

УДК 539.3

В. М. Ахундов, д-р физ.-мат. наук, И. Ю. Наумова канд. физ.-мат. наук

ПРИПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ В ЦИЛИНДРЕ С КОЛЬЦЕВЫМИ ВОЛОКНАМИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВРАЩЕНИЯ ПРИ ЖЕСТКОЙ ПОСАДКЕ

Исследованы проявления приповерхностного эффекта в кусочно-однородном цилиндре при больших упругих деформациях под воздействием свободного вращения. Определена глубина приповерхностного эффекта возле внутренней и внешней поверхностей цилиндра. Глубина эффекта измерялась количеством кольцевых элементов цилиндра возле этих поверхностей, деформируемых существенно непериодически. Непериодическое деформирование кольцевых элементов оценивалось исходя из различия значений компонентов деформации в ограничивающих поверхностях элемента.

Ключевые слова: кусочно-однородный цилиндр, кольцевые волокна квадратного сечения, свободное вращение, приповерхностный эффект, большие деформации.

Введение. Деформация круглых цилиндров из однородных материалов под воздействием вращения вокруг оси симметрии подробно изучена в линейной механике деформирования. Библиография данных исследований достаточно полно представлена в [16]. В [8] рассмотрены инерционные накопители энергии (маховики) из жестких композитных материалов с цилиндрической ортотропией упругих свойств. В [18] с помощью уравнений линейной теории упругости решена задача о напряжениях во вращающейся цилиндрической ортотропной трубе. Приведены результаты при свободной и жесткой посадках трубы для случаев осевого и окружного армирования. В [17] рассмотрено перераспределение напряжений в диске с эластомерной матрицей в условиях релаксации напряжений при ползучести материала. Решение задачи производится при геометрически и физически линейной постановке. Состояние вращающихся дисков по модели упруго-пластического материала описано в [7]. Расчет вращающегося диска по полученным экспериментальным диаграммам растяжения материала без их упрощающей схематизации с помощью метода переменных параметров упругости приведен в [12].

Исследование больших деформаций цилиндров под воздействием центробежных сил вращательного движения представлено в [1–4]. Описания другими авторами больших деформаций цилиндров под воздействием центробежных сил в литературе и других источниках не выявлено. В [1] и [2] решены задачи для цилиндров, слабо армиро-

ванных волокнами, в плоской и осесимметричной постановках соответственно. Исследование произведено по одноуровневой прикладной теории [5], основанной на модели материала, по которой макроскопические напряжения определяются вкладом напряжений матрицы и усилий осевого растяжения или стесненного сжатия волокон. В [3] решены задачи о кручении цилиндров с двух- и трехортогональной схемами армирования. Задачи решались с использованием одноуровневой прикладной теории и двухуровневой каркасной, включающей макро- и микромеханический уровни анализа [6]. В [4] по модели кусочно-однородной среды определялись перемещения, деформации и напряжения в свободно вращающемся эластичном цилиндре с дwoякопериодическим расположением в его матрице кольцевых волокон квадратного сечения.

Исследование приповерхностных эффектов в армированных волокнами цилиндрах под воздействием вращения, а при больших деформациях и в иных телах, также авторами не найдено в литературе. Отметим [9], где рассматривается убывание краевого эффекта в материале, однонаправленно армированном волокнами квадратного сечения, при поперечном нагружении волокон из приповерхностного ряда. В [14] исследованы краевые эффекты в однонаправленных композитах, связанные с перераспределением внешней нагрузки между волокнами и матрицей при продольном растяжении волокон.

Настоящая статья посвящена изучению приповерхностного эффекта, возникающего в кусочно-однородных цилиндрах из эластичных материалов при их свободном вращении. Был применён критерий неперриодического деформирования кольцевых элементов цилиндра. С его помощью оценивалась глубина приповерхностного эффекта возле его внутренней и внешней поверхностей в условиях больших деформаций матрицы и волокон.

Постановка задачи. Исследовалась деформация эластичного цилиндра из матрицы и кольцевых волокон под воздействием сил инерции вращения вокруг его оси симметрии при жесткой посадке по внутренней поверхности в условиях плоского деформирования. Волокна квадратного сечения располагаются в матрице цилиндра по схеме квадратной упаковки. Цилиндр формально рассматривали как сборку кольцевых элементов. Кольцевые элементы представляют собой кольца квадратного сечения из матричного материала, включающие кольцевые волокна квадратного сечения как их армирующую сердцевину.

На рис. 1 показано осевое сечение недеформированного цилиндра с внутренним радиусом $r = a$ и внешним $r = b$. Цилиндр включает цилиндрические слои толщиной h , армированные кольцевыми волокнами квадратного сечения с длиной сторон δ . Изучали осесимметричную деформацию цилиндра при макроскопически плоском деформировании, когда длина цилиндра оставалась неизменяемой. В силу условий симметрии задачу решали для правой половины дискового слоя толщиной $h/2$. Такой половинный слой заключен между поперечными се-

чениями цилиндра, одно из которых проходит через осевые линии волокон, а другое – через матрицу посередине между волокнами.

