [1, 5, 6] присвячені подібним задачам, причому в [1] розглянуто випадок рухомих навантажень; в [5] – у нестационарній постановці для навантажень, що діють осесиметрично, а в [6] – неосесиметрично.

Для оболонок неглибокого залягання потрібно враховувати вплив поверхні пружного інерційного півпростору. В [7, 8] розглянута динамічна задача в нестационарній постановці для навантажень, що рівномірно розподілені вздовж осі циліндра. Для розв'язання задачі, в обох роботах було використано метод скінченних елементів. Причому в [8] навантаження внутрішня поверхня оболонки, а в [7] – поверхня середовища. В [3] розглянута задача для півпростору з циліндричною порожниною, яка не підкріплена оболонкою, у стаціонарній постановці із застосуванням біполярної системи координат.

Дана робота присвячена динамічним задачам для пружного півпростору, який містять циліндричну порожнину, підкріплену тонкою оболонкою, у загальній постановці. Припускається, що оболонка розташована на невеликій глибині (глибина залягання оболонки не перевищує 5 її

діаметрів). Для розв'язання задачі в роботі застосовується біполярна система координат. Розглядається випадок, коли нормальне навантаження діє на поверхню півпростору. Також досліджується питання впливу глибини залягання на напружено-деформований стан системи «оболонка-півпростір».

Постановка задачі. Розглядається нестационарна деформація лінійно-пружного, однорідного та ізотропного півпростору, що містить циліндричну порожнину, яка підкріплена тонкою пружною оболонкою. Будемо припускати, що нормальні навантаження, що діють на ділянку поверхні півпростору, залежать від часу як одинична функція Хевісайда. Поверхня оболонки вільна від напружень. Нехай оболонка та півпростір віднесені до нерухомої декартової системи координат $\{x, y, z\}$. Внутрішня поверхня оболонки задається рівнянням $x^2 + (y+l)^2 = b^2$, а поверхня контакту між півпростором та оболонкою – $x^2 + (y+l)^2 = r^2$ ($h = r - b$ – товщина оболонки). Контакт між оболонкою та півпростором вважаємо ковзним. Нехай вісь оболонки та вісь z паралельні. В момент часу $t < 0$ оболонка та півпростір знаходяться в стані спокою та вільні від напружень. В момент часу $t = 0$ прикладається імпульсивне навантаження, яке діє по нормалі до поверхні півпростору.

Слід зазначити, що в даній роботі приймається, що навантаження рівномірно розподілене за осью координатою, тобто не залежить від змінної z , тому початкова задача зводиться до плоскої задачі теорії пружності. Будемо припускати також, що навантаження прикладені симетрично відносно осі y .

Для розв'язання задачі перейдемо до безрозмірних величин:

$$\begin{aligned} \{x_*, y_*\} &= \frac{1}{r} \{x, y\}; \quad \{U_x, U_y\} = \frac{1}{r} \{u_x, u_y\}; \quad \{V, W\} = \frac{1}{r} \{v, w\}; \\ \{\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\sigma}_{xy}\} &= \frac{1}{G_2} \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\}; \\ \gamma &= \frac{G_1}{G_2}; \quad \rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}; \quad \kappa = \frac{h}{r}; \quad R = \frac{r}{r} = 1; \quad L = \frac{l}{r}; \quad \tau = \frac{c_s}{r} t; \quad c_s = \sqrt{\frac{G_2}{\rho_2}}; \end{aligned}$$

де ρ_2, G_2 – густина та модуль зсуву півпростору, ρ_1, G_1 – густина та модуль зсуву оболонки.

Надалі всі рівняння будемо одразу виписувати у безрозмірному вигляді. Введемо біполярну систему координат, яка задається співвідношеннями [9]:

$$x_* = \frac{a_0 \sin \beta}{ch \alpha + \cos \beta}, \quad y_* = -\frac{a_0 sh \alpha}{ch \alpha + \cos \beta}, \quad a_0 = \sqrt{L^2 - R^2}. \quad (1)$$

Оскільки припускається, що задані навантаження діють симетрично відносно y_* , тому можна зробити розріз по осі Oy_* , який буде враховано за допомогою граничних умов. Введена біполярна система координат дозволяє перевести нескінченну область $ABCD$ в скінченну область $0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}_0; 0 \leq \beta \leq \beta_0; (A'B'C'D')$, де $\bar{\alpha}_0 = \ln\left(\frac{R+L+a_0}{R+L-a_0}\right)$,

$$\beta_0 = \pi \text{ (рис. 1).}$$

Біполярна система координат, задана співвідношеннями (1) має наступні геометричні характеристики:

$$h_\alpha = h_\beta = \frac{a_0}{ch\alpha + \cos\beta}, \quad g_{\alpha\alpha} = g_{\beta\beta} = h_\alpha^2,$$

де h_α, h_β – коефіцієнти Ламе; $g_{\alpha\alpha}, g_{\beta\beta}$ – компоненти метричного тензора.

Оскільки біполярна система координат є ортогональною [9], тому в ній справедливі рівняння руху, які в довільній ортогональній системі координат (при відсутності масових сил) мають вигляд [4]

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (g\sigma_{ii}) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 \frac{g\sigma_{kk}}{h_{x_k}^2} \frac{\partial h_{x_k}^2}{\partial x_i} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{g\sigma_{ik} h_{x_i}}{h_{x_k}} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i=1,2,3, \quad (2)$$

де h_{x_i} , ($i=1,2,3$) – коефіцієнти Ламе; $g = \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}} = h_{x_1} h_{x_2} h_{x_3}$.