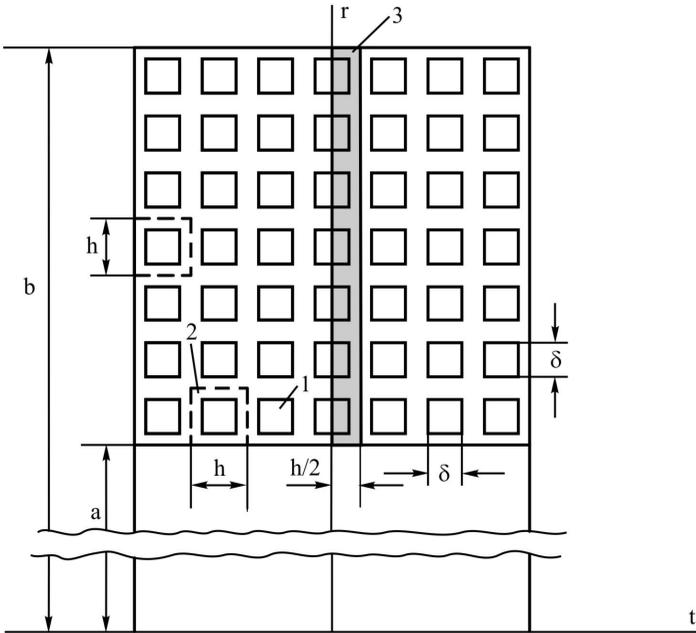


Рис. 1 – Осевое сечение цилиндра в исходном состоянии:
 1 – волокно квадратного сечения, 2 – кольцевой элемент,
 3 – половина дискового слоя справа от центрального сечения

Использовали систему материальных цилиндрических координат $\hat{\theta}^1, \hat{\theta}^2, \hat{\theta}^3$, из которых $\hat{\theta}^1$ – осевая, $\hat{\theta}^2$ – окружная, $\hat{\theta}^3$ – радиальная координаты. В отсчетной конфигурации цилиндра данные координаты обозначены как t, φ, r соответственно. Осевую координату t отсчитывали от центрального сечения, проходящего через осевые линии волокон в дисковом слое. Наряду с радиальной координатой r использована радиальную координату $z = r - a$, отсчитываемую от внутренней поверхности цилиндра. Величины, относящиеся к матрице и волокнам, отмечали индексом n при значении $n = 0$, отвечающем матрице, и значениях $n = 1, \dots, n_{\max}$, отвечающих волокнам в их нумерации по направлению от внутренней к внешней поверхности. В некоторых случаях для большей наглядности величины описания матрицы отмечены отдельно индексом m . При ясной принадлежности индексы компонентов обычно опускаем.

Применяли геометрические и физические уравнения и уравнения равновесия в нелинейной теории упругости [10] для описания деформации рассматриваемого кусочно-однородного цилиндра. Особенно-

стью решаемой задачи является влияние на центробежные силы, воздействующие на матрицу и волокна, изменений расстояний от их материальных точек до оси вращения цилиндра. В используемых уравнениях задавали радиальную плотность массовых сил, воздействующих на компоненты цилиндра при его вращении, в виде

$$F_{n(3)} = (r + u_{n(3)})\omega^2, \quad n = 0, 1, \dots, n_{\max},$$

где $u_{n(3)}$ – радиальное перемещение в n -ом компоненте; $\omega = 2\pi \cdot f$ – угловая скорость вращения; f – число оборотов вращения в секунду.

Граничные условия для каждого из компонентов цилиндра, при которых решали краевую задачу, выражают отсутствие осевых перемещений в поверхностях $t = 0$ и $t = h/2$ и поперечных сдвигов из этих поверхностей:

$$\begin{aligned} u_{n(1)}|_{t=0} = 0, \quad q_{n(13)}|_{t=0} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, n_{\max}; \\ u_{n(1)}|_{t=h/2} = 0, \quad q_{n(13)}|_{t=h/2} = 0, \quad n = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Для внутренней граничной поверхности цилиндра, ограничивающей нижний покровный слой связующего и жестко связанной с поверхностью недеформируемого вала, задавали равными в ней нулю компоненты вектора перемещений:

$$u_{m(1)}|_{r=a} = 0, \quad u_{m(3)}|_{r=a} = 0, \quad (2)$$

где относящиеся к матрице величины отметили индексом m (вместо $n = 0$).

При свободной от нагрузок внешней поверхности цилиндра, ограничивающей верхний покровный слой связующего, компоненты несимметричного тензора Пиола – Кирхгофа принимали в ней равными нулю:

$$t_{m(31)=0}|_{r=b} = 0, \quad t_{m(33)=0}|_{r=b} = 0. \quad (3)$$

Условия совместного деформирования задавали, исходя из равенств компонент векторов перемещений и напряжений для матрицы и волокон между собой в границах их раздела. Эти условия приводим, отметив величины, относящиеся к матрице, индексом m . В цилиндрических поверхностях раздела матрицы с n – волокном

$$\begin{aligned} u_{m(1)}(t, r) = u_{n(1)}(t, r), \quad u_{m(3)}(t, r) = u_{n(3)}(t, r), \\ t_{m(31)}(t, r) = t_{n(31)}(t, r), \quad t_{m(33)}(t, r) = t_{n(33)}(t, r), \\ 0 \leq t \leq \delta/2, \quad z = nh - (h + \delta)/2, \quad z = nh - (h - \delta)/2, \quad n = 1, 2, \dots, n_{\max}. \end{aligned} \quad (4)$$

В поперечной плоскости $t = \delta/2$ раздела n – волокна с матрицей

$$\begin{aligned} u_{m(1)}(t, r) = u_{n(1)}(t, r), \quad u_{m(3)}(t, r) = u_{n(3)}(t, r), \\ t_{m(11)}(t, r) = t_{n(11)}(t, r), \quad t_{m(13)}(t, r) = t_{n(13)}(t, r), \\ t = \delta/2, \quad nh - (h + \delta)/2 \leq z \leq nh - (h - \delta)/2, \quad n = 1, \dots, n_{\max}. \end{aligned} \quad (5)$$

Производные первого порядка от искомых величин по осевой и радиальной координатам t и r в уравнениях задачи аппроксимировали с помощью конечно-разностных соотношений второго порядка точности [15]. Вместе с привлечением граничных условий (1) – (3) и условий совместного деформирования матрицы и волокон (4), (5) формируется система нелинейных уравнений относительно основных искомых величин в узловых точках двумерной области $0 \leq t \leq h/2$, $a \leq r \leq b$. Данную систему уравнений решали на основе процедуры дискретного метода Ньютона [11]. Единственность решения краевой задачи обеспечивали на основе продолжения решения по угловой скорости вращения цилиндра.