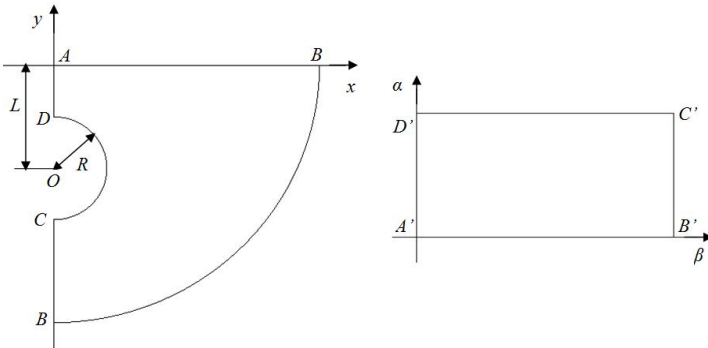


Рис. 1 – Перетворення області

Оскільки, для біполярної системи координат $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = z$, $h_{x_1} = h_\alpha$, $h_{x_2} = h_\beta$, $h_{x_3} = 1$, $g_{11} = g_{22} = g_{\alpha\alpha} = h_\alpha^2$, $g_{33} = 1$, $g = g_{\alpha\alpha} = h_\alpha^2$, тоді рівняння (2) матимуть вигляд (в безрозмірних величинах):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial (g_{\alpha\alpha} \bar{\sigma}_{\alpha\alpha})}{\partial \alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} \bar{\sigma}_{\beta\beta} + \frac{\partial (g_{\alpha\alpha} \bar{\sigma}_{\alpha\beta})}{\partial \beta} = \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial \tau^2}; \\ \frac{\partial (g_{\alpha\alpha} \bar{\sigma}_{\alpha\beta})}{\partial \alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} \bar{\sigma}_{\alpha\alpha} + \frac{\partial (g_{\alpha\alpha} \bar{\sigma}_{\beta\beta})}{\partial \beta} = \frac{\partial^2 U_\beta}{\partial \tau^2} \end{array} \right. \quad (3)$$

або після спрощення:

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{\alpha\alpha} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{\alpha\beta}}{\partial \beta} \right) + h_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} (2\bar{\sigma}_{\alpha\alpha} - \bar{\sigma}_{\beta\beta}) + 2h_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \bar{\sigma}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial \tau^2}; \\ g_{\alpha\alpha} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{\beta\beta}}{\partial \beta} \right) + h_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} (2\bar{\sigma}_{\beta\beta} - \bar{\sigma}_{\alpha\alpha}) + 2h_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} \bar{\sigma}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 U_\beta}{\partial \tau^2}. \end{array} \right. \quad (4)$$

Також в довільній ортогональній системі координат справедливі співвідношення Коші, які мають вигляд [4]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_i}{h_i} \right) + \frac{1}{2h_i^2} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial h_i^2}{\partial x_k} \frac{u_k}{h_k}, \quad i = 1, 2, 3, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2h_i h_j} \left(h_i^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u_i}{h_i} \right) + h_j^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_j}{h_j} \right) \right), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (5)$$

В біполярній системі координат вирази (5) набувають вигляд:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\alpha}{h_\alpha} \right) + \frac{1}{2g_{\alpha\alpha}} \left(\frac{\partial h_\alpha^2}{\partial \alpha} \frac{u_\alpha}{h_\alpha} + \frac{\partial h_\alpha^2}{\partial \beta} \frac{u_\beta}{h_\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\alpha}{h_\alpha} \right) + \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} u_\alpha + \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} u_\beta \right); \\ \varepsilon_{\beta\beta} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_\beta}{h_\alpha} \right) + \frac{1}{2g_{\alpha\alpha}} \left(\frac{\partial h_\alpha^2}{\partial \alpha} \frac{u_\alpha}{h_\alpha} + \frac{\partial h_\alpha^2}{\partial \beta} \frac{u_\beta}{h_\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_\beta}{h_\alpha} \right) + \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} u_\alpha + \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} u_\beta \right); \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2g_{\alpha\alpha}} \left(g_{\alpha\alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_\alpha}{h_\alpha} \right) + g_{\alpha\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\beta}{h_\alpha} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_\alpha}{h_\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_\beta}{h_\alpha} \right) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Отримаємо вирази для напружень через переміщення у біполярній системі координат. Для цього використаємо закон Гука [4]:

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \lambda \vartheta + 2\mu \varepsilon_{\alpha\alpha}; \quad \sigma_{\beta\beta} = \lambda \vartheta + 2\mu \varepsilon_{\beta\beta}; \quad \sigma_{\alpha\beta} = 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad (7)$$

де $\lambda = 2G\nu/(1-2\nu)$, $\mu = G$ – параметри Ламе, ν – коефіцієнт Пуасона, $\vartheta = \varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\beta\beta}$. Тепер підставляємо вирази (6) у співвідношення (7), будемо мати для безрозмірних величин:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\alpha\alpha} &= \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{U_\alpha}{h_\alpha} \right) + \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial\beta} \left(\frac{U_\beta}{h_\alpha} \right) + \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \frac{2}{1-2\nu} \left(U_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial\alpha} + U_\beta \frac{\partial h_\alpha}{\partial\beta} \right); \\ \bar{\sigma}_{\beta\beta} &= \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial\beta} \left(\frac{U_\beta}{h_\alpha} \right) + \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{U_\alpha}{h_\alpha} \right) + \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \frac{2}{1-2\nu} \left(U_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial\alpha} + U_\beta \frac{\partial h_\alpha}{\partial\beta} \right); \quad (8) \\ \bar{\sigma}_{\alpha\beta} &= \frac{\partial}{\partial\beta} \left(\frac{U_\alpha}{h_\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{U_\beta}{h_\alpha} \right). \end{aligned}$$