Численные результаты. Результаты исследования представляем для цилиндра, включающего 100 цилиндрических слоев с кольцевыми волокнами в них. Цилиндр рассматриваем как совокупность дисковых слоев, в сборках каждого из которых по 100 кольцевых элементов. Внутренний радиус цилиндра $a = 100$ мм, внешний радиус $b = 200$ мм. Волокна в кольцевых элементах с длиной стороны квадратного сечения $\delta = 0,6h = 0,6$ мм, квадратная упаковка волокон с расстояниями между осевыми линиями смежных волокон $h = 1$ мм, коэффициент наполнения волокнами $k_f = \delta^2 / h^2 = 0,36$. Материалы матрицы и волокон задавали с помощью трехконстантного потенциала Левинсона – Буржеса и двухконстантного потенциала Блейтца соответственно [13]. Для матрицы принимали значения упругих параметров $E_m = 4$ МПа, $\nu_m = 0,46$, $\beta_m = 1$; для волокон – $E_f = 68$ МПа, $\nu_f = 0,4$. Плотность материалов матрицы и волокон принимали одинаковой $\rho = 1,1 \cdot 10^3$ кг/м³.

Результаты получили на основе сетки узловых точек конечно-разностной схемы, для которой на отрезках $0 \leq t \leq 0,3$ мм и $0,3$ мм $\leq t \leq 0,5$ мм по семь равноотстоящих узловых точек, две из которых на границах раздела совпадают между собой. На протяжениях по z в волокнах и между волокнами брали по тринадцать узловых точек при сдвоенных узлах на границе раздела компонентов.

На рис. 2 изображены конфигурации осевых сечений для четырех половин частичныхборок кольцевых элементов, расположенных в цилиндре справа от центрального сечения. Каждая из данныхборок включает два концентрически расположенных кольцевых элемента. Первая сборка выделена из недеформированного цилиндра, конфигурация ее осевого сечения не зависит от места сборки в цилиндре, приведена для сопоставления с ней деформированныхборок.

Остальные сборки выделены из деформированного цилиндра при $\omega = 2\pi \cdot 140$ с⁻¹. Вторая сборка включает 1-й и 2-й кольцевые элементы, примыкающие к внутренней поверхности цилиндра, ограничена поверхностями $z = 0$ и $z = 2h$.

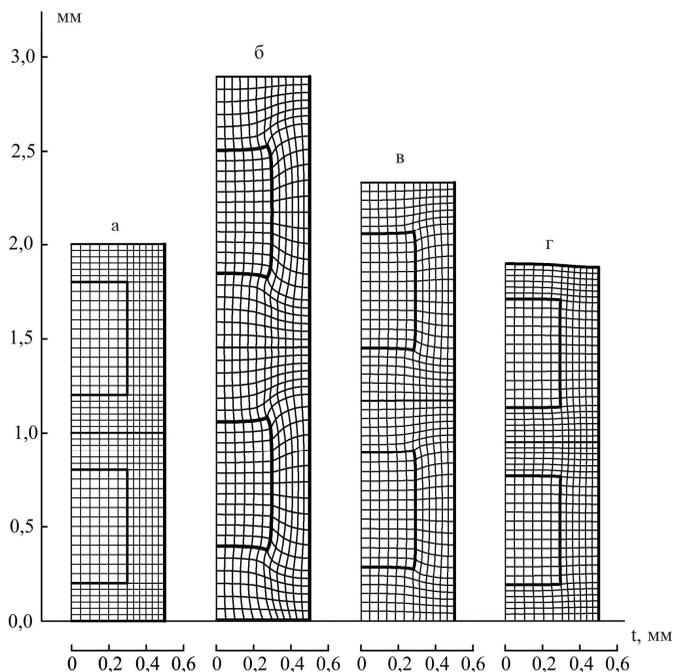


Рис. 2 – Конфигурации осевых сечений сборки кольцевых элементов цилиндра:
а) сборка из двух элементов в отсутствии вращения цилиндра;
б), в) и г) – сборки при вращении $\omega = 2\pi \cdot 140\text{с}^{-1}$, включающие
1-й и 2-й, 50-й и 51-й, 99-й и 100-й элементы соответственно

Третья сборка образована из 50-го и 51-го элементов, расположена между поверхностями $z = 49h$ и $z = 51h$. Четвертая сборка из примыкающих к внешней поверхности цилиндра 99-го и 100-го элементов между поверхностями $z = 98h$ и $z = 100h$.

Конфигурации осевых сечений кольцевых элементов в сборках представлены сетками координатных линий $t = t_i$, $z = z_i$, проходящих через узловые точки (t_i, z_i) конечно-разностной схемы решения задачи. Они демонстрируют более интенсивное деформирование кольцевых элементов, расположенных ближе к внутренней поверхности цилиндра по сравнению с более удаленными от нее элементами.

Торцевые поверхности волокон во вращающемся цилиндре, за исключением расположенных возле внешней поверхности цилиндра, приобретают относительно центральной поверхности $t = 0$ выпуклый характер. Цилиндрические ограничивающие поверхности относительно срединных поверхностей волокон становятся вогнутыми. Поперечные сечения волокон возле внутренней поверхности цилиндра испытывают заметные увеличения своей высоты при практически неизменяемой ширине за исключением окрестностей возле угловых точек. Расстояния

между волокнами при этом примерно в два раза больше, чем в отсеченном состоянии. В центральной части сборки размеры поперечных сечений волокон по высоте незначительно больше, а по ширине незначительно меньше по сравнению с недеформированной конфигурацией, при значительном увеличении расстояний между волокнами. На периферии возле внешней поверхности размеры поперечных сечений волокон и расстояния между ними близки по сравнению с исходными.