Після спрощення вирази (8) матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{h_\alpha} \left(\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial U_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial U_\beta}{\partial\beta} \right) + \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \left(U_\alpha \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial h_\alpha}{\partial\alpha} + U_\beta \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial h_\alpha}{\partial\beta} \right); \\ \bar{\sigma}_{\beta\beta} &= \frac{1}{h_\alpha} \left(\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial U_\beta}{\partial\beta} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial U_\alpha}{\partial\alpha} \right) + \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \left(U_\alpha \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial h_\alpha}{\partial\alpha} + U_\beta \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial h_\alpha}{\partial\beta} \right); \quad (9) \\ \bar{\sigma}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{h_\alpha} \left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial\beta} + \frac{\partial U_\beta}{\partial\alpha} \right) - \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \left(U_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial\beta} + U_\beta \frac{\partial h_\alpha}{\partial\alpha} \right); \end{aligned}$$

Тепер отримуємо рівняння руху півпростору у переміщеннях в біоплярній системі координат. Для цього у виразах (9) замість ν підставимо ν_2 , а потім результат підставляємо у (4). Після спрощення будемо мати рівняння:

$$\left\{ \begin{aligned} & h_\alpha \left(\frac{2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial\beta^2} + \frac{1}{1-2\nu_2} \frac{\partial^2 U_\beta}{\partial\alpha\partial\beta} \right) + \frac{2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial\alpha} \frac{\partial U_\alpha}{\partial\alpha} + \\ & + \frac{3-4\nu_2}{1-2\nu_2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial\beta} \frac{\partial U_\beta}{\partial\alpha} - 3 \frac{\partial h_\alpha}{\partial\alpha} \frac{\partial U_\beta}{\partial\beta} + \left(\frac{2\nu_2}{1-2\nu_2} \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial\beta^2} - \frac{1}{h_\alpha} \frac{2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \right. \\ & \left. \cdot \left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial\alpha} \right)^2 \right) U_\alpha + \left(\frac{1}{1-2\nu_2} \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{1}{h_\alpha} \frac{2\nu_2}{1-2\nu_2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial\alpha} \frac{\partial h_\alpha}{\partial\beta} \right) U_\beta = \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial\tau^2}; \quad (10) \\ & h_\alpha \left(\frac{\partial^2 U_\beta}{\partial\alpha^2} + \frac{2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \frac{\partial^2 U_\beta}{\partial\beta^2} + \frac{1}{1-2\nu_2} \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial\alpha\partial\beta} \right) - 3 \frac{\partial h_\alpha}{\partial\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{3-4\nu_2}{1-2\nu_2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial\alpha} \frac{\partial U_\alpha}{\partial\beta} + \\ & + \frac{2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial\beta} \frac{\partial U_\beta}{\partial\beta} + \left(\frac{1}{1-2\nu_2} \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{1}{h_\alpha} \frac{2\nu_2}{1-2\nu_2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial\alpha} \frac{\partial h_\alpha}{\partial\beta} \right) U_\alpha + \\ & + \left(\frac{2\nu_2}{1-2\nu_2} \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial\beta^2} - \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial\alpha^2} - \frac{1}{h_\alpha} \frac{2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2} \left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial\beta} \right)^2 \right) U_\beta = \frac{\partial^2 U_\beta}{\partial\tau^2}. \end{aligned} \right.$$

Рух оболонки будемо описувати наближеними рівняннями теорії оболонок, що задовольняють гіпотезі Кірхгофа – Лява і в ортогональній системі координат мають вигляд [10]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{g_1 g_2} \left(\frac{\partial(N_1 g_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(N_{12} g_1)}{\partial x_2} + N_{23} \frac{\partial g_1}{\partial x_2} - N_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right) - \frac{Q_1}{R_1} = \rho_1 h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{h} (q_1 - f_1); \\ \frac{1}{g_1 g_2} \left(\frac{\partial(N_{12} g_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(N_2 g_1)}{\partial x_2} + N_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} - N_{12} \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right) - \frac{Q_2}{R_2} = \rho_1 h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{h} (q_2 - f_2); \\ \frac{1}{g_1 g_2} \left(\frac{\partial(Q_1 g_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(Q_2 g_1)}{\partial x_2} + \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} \right) = \rho_1 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1}{h} (q_3 - f_3); \\ \frac{1}{g_1 g_2} \left(\frac{\partial(M_1 g_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(M_2 g_1)}{\partial x_2} + M_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + M_{12} \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right) + Q_2 = 0; \\ \frac{1}{g_1 g_2} \left(\frac{\partial(M_1 g_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(M_{12} g_1)}{\partial x_2} - M_{12} \frac{\partial g_1}{\partial x_2} - M_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right) - Q_1 = 0; \end{array} \right. \quad (11)$$

де u, v, w – компоненти переміщень середньої поверхні оболонки у напрямках осей Ox_1, Ox_2, Ox_3 відповідно; (f_1, f_2, f_3) – відповідні компоненти навантаження; (q_1, q_2, q_3) – відповідні реакції з боку середовища; R_1, R_2 – радіуси кривизни ліній $x_1 = const, x_2 = const$ відповідно; ρ_1, h, G_1, ν_1 – густина, товщина, модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона оболонки; g_1, g_2 – відповідні компоненти першої квадратичної форми середньої поверхні оболонки.