В областях матричного слоя $0,3\text{мм} \leq t \leq 0,5\text{мм}$, примыкающих к волокнам (между противоположенными расположенными волокнами из смежных дисковыхборок), за исключением областей возле внешней поверхности, материал испытывает значительно большие растяжения по радиальным направлениям, чем в областях данного слоя между волокнами в сборке. Между волокнами возле поверхности $t = h/2$ связующий материал удлиняется в радиальном направлении за исключением периферии цилиндра, а на периферии – укорачивается вдоль него.

Деформированные конфигурации осевых сечений 1-го и 2-го кольцевых элементов значительно различаются между собой. Об этом можно судить по отличиям сетки линий конечно-разностной схемы в деформированной конфигурации возле внутренней поверхности $z = 0$ 1-го кольцевого элемента от сетки соответствующих линий возле границы $z = 1 \text{ мм}$ его разделения со 2-м элементом. Для 2-го, 3-го и последующих элементов, до 99-го включительно, различия в конфигурациях смежных элементов выражены незначительно. Тогда конфигурация 99-го элемента заметно отличается от конфигурации 100-го элемента. Приходим к заключению, что визуальное приповерхностное явление возле внутренней и внешней поверхностей цилиндра проникает на глубину не более одного периода армирования.

Представляем далее картины осевых, окружных и радиальных деформаций $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, задающих кратности удлинений $t(\hat{\theta}^1)$, $\varphi(\hat{\theta}^2)$ и $r(\hat{\theta}^3)$ – координатных линий соответственно, и угловой деформации ω_{13} , как угла между осевой t и радиальной r координатными линиями. Описание деформаций приводим для характерных кольцевых элементов из дисковой сборки цилиндра, по которым можно получить представление и о деформациях других ее элементов.

На рис. 3 показаны распределения параметров деформации во внутренней поверхности цилиндра $z = 0$, по которой производится его соединение с недеформируемым валом. В силу неизменяемости размеров в данной поверхности осевая и окружная деформации $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Радиальная деформация λ_3 слабо и немонотонно изменяется на интервале волоконно-матричного слоя сборки $0 \leq t \leq \delta/2$ и монотонно уменьшается в ее матричном слое $\delta/2 \leq t \leq h/2$. Данная деформация на интервале сборки $0 \leq t \leq h/2$ изменяется в диапазоне $1,83 \geq \lambda_3 \geq 1,63$. Угловая деформация ω_{13} монотонно возрастает под волокном от значения $\omega_{13} = \pi/2$ до $\omega_{13} = 1,94$ и монотонно уменьшается за волокном от указанного значения до $\omega_{13} = \pi/2$.

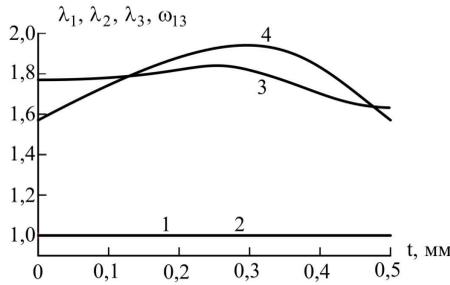


Рис. 3 – Распределения кратностей удлинений $\lambda_1(1)$, $\lambda_2(2)$, $\lambda_3(3)$ и координатного угла $\omega_{12}(4)$ для внутренней поверхности первого кольцевого элемента

На рис. 4 даны распределения деформаций в поверхности $z = h = 1$ мм в связующем материале, по которой формально разделяем 1 и 2-й кольцевые элементы.

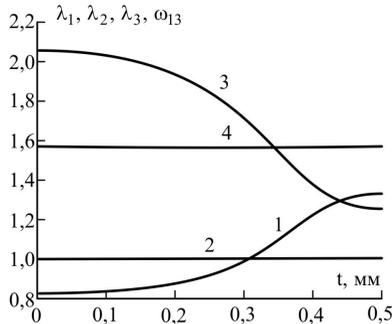


Рис. 4 – Распределения кратностей удлинений $\lambda_1(1)$, $\lambda_2(2)$, $\lambda_3(3)$ и координатного угла $\omega_{12}(4)$ для поверхности $z = h$ раздела первого и второго кольцевых элементов

Деформация λ_1 всюду монотонно возрастающая функция, а деформация λ_3 всюду монотонно убывающая на интервале дискового слоя $0 \leq t \leq h/2$. При этом вдоль осевого направления в промежутке между волокнами $0 \leq t \leq \delta/2$ связующее – укорачивается ($\lambda_1 < 1$), а в промежутке за волокнами $\delta/2 \leq t \leq h/2$ – удлиняется ($\lambda_1 > 1$). Радиальная деформация изменяется от значения $\lambda_3 = 2,06$ в центральном сечении $t = 0$ до значения $\lambda_3 = 1,25$ в краевом сечении $t = h/2$. Деформации λ_2 и ω_{13} на всем интервале дискового слоя мало отличаются от 1 и $\pi/2$: $\lambda_2 = 1,0045$, $1,5646 \leq \omega_{13} \leq \pi/2$.

Для оценки неперриодичности деформирования 1-го кольцевого элемента определяем различия в процентах между соответствующими узловыми значениями деформаций $\lambda_1, \dots, \lambda_3, \omega_{13}$ в граничных поверхностях $z = 0$ и $z = h$. Верхние грани этих значений обозначаем S_1, \dots, S_3, S_4 соответственно и рассматриваем как частные показатели неперриодического деформирования элемента. Наибольший из показателей $S_i, i = 1, \dots, 4$, считаем показателем S неперриодического деформирования кольцевого элемента в целом. Эти показатели неперриодического деформирования элемента, а также значения осевой координаты t , при которых они достигаются, приводим в табл. 1.