Інші величини системи (11), враховуючи технічну моментну теорію оболонок, мають вигляд:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{g_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\nu}{g_1 g_2} \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \frac{w}{R_1}; \quad \eta_2 = \frac{1}{g_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{u}{g_1 g_2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} + \frac{w}{R_2}; \\ \xi &= \frac{g_2}{g_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\nu}{g_2} \right) + \frac{g_1}{g_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{u}{g_1} \right); \\ N_1 &= \frac{2hG_1}{1-\nu_1} (\eta_1 + \nu_1 \eta_2); \quad N_2 = \frac{2hG_1}{1-\nu_1} (\eta_2 + \nu_1 \eta_1); \\ N_{12} &= hG_1 \xi; \quad M_1 = M_2 = M_{12} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Як видно з рис. 1, при введенні біполярних координат виразами (1), середня поверхня оболонки буде задаватись рівняннями $\alpha = \bar{\alpha}_0$, тому в виразах (11), (12) потрібно прийняти, що $Ox_1 = Oz, Ox_2 = O\beta, Ox_3 = O\alpha$. Тоді $g_1 = 1, g_2 = h_\alpha, 1/R_1 = 0, 1/R_2 = 1$. Також, відповідно до припущення, що навантаження рівномірно діє вздовж осьової координати, потрібно зазначити, що $u = 0, q_1 = 0, f_1 = 0$ та похідні від всіх величин за змінною z дорівнюють нулю. Тоді вирази (12) приймуть вигляд:

$$\eta_1 = 0; \eta_2 = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{r}; \xi = 0; N_1 = \frac{2hG_1 v_1}{1-v_1} \left(\frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right);$$

$$N_2 = \frac{2hG_1}{1-v_1} \left(\frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right); N_{12} = 0; M_1 = M_2 = M_{12} = 0. \quad (13)$$

З урахуванням (13) перше рівняння системи (11) перетвориться у тотожність $0 = 0$, а четверте та п'яте у вирази:

$$Q_1 = 0; Q_2 = 0. \quad (14)$$

Враховуючи (13) та (14), система (11) в біполярній системі координат (в безрозмірних величинах) матиме вигляд:

$$\begin{cases} \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial V}{\partial \beta} + \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} + \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial W}{\partial \beta} = \\ = \frac{\rho}{\gamma} \frac{1-v_1}{2} \frac{\partial^2 V^k}{\partial \tau^2} - \frac{1-v_1}{2\gamma\kappa} (-f_\beta + q_\beta); \\ \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \frac{\partial V}{\partial \beta} + \frac{W}{h_\alpha} = -\frac{\rho}{\gamma} \frac{1-v_1}{2} \frac{d^2 W}{d\tau^2} - \frac{1-v_1}{2\gamma\kappa} (-f_\alpha + q_\alpha), \end{cases} \quad (15)$$

де V, W – безрозмірні переміщення оболонки у напрямку осей $O\beta$ та $O\alpha$; v_1 – коефіцієнт Пуассона оболонки. Зауважимо, що в системі (15) величини h_α та $g_{\alpha\alpha}$ беруться при $\alpha = \bar{\alpha}_0$.

У випадку, коли контакту між оболонкою та півпростором ковзний, граничні умови для оболонки матимуть вигляд:

$$U_\alpha(\bar{\alpha}_0, \beta, \tau) = W(\beta, \tau); \bar{\sigma}_{\alpha\alpha}(\bar{\alpha}_0, \beta, \tau) = -\bar{q}_\alpha(\beta, \tau);$$

$$\bar{\sigma}_{\alpha\beta}(\bar{\alpha}_0, \beta, \tau) = \bar{q}_\beta(\beta, \tau) = f_\alpha(\beta, \tau) = f_\beta(\beta, \tau) = 0.$$

Граничні умови на поверхні півпростору мають вигляд:

$$\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}(0, \beta, \tau) = F(\beta)H(\tau); \bar{\sigma}_{\alpha\beta}(0, \beta, \tau) = 0. \quad (16)$$

Розріз, який було зроблено вздовж осі y_* , враховується наступними умовами:

$$U_\beta(\alpha, 0, \tau) = U_\beta(\alpha, \beta_0, \tau) = \bar{\sigma}_{\alpha\beta}(\alpha, 0, \tau) = \bar{\sigma}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta_0, \tau) = 0.$$

Також припускаємо, що всі невідомі величини на нескінченності дорівнюють нулю, тому в точці $(0, \pi)$ всі величини дорівнюють нулю. Початкові умови приймаємо нульовими, тобто всі шукані величини та їх перші похідні при $\tau = 0$ дорівнюють нулю.

Розв'язок задачі методом скінченних різниць. Оскільки рівняння (9), (10), (15) мають достатньо складні коефіцієнти, які залежать від просторових змінних, для розв'язування задачі застосуємо метод скінченних різниць за просторовими змінними. Для цього розіб'ємо область $0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}_0, 0 \leq \beta \leq \beta_0$ (рис. 1) на сітку за змінною α на N_α частин, а за змінною β на N_β частин, відповідно. Нехай $h_1 = \bar{\alpha}_0 / N_\alpha$ – довжина відрізка розбиття за змінною α , а $h_2 = \pi / N_\beta$ – за змінною β . Отже ми отримали сітку з точок (α_i, β_j) , де $\alpha_i = ih_1 / N_\alpha (i = \overline{0, N_\alpha})$, $\beta_j = jh_2 / N_\beta (j = \overline{0, N_\beta})$. Далі апроксимуємо похідні скінченними різницями другого порядку точності.

Далі у внутрішніх точках області $(\alpha_i, \beta_j) (i = \overline{1, N_\alpha - 1}, j = \overline{1, N_\beta - 1})$ записуємо різниці рівняння для системи (10). У відповідності до граничних умов:

$$U_{\beta_i, 0} = U_{\beta_i, N_\beta} = 0 (i = \overline{0, N_\alpha}); U_{\alpha_0, N_\beta} = 0; V_0 = V_{N_\beta} = 0.$$

На границях $\alpha = 0, \beta = 0, \beta = \pi$ записуємо різниці рівняння для (9), враховуючи значення величин, які входять до відповідних граничних умов.

На границі $\alpha = \bar{\alpha}_0$ записуємо різниці рівняння для системи (15) з урахуванням відповідних граничних умов.

В результаті отримуємо систему з $N_\beta(2N_\alpha + 3) - 2$ лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) відносно змінних $U_{\beta_i, j} (i = \overline{0, N_\alpha}, j = \overline{1, N_\beta - 1})$, $U_{\alpha_i, j} (i = \overline{0, N_\alpha}, j = \overline{0, N_\beta})$, $V_j (j = \overline{1, N_\beta - 1})$.

Після розв'язування, описаної вище СЛАР, отримуємо розв'язок задачі в біполярній системі координат. Опишемо процес отримання відповідних величин у декартовій системі координат.

Поле переміщень (як і будь-яке векторне поле) в декартовій системі координат $\{U_x, U_y\}$ виражається через відповідні компоненти поля переміщень в ортогональній системі координат $\{U_{x_1}, U_{x_2}\}$ за наступними співвідношеннями [2]:

$$U_x = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{h_{x_i}} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} U_{x_i}; U_y = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{h_{x_i}} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} U_{x_i}; \quad (17)$$

де $x = \psi_1(\alpha, \beta)$, $y = \psi_2(\alpha, \beta)$ – формули зв'язку між декартовою та довільною ортогональною системами координат.

Для випадку біполярної системи, координати якої задаються співвідношеннями (1), формула (17) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} U_x &= \frac{-U_\alpha \operatorname{sh} \alpha \sin \beta + U_\beta (1 + \operatorname{ch} \alpha \cos \beta)}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}, \\ U_y &= \frac{-U_\alpha (1 + \operatorname{ch} \alpha \cos \beta) - U_\beta \operatorname{sh} \alpha \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}. \end{aligned} \quad (18)$$

Відповідні компоненти тензора напружень знаходяться по отриманим у формулах (18) переміщенням за виразами, аналогічними (9).

Розв'язок динамічної задачі. Після застосування скінченно-різницевої схеми за біполярними координатами до рівнянь (9), (10), (15), за методом, описаним вище, отримуємо динамічне матричне рівняння, яке можна записати у вигляді

$$[A]\{U\} + [B] \frac{\partial}{\partial \tau} \{U\} = \{F\}H(\tau), \quad (19)$$

де $\{U\}$ – вектор невідомих вузлових переміщень; $[A]$, $[B]$ – матриці коефіцієнтів скінченно-різницевої схеми та коефіцієнтів при других похідних за змінною безрозмірного часу, відповідно; $\{F\}$ – вектор вузлових навантажень; $H(\tau)$ – одинична сходящова функція Хевісайду.

Отримане динамічне матричне рівняння (19) розв'язується за допомогою θ -метода Вільсона, алгоритм якого наведено в [8]. Цей метод дозволяє звести динамічне рівняння (19) до ітераційної послідовності квазістатичних задач, які в свою чергу, є звичайними СЛАР і розв'язуються методом Гаусса.

Результати числового аналізу. Наведемо результати числового аналізу вищеописаного алгоритму. При розрахунках використовувались наступні значення безрозмірних величин: $\gamma = 30$; $\rho = 4$; $\kappa = 0,02$. Величини L, τ змінювались.

Розглянемо випадок, коли імпульсивне нормальне навантаження діє на ділянці поверхні півпростору, а поверхня оболонки вільна від напружень. Функція $F(\beta)$, яка входить в граничні умови (16), задається у вигляді

$$F(\beta) = -\frac{1}{g_{\alpha\alpha}(0, \beta)}.$$

Далі на всіх графіках крива 1 відповідає статичному розв'язку, крива 2 – безрозмірної змінної часу $\tau = 2$, крива 3 – $\tau = 4$, крива 4 – $\tau = 6$.

На рис. 2 зображено переміщення границі контакту оболонки та півпростору в різні моменти часу у порівнянні із статичним розв'язком, причому на рис. 2, а $L = 2$, на рис. 2, б – $L = 4$, на рис. 2, в – $L = 6$. Точковим пунктиром позначено положення границі контакту до застосування навантаження.