Таблица 1 – Показатели различия деформаций в ограничивающих поверхностях $z = 1$ мм и $z = 0$ мм 1-го кольцевого элемента

| Показатель | S_1 | $S_2, \%$ | $S_3, \%$ | $S_4, \%$ | $S, \%$ |
|------------------------|-------|-----------|-----------|-----------|---------|
| Значение показателя, % | 33,1 | 0,45 | 37,7 | 37,3 | 37,7 |
| t , мм | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,3 | 0,5 |

Частные показатели деформирования элемента достигают своих значений по месту перехода от волоконно-матричного к матричному слою $t = 0,3$ мм и на краю сборки $t = 0,5$ мм. Показатель неперриодического деформирования первого кольцевого элемента, как максимальный из частных показателей в таблице, $S = 37,7\%$, достигается по параметру λ_3 при $t = 0,5$ мм.

На рис. 5 представлены кривые для деформаций в поверхности $z = 2h$, разделяющей 2-й и 3-й кольцевые элементы.

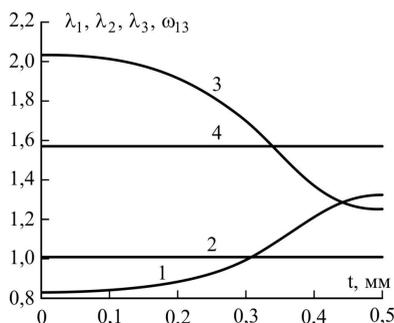


Рис. 5 – Распределения кратностей удлинений $\lambda_1(1)$, $\lambda_2(2)$, $\lambda_3(3)$ и координатного угла $\omega_{12}(4)$ для поверхности $z = 2h$ раздела второго и третьего кольцевых элементов

Параметры деформации λ_1 и λ_3 являются монотонно возрастающей и монотонно убывающей функциями координаты t на интервале $0 \leq t \leq 0,5$ мм соответственно. Эти величины изменяются в диапазонах $0,83 \leq \lambda_1 \leq 1,32$ и $2,03 \geq \lambda_3 \geq 1,25$. Графики величин λ_2 и ω_{13} с точностью до погрешности изображения представляют собой прямые линии, параллельные оси t с расположением на расстояниях l и $\pi/2$ от нее соответственно, – как свидетельства пренебрежимо малой окружной деформации $\lambda_2 - 1$ и сдвиговой $\pi/2 - \omega_{13}$.

Кривые распределения деформаций в поверхности $z = 2h$, разделяющей 2-й и 3-й элементы, слабо отличаются от соответствующих кривых для поверхности $z = h$ раздела 2-го элемента с 1-м. Показатели различия деформаций в ограничивающих поверхностях 2-го кольцевого элемента приведены в табл. 2.

Таблица 2 – Показатели различия деформаций в ограничивающих поверхностях $z = 2$ мм и $z = 1$ мм 2-го кольцевого элемента

| Показатель | S_1 | S_2 | S_3 | S_4 | S |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|------|
| Значение показателя, % | 0,70 | 0,43 | 2,32 | 0,56 | 2,32 |
| t , мм | 0,5 | всюду | 0 | 0,3 | 0 |

Максимальное различие $S = S_3 = 2,32\%$ между значениями параметров деформации в соответствующих узловых точках данных поверхностей достигается для радиальной деформации λ_3 в центральном сечении $t = 0$. Приходим к заключению, что итоговый показатель неперидического деформирования 2-го кольцевого элемента $S = 2,32\%$.

Картины деформации 51-го кольцевого элемента в его внутренней и внешней поверхностях $z = 50h = 50$ мм и $z = 51h = 51$ мм представлены на рис. 6 и рис.7.

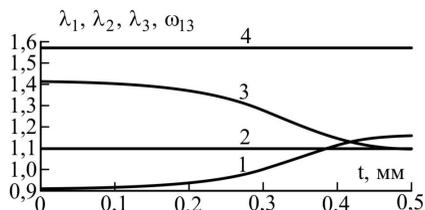


Рис. 6 – Распределения кратностей удлинений $\lambda_1(1)$, $\lambda_2(2)$, $\lambda_3(3)$ и координатного угла $\omega_{12}(4)$ для поверхности $z = 50h$ раздела 50-го и 51-го кольцевых элементов

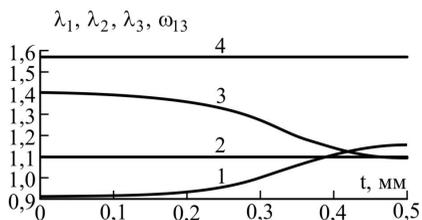


Рис. 7 – Распределения кратностей удлинений $\lambda_1(1)$, $\lambda_2(2)$, $\lambda_3(3)$ и координатного угла $\omega_{12}(4)$ для поверхности $z = 51h$ раздела 51-го и 52-го кольцевых элементов

Соответствующие кривые зависимостей на рисунках являются практически одинаковыми. Кратность удлинения λ_1 является монотонно возрастающей функцией, отражает осевое укорочение связующего в волоконно-матричном слое и осевое удлинение в матричном слое. В данных слоях для поверхности $z = 50$ мм $0,910 \leq \lambda_1 \leq 1,001$ и $1,001 \leq \lambda_1 \leq 1,159$ и поверхности $z = 51$ мм $0,911 \leq z \leq 1,001$ и $1,001 \leq z \leq 1,155$ соответственно.

Во внутренней и внешней поверхностях кольцевого элемента для окружной деформации $\lambda_2 \approx 1,0977$ и $\lambda_2 \approx 1,0981$ соответственно. Такие значения свидетельствуют о возрастании окружного удлинения в центральной части цилиндрического тела (сборки кольцевых элементов) с увеличением текущего радиуса r (координаты z).