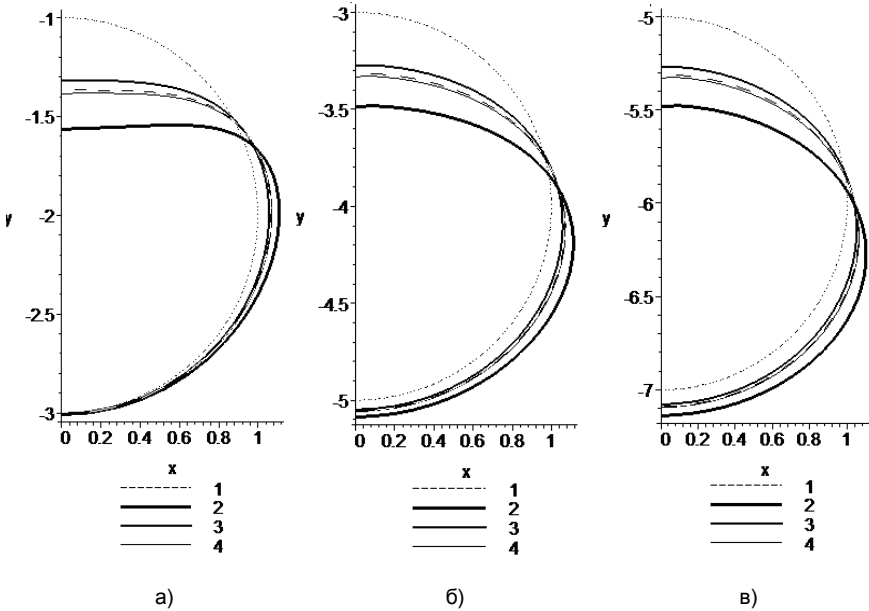


Рис. 2 – Переміщення границі контакту оболонки та півпростору при різних глибинах залягання оболонки

На рис. 3 наведено переміщення U_{y*} поверхні півпростору Oy_* , причому на рис. 3, а $L = 2$, на рис. 3, б – $L = 4$, на рис. 3, в – $L = 6$.

На рис. 4 та рис. 5 наведені напруження на границі контакту оболонки та півпростору у різні моменти часу та для різних глибин залягання оболонки. Причому на рис. 4 наведено криві для $\bar{\sigma}_{x_*x_*}$, на рис. 5 – $\bar{\sigma}_{y_*y_*}$.

На основі порівняння отриманих результатів з аналогічними результатами у [7] для випадку $L = 6$ можна зробити висновок, що максимальна величина відхилення для статичних результатів не перевищує 5 %, а для динамічних – 8 %.

На основі отриманих результатів, можна встановити, що для оболонок, які розташовані на відстані понад 5 їх діаметрів можна, без суттєвої втрати точності, розглядати задачу для середовища з однією порожниною, що підкріплена оболонкою.

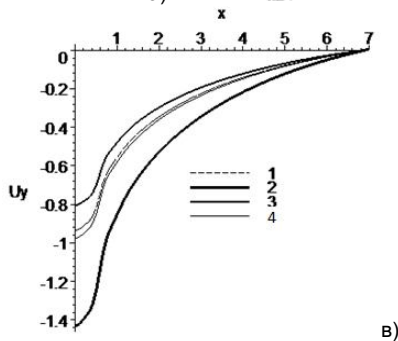
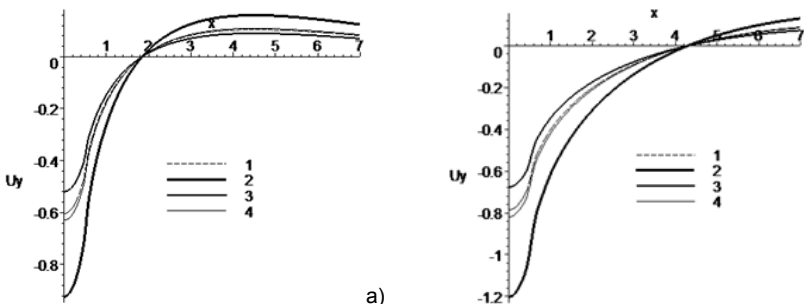


Рис. 3 – Переміщення поверхні півпростору, при різних глибинах залягання оболонки

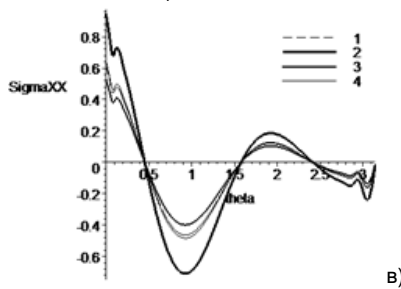
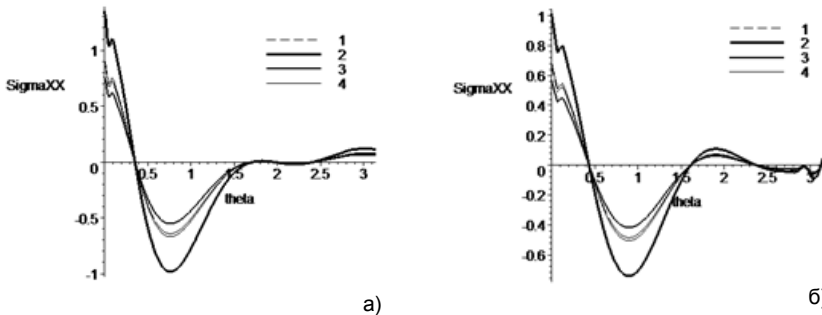


Рис. 4 – Напруження $\sigma_{x \times x}$ на границі контакту

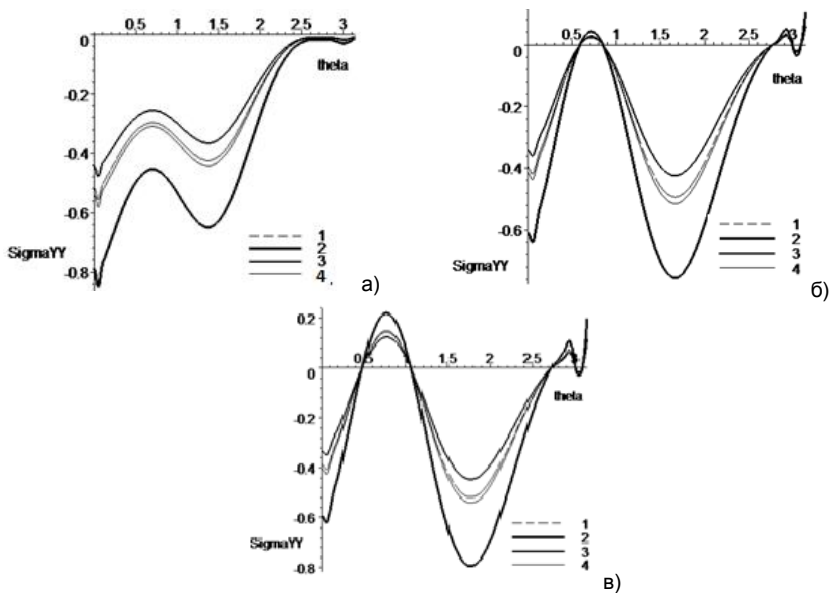


Рис. 5 – Напруження σ_{y_x, y_x} на границі контакту

Висновки. В роботі розв’язано динамічну задачу для тонкої пружної циліндричної оболонки у лінійно-пружному однорідному та ізотропному півпростоті. Розглянуто випадок, коли на поверхні півпростоту діє динамічне імпульсивне нормальне навантаження, яке залежить від часу як одинична функція Хевісайда.

Задача розв’язана за допомогою використання біполярної системи координат. Розроблено підхід до розв’язання динамічної задачі, який ґрунтується на методі скінченних різниць та θ -методі Вілсона.

Показано збіжність динамічних результатів до відповідного статичного розв’язку. Встановлено, що при глибині залягання оболонки понад 5 її діаметрів, взаємний оболонки та поверхні півпростоту на компоненти динамічного напружено-деформованого стану розглянутої системи є незначним.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Горшков А. Г., Пожувє В. И.** Пластины и оболочки на инерционном основании при действии подвижных нагрузок– М.: Изд-во МАИ, 1992. 136 с.
2. **Ерофеев В. Т.** Теоремы сложения. – Минск: Наука и техника, 1989. 256 с.
3. **Никитин И. С.** Задача о подвижной нагрузке на границе упругого полупространства с цилиндрической полостью // Механика твердого тела. 1984 № 3. С. 93–99.
4. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
5. **Пожувє А. В., Фасоляк А. В.** Нестационарна деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією навантажень, що розширюються // Вісн. Запорізького нац. ун-ту: Зб. наук. статей. Фізико-математичні науки. 2016. № 1. С. 200–213.
6. **Пожувє А. В., Фасоляк А. В.** Нестационарна невісесиметрична деформація циліндричної оболонки у пружному просторі під дією рухомих поверхневих навантажень // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. 2015. № 2. С. 108–114.

7. **Фасоляк А. В., Пожуев В. І., Пожуев А. В.** Динаміка пружного півпростору з циліндричною порожниною, підкріпленою оболонкою, при поверхневих навантаженнях // Пробл. обчислюв. механіки і міцності конструкцій. 2017. Вип. 26. С. 142–152.

8. **Пожуев В. І., Пожуев А. В., Фасоляк А. В.** Нестационарна деформація циліндричної оболонки у пружному півпросторі з вільною поверхнею. // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. 2016. № 1. С. 119–126.

9. **Уфлянд Я. С.** Биполярные координаты в теории упругости. Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1950. 232 с.

10. **Филиппов А. П.** Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 736 с.

УДК 539.312

*В. И. Пожуев¹ д-р физ.-мат. наук,
А. В. Пожуев² канд. физ.-мат. наук, А. В. Фасоляк¹*

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛОЧКИ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПРИ ПОМОЩИ БИПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Рассмотрена нестационарная динамическая задача для цилиндрической оболочки в линейно-упругом, однородном, изотропном и инерциальном полупространстве. Целью работы является исследование взаимного влияния оболочки и поверхности полупространства на динамическое напряженно-деформированное состояние рассматриваемой механической системы. Решение задачи получено при помощи применения биполярной системы координат. Проведено сравнение полученных результатов с аналогичными результатами, полученными в других работах.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, биполярная система координат, упругое полупространство, динамические нагрузки, поверхность полупространства.

UDC 539.312

*V. I. Pozhuev¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
A. V. Pozhuev², PhD (Phys.-Math.), A. V. Fasoliak¹*

MODELING OF CYLINDRICAL SHELL DYNAMICS IN ELASTIC HALF-SPACE USING THE BIPOLAR COORDINATE SYSTEM

In present work the non-stationary dynamic problem for cylindrical shell in linearly elastic, homogeneous and inertial half-space is considered. Purpose of present work is analyzing mutual influence of the shell and surface of the half-space on dynamic stress-strain state of this mechanic system. Solution of the problem is obtained using the bipolar coordinate system. Presented results have compared with analogical results, which have obtained in other works.

Keywords: cylindrical shell, bipolar coordinate system, elastic half-space, dynamic loads, half-space surface.

In present paper considers the non-stationary dynamic problem for cylindrical shell in linear elastic, homogeneous and inertial half-space. It is assumed that depth of shell location is less then five of its radii. It is also assumed that the impulsive dynamic normal loads are applied to surface of the

half-space. The influence of shell location depth on dynamic stress-strain state of this mechanic system is analyzed.