В табл. 3 приведены показатели различия параметров деформации в ограничивающих поверхностях 51-го кольцевого элемента. Наибольшее различие $S = 1,00\%$ между значениями параметров деформации достигается для радиальной деформации λ_3 в центральном сечении $t = 0$. Из сопоставления деформаций в ограничивающих поверхностях, отражаемого таблицей 3, пришли к значению показателя неперического деформирования 51-го кольцевого элемента $S = 1,00\%$.

Таблица 3 – Показатели различия деформаций в ограничивающих поверхностях $z = 51$ мм и $z = 50$ мм 51-го кольцевого элемента

| Показатель | S_1 | S_2 | S_3 | S_4 | S |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|------|
| Значение показателя, % | 0,32 | 0,04 | 1,00 | 0,03 | 1,00 |
| t , мм | 0,5 | всюду | 0 | 1/3 | 0 |

В табл. 4 даны различия деформаций в ограничивающих поверхностях 99-го кольцевого элемента. Наибольший показатель различия деформаций в ограничивающих поверхностях элемента $S = 0,93\%$ достигается для λ_3 в центральном сечении $t = 0$. Столь малая величина показателя деформирования свидетельствует о квазипериодическом характере деформирования 98-го кольцевого элемента в сборке цилиндрического тела.

Таблица 4 – Показатели различия деформаций в ограничивающих поверхностях $z = 99$ мм и $z = 98$ мм 99-го кольцевого элемента

| Показатель | S_1 | S_2 | S_3 | S_4 | S |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|------|
| Значение показателя, % | 0,26 | 0,07 | 0,93 | 0,42 | 0,93 |
| t , мм | 0,5 | всюду | 0 | 1/3 | 0 |

На рис. 8 представлены распределения параметров деформации в поверхности $z = 99h = 99$ мм раздела 99-го кольцевого элемента с 100-м. Данная поверхность располагается в связующем материале и рассматривается как внутренняя ограничивающая поверхность 100-го элемента и как внешняя ограничивающая поверхность 99-го элемента. Кратности осевого λ_1 и радиального λ_3 удлинений не сильно отличаются от единицы. Функция λ_1 при этом монотонно убывающая в интервале значений $1,028 \geq \lambda_1 \geq 0,960$, а функция λ_3 – монотонно возрастающая $0,915 \leq \lambda_3 \leq 0,993$. Последнее отражает укорочение в радиальном направлении связующего материала на периферии сборки кольцевых элементов возле ее внешней ограничивающей поверхности. Окружная кратность удлинения всюду $\lambda_2 \cong 1,088$. Координатный угол ω_{13} весьма слабо отличается от $\pi/2$, незначительно убывая на промежутке волокна $\pi/2 \geq \omega_{13} \geq 1,566$ и также незначительно возрастающая на промежутке матричного слоя $1,566 \leq \omega_{13} \leq \pi/2$. Наибольшее значение угла сдвига $\pi/2 - \omega_{13} = 0,005(0,286^\circ)$ наблюдается по месту $t = 0,3$ мм раздела волокнисто-матричного и матричного слоев.

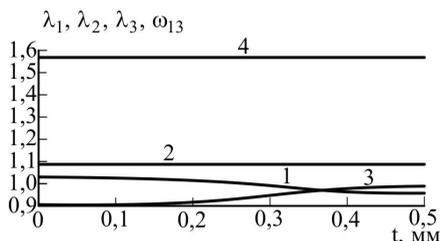


Рис. 8 – Распределения кратностей удлинений $\lambda_1(1)$, $\lambda_2(2)$, $\lambda_3(3)$ и координатного угла $\omega_{12}(4)$ для поверхности $z = 99h$ раздела 99-го кольцевого элемента с 100-м

На рис. 9 графически отображены распределения деформаций во внешней поверхности $z = 100h = 100$ мм 100-го кольцевого элемента, являющейся и внешней поверхностью рассматриваемого цилиндрического тела.

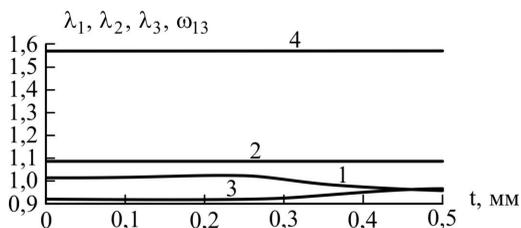


Рис. 9 – Распределения кратностей удлинений $\lambda_1(1)$, $\lambda_2(2)$, $\lambda_3(3)$ и координатного угла $\omega_{12}(4)$ для внешней поверхности $z = 100h$ 100-го кольцевого элемента (цилиндра)

Картина деформации в данной поверхности подобна картине деформации во внутренней поверхности $z = 99h$. Небольшие количественные различия имеют место для параметров деформации λ_1 и λ_3 . Параметр угловой деформации $\omega_{13} = \pi/2$. Параметр осевой деформации λ_1 изменяется на протяжении матрично-волоконного слоя немонотонно в диапазоне $1,014 \leq \lambda_1 \leq 1,023$, заметно уменьшаясь при приближении к матричному слою и в самом матричном слое, в котором переходит от удлинений к укорочениям $1,013 \geq \lambda_1 \geq 0,958$. Параметр осевой деформации очень слабо уменьшается $1,0864 \geq \lambda_2 \geq 1,0863$. Функция λ_3 в матрично-волоконном слое изменяется слабо в диапазоне значений $0,925 \geq \lambda_3 \geq 0,912$, в матричном слое – возрастает $0,925 \leq \lambda_3 \leq 0,966$, оставаясь, как и в смежном с ним слое, деформацией укорочения.

Переходя к анализу отклонения деформирования 100-го кольцевого элемента от периодического, представим различия значений параметров деформации для ограничивающих поверхностей элемента $z = 99 \text{ мм}$ и $z = 100 \text{ мм}$ в табл. 5.

Наибольший показатель различия деформаций в ограничивающих поверхностях элемента $S = S_3 = 2,28\%$ выявляется для радиальной деформации λ_3 по месту разграничения волоконно-матричного и матричного слоев $t = 0,3 \text{ мм}$.

Таблица 5 – Показатели различия деформаций в ограничивающих поверхностях $z = 100 \text{ мм}$ и $z = 99 \text{ мм}$ 100-го кольцевого элемента

| Показатель | S_1 | S_2 | S_3 | S_4 | S |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|------|
| Значение показателя, % | 1,97 | 0,08 | 2,28 | 0,06 | 2,28 |
| t , мм | 0,3 | 0,5 | 0,3 | 0,3 | 0,3 |

Приповерхностный эффект рассматривали как нарушение квазипериодического деформирования кольцевых элементов тела, располо-

женных вблизи его внутренней и внешней ограничивающих поверхностей. Глубину проникновения приповерхностного эффекта измеряем количеством кольцевых элементов в концентрической сборке цилиндра возле его граничных поверхностей, деформирование которых не является квазипериодическим.

В табл. 6 приведены значения показателя неперериодичности деформирования S для характерных кольцевых элементов цилиндра.

Таблица 6 – Значения показателя неперериодического деформирования кольцевых элементов цилиндра при $\omega = 2\pi \cdot 140c^{-1}$

| Номер кольцевого элемента | 1 | 2 | 3 | 51 | 99 | 100 |
|------------------------------|------|------|------|------|------|------|
| Показатель S , % | 37,7 | 2,32 | 1,72 | 1,00 | 0,93 | 2,28 |

Для других кольцевых элементов значения показателя неперериодического деформирования S являются промежуточными в соответствии с расположением их между кольцевыми элементами, для которых в табл. 6 даны значения этого показателя.

Для выявления глубины проникновения приповерхностного эффекта назначаем верхнюю границу \dot{S} различий между значениями параметров деформации кольцевого элемента в соответствующих точках на его противоположно расположенных ограничивающих поверхностях. В случае, когда показатель неперериодического деформирования меньше значения данной величины $S \leq \dot{S}$, деформирование элемента считаем квазипериодическим. Если принять верхнюю границу квазипериодического деформирования $\dot{S} = 2\%$, то глубина приповерхностного эффекта при скорости вращения $\omega = 2\pi \cdot 140c^{-1}$ будет измеряться двумя кольцевыми элементами (первым и вторым) возле внутренней поверхности цилиндра $r = a$ и одним (сотым) кольцевым элементом возле его внешней поверхности $r = b$. При назначении $\dot{S} = 3\%$ глубину проникновения приповерхностного эффекта оцениваем одним кольцевым элементом возле внутренней поверхности цилиндрического тела, возле внешней поверхности эффект считаем не проявляющимся.

Выводы. Изучили макроскопически плоское деформирование кусочно-однородного цилиндра под воздействием вращения при жесткой посадке по его внутренней поверхности. Установили наибольшее развитие деформаций связующего между волокнами в матрично-волоконном слое и в областях матричного слоя, примыкающих к волокнам. Определили глубину проникновения приповерхностного эффекта возле внутренней поверхности цилиндра в пределах одного или двух кольцевых элементов в зависимости от скорости вращения и задаваемого значения параметра квазипериодического деформирования кольцевых элементов цилиндра. Возле внешней поверхности цилиндра глубина проникновения приповерхностного эффекта находится в пределах одного кольцевого элемента.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Ахундов В. М., Скрипочка Т. А.** Большие деформации однородных и армированных нитями цилиндров под воздействием центробежных сил // *Механика композит. материалов*. 2009. Т.45. №3. С. 347–366.
2. **Ахундов В. М., Скрипочка Т.А.** Осесимметричная деформация вращающихся цилиндров из однородных и армированных нитями эластичных материалов // *Механика композит. материалов*. 2011. Т.47. №2. С. 301–316.
3. **Ахундов В. М.** Моделирование больших деформаций волокнистых тел вращения на основе прикладной и каркасной теорий. 3. Вращательное движение // *Механика композит. материалов*. 2014. Т. 50. № 6. С. 1131–1142.
4. **Ахундов В. М., Кострова М. М.** Нелинейное деформирование кусочно-однородного цилиндра под воздействием вращения // *Механика композит. материалов*. 2018. Т. 54. № 2. С. 345–360.
5. **Ахундов В. М.** Прикладная теория композитов с малыми наполнениями нитями при больших деформациях // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2001. Т. 7. №1. С. 3–15.
6. **Ахундов В. М.** Каркасная теория волокнистых сред с неискривленными и локально искривленными волокнами при больших деформациях // *Механика композит. материалов*. 2015. Т. 51. № 6. С. 971–990.
7. **Джонсон У., Меллор П.** Теория пластичности для инженеров. – М.: Машиностроение, 1979. 567 с.
8. *Композиционные материалы: Справочник / Под общ. ред. В. В. Васильева, Ю. М. Тарнопольского.* – М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
9. **Коханенко Ю. В., Быстров В. М.** Краевой эффект в волокнистом композитном материале при равномерном нагружении приповерхностных волокон // *Прикладная механика*. 2007. Т. 43. № 11. С. 15–23.
10. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
11. **Ортега Дж., Рейнболдт В.** Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975. 558 с.
12. *Термопрочность деталей машин. / Под ред. И. А. Биргера и Б.Ф. Шорра.* – М.: Машиностроение, 1975. 455 с.
13. **Черных К. Ф.** Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
14. **Andrianov I. V., Danishevskyy V. V., Weichert D.** Analytical study of the load transfer in fibre-reinforced 2D composite materials // *Int. J. of Solids and Structures*. 2008. Vol. 45. P. 1217–1243.
15. **Korn G. A. and Korn T. M.** *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review.* – N.Y.: General Publ. Company, 2000. 1151 p.
16. **Loffer K.** *Die berechnung von Rotierenden Scheiben und Schalen.* – Göttingen: Springer – Verlag OHG, 1961.
17. **Portnov G. G. and Bakis Ch. E.** Estimation of limit strains in disk-type flywheels made of compliant elastomeric matrix composite undergoing radial creep // *Mechanics of Composite Materials*. 2000. Vol. 36. No. 1. P. 87–94.
18. **Terwonon M. and Pramila A.** Stresses in a hollow rotating cylindrically orthotropic tube // *Mechanics of Composite Materials*. 1996. Vol. 32. No. 6. P. 835–841.