Let shell and half-space be assigned to a fixed Cartesian system of coordinates $\{x, y, z\}$. The inner surface of the shell is given by equation $x^2 + (y + l)^2 = b^2$ and the surface of the contact between the half-space and the shell is described by $x^2 + (y + l)^2 = r^2$ ($h = r - b$ is shell thickness). The shell axis and axis z are parallel. The contact between the shell and the medium is assumed to be sliding. The plane, which is a boundary of the half-space, is described by equation $y = 0$.

In present paper, it is assumed that loads are evenly distributed on the axial coordinate, i.e. they do not depend on z , so the considered problem is reduced to plane elasticity theory problem. It is also accepted, that loads are applied symmetrically to y -axis, so we can cut the area along this axis. This incision will be taken into account in boundary conditions.

The bipolar coordinate system (BCS) is used to solve this problem and display the unlimited area, being considered, in the finite rectangle.

As the BCS is an orthogonally coordinate system [6], the motion equation of elasticity theory, Cauchy equations and Hooke law are in force [7].

We substitute deformations expressions by displacements (Cauchy equations) for the deformations in Hooke law and obtain the expressions for stresses by displacements in the BCS. Then we substitute these expressions in the motion equation of elastic theory, and we obtain motion equation of elastic theory by displacements.

The shell motions are described by classic thin shell theory equations, which satisfy Kirchhoff-Love theory and in the BCS are the following [8]:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial V}{\partial \beta} + \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} + \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial W}{\partial \beta} &= \frac{\rho}{\gamma} \frac{1 - \nu_1}{2} \frac{\partial^2 V^k}{\partial \tau^2} - \frac{1 - \nu_1}{2\gamma\kappa} (-f_\beta + q_\beta), \\ \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \frac{\partial V}{\partial \beta} + \frac{W}{h_\alpha} &= -\frac{\rho}{\gamma} \frac{1 - \nu_1}{2} \frac{d^2 W}{d\tau^2} - \frac{1 - \nu_1}{2\gamma\kappa} (-f_\alpha + q_\alpha); \end{aligned} \right. \quad (1)$$

For dynamic equations solution, we have developed the approach, founded on the combination of finite differences method and iterative method for the variable of time. Using this approach we obtain the problem solution in the BCS. The solution for the problem in Cartesian coordinate system has been obtained by method, which is described below.

The displacement field in Cartesian coordinate system $\{U_x, U_y\}$ depends on corresponding components of the displacement field in the BCS $\{U_\alpha, U_\beta\}$ in the following way [9]:

$$U_x = \frac{-U_\alpha s h \alpha \sin \beta + U_\beta (1 + c h \alpha \cos \beta)}{c h \alpha + \cos \beta}; \quad U_y = \frac{-U_\alpha (1 + c h \alpha \cos \beta) - U_\beta s h \alpha \sin \beta}{c h \alpha + \cos \beta}. \quad (2)$$

Based on results comparison, which have obtained in present paper, with analogical results (which have been obtained using finite elements method) in [7] for case $L = 6$ it was found out that the value of deviation is less then 5 % for static solution and is less than 8 % for dynamic solution.

Conclusions. The problem has been solved using the BCS. The algorithm of solving dynamic problem, based on finite differences method and Wilson θ -method has been developed. The convergence of dynamic results to corresponding static solution on the large time scales has been shown. It was established that in cases, when the shell is located on the depth of cavity disposition of more than ten times its radii, the influence of the medium surface on the stress-strain state of considered mechanical system, is insignificant.

REFERENCES

1. **Gorshkov A. G., Pozhuev V. I.** Plates and shells on the intentional foundations under action of moving loads. Moscow : Publishing House of MIA, 1992. 136 p. (in Russian).
2. **Erofeenko V. T.** Additions theorems. Minsk: Science and techniques, 1989. 256 p. (in Russian).
3. **Nikitin I. S.** Problem of the moving load on boundary of elastic half-space with cylindrical cavity. // Solid mechanics. 1984. No 3. P. 93–99. (in Russian).
4. **Novatskiy V.** Elastic theory. Moscow.: Mir, 1975. 872 p. (in Russian).
5. **Pozhuev A. V., Fasoliak A. V.** Non-stationary deformation of cylindrical shell in elastic media under the action of extending surface loads, // Visnyk of Zaporizhzhzha national university: Collection of scientific articles. Physical and mathematical sciences. 2016. No1. P. 200–213. (in Ukrainian).
6. **Pozhuev A. V., Fasoliak A. V.** Non-stationary non axy-symmetrical deformation of cylindrical shell in the elastic media under the action of moving surface loads // Innovative materials and technologies in metallurgy and mechanical engineering. 2015. No 2. P. 108–114. (in Ukrainian).
7. **Pozhuev V. I., Pozhuev A. V., Fasoliak A. V.** Dynamics of elastic half-space with cylindrical cavity, with reinforced by shell, under surface loads. // Problems of computational mechanics and straight of structures. 2017. Vol. 26. P. 142–152. (in Ukrainian).
8. **Pozhuev V. I., Pozhuev A. V., Fasoliak A. V.** Non-stationary deformation of cylindrical shell in elastic half-space with free surface. // Innovative materials and technologies in metallurgy and mechanical engineering. 2016. No 1. P. 119–126. (in Ukrainian).
9. **Ufliand J. S.** Bipolar coordinates in elastic theory. Leningrad: State publishing house of technique and theoretical literature, 1950. 232 p. (in Russian).
10. **Filippov A. P.** Oscillations of deformable systems. Moscow: Mashinostroenie, 1970. 736 p. (in Russian).

¹Запорізький національний технічний університет,

²Запорізька державна інженерна академія,
Запоріжжя, Україна

Надійшла до редколегії 02.07.2018