В. М. Ахундов, д-р фіз.-мат. наук, І. Ю. Наумова канд. фіз.-мат. наук

ПРИПОВЕРХНЕВИЙ ЕФЕКТ У ЦИЛІНДРІ З КІЛЬЦЕВИМИ ВОЛОКНАМИ ПІД ВПЛИВОМ ОБЕРТАННЯ ПРИ ЖОРСТКІЙ ПОСАДЦІ

Досліджуються прояви приповерхневого ефекту в кусково-однорідному циліндрі при великих пружних деформаціях під впливом вільного обертання. Визначили глибину приповерхневого ефекту біля внутрішньої і зовнішньої поверхонь циліндра. Глибину ефекту вимірювали кількістю кільцевих елементів циліндра біля цих поверхонь, що деформуються істотно неперіодично. Неперіодичне деформування кільцевих елементів оцінювали виходячи з відмінності значень деформацій в обмежуючих поверхнях елементу.

Ключові слова: циліндр кусково-однорідний, волокна кільцеві квадратного перетину, обертання вільне, ефект приповерхневий, деформації великі.

UDC 539.3

V. M. Akhundov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), I. Yu. Naumova, PhD (Phys.-Math.)

NEAR-SURFACE EFFECT IN CYLINDER WITH RING FIBERS UNDER THE ACTION OF ROTATION AT HARD SIDE

The manifestations of the near-surface effect in a piecewise-homogeneous cylinder with large elastic deformations under the influence of free rotation are investigated. The depth of the surface effect near the inner and outer surfaces of the cylinder was determined. The depth of the effect was measured by the number of annular elements of the cylinder near these surfaces, which are deformed significantly non-periodically. Non-periodic deformation of the ring elements was evaluated on the basis of the difference in the values of deformations in the bounding surfaces of the element.

Keywords: piecewise-uniform cylinder, square-section circular fibers, free rotation, near-surface effect, large deformations.

The deformation of round cylinders of homogeneous materials under the influence of rotation has been studied in detail with mechanics of linear deformation [16]. In studies [8] handwheels from materials with cylindrical orthotropy of elastic properties are considered. The problem of stresses in a rotating orthotropic tube was solved in [18]. The redistribution of stresses in a disk under creep of material is considered in [17]. The problems of rotating disks made of elastic-plastic materials are given in [7, 12]. A description of large deformations of rotating cylinders is presented in [1 – 4]; studies were carried out using single-level applied [5] and two-level framework [6] theories. Solutions of problems on near-surface effects in one directional composites under transverse and longitudinal loading of fibers are given in [9, 14].

The deformation of an elastic cylinder made of a matrix and annular fibers under the influence of the rotation inertia forces with a hard landing was investigated under conditions of plane deformation.

Cylinder deformation was described on the basis of geometric and physical equations and the equilibrium equations of the nonlinear theory of elasticity [10].

The first order derivatives of the desired quantities with respect to the axial and radial coordinates t and r in the equations of the problem were approximated using finite-difference relations of the second order of accuracy [15]. This system of equations was solved on the basis of the procedure of the discrete Newton method [11].

The materials of the matrix and fibers were set using the three constant potential of Levinson-Burgess and the two constant potential of Blitz, respectively [13].

The near-surface effect was considered as a violation of the quasi-periodic deformation of the ring elements of the body, which are located near its inner and outer limiting surfaces.

The greatest development of deformations was established in the matrix fiber layer connecting the fibers and in the regions of the matrix layer adjacent to the fibers. The depth of penetration of the near-surface effect near the inner surface of the cylinder was determined within one or two ring elements, depending on the set value of the parameter of quasi-periodic deformation of the ring elements of the cylinder. Near the cylinder outer surface, the depth of penetration of the near-surface effect lies within one ring element.

REFERENCES

1. **Akhundov V. M.**, *Skripochka T. A.* Large deformations of homogeneous and fiber-reinforced cylinders under the action of centrifugal forces // *Mech. Compos. Mater.* 2009. Vol. 45, No. 3, P.235–248. (in Russian).
2. **Akhundov V. M.**, *Skripochka T. A.* Axisymmetric deformation of revolving cylinders made of homogeneous and fiber-reinforced elastic materials // *Mech. Compos. Mater.* 2011. Vol. 47, No 2. P. 211–220. (in Russian).
3. **Akhundov V. M.** Modeling large deformations of fibrous bodies of revolution based on applied and carcass theories.3. Rotational motion // *Mech. Compos. Mater.* 2014. Vol.50. No 6. P. 809–816. (in Russian).
4. **Akhundov V. M.**, *Kostrova M. M.* Nonlinear Deformation of a Piecewise Homogeneous Cylinder Under the Action of Rotation // *Mechanics of Composite Materials.* 2018. Vol. 54. No 2. P. 231–242. (in Russian).
5. **Akhundov V. M.** Applied theory of composites with low fiber fillings at large deformations // *Mekh. Kompos. Mater.Konstr.* 2001. Vol. 7., No 1. P. 3–15. (in Russian).
6. **Akhundov V. M.** Carcass theory of fibrous media with uncurved and locally curved fibers at large deformations // *Mech. Compos. Mater.* 2015. Vol.51. No. 6. P.683–694. (in Russian).
7. **Johnson U. and Mellor P.** *Plasticity Theory for Engineers* [Russian translation], M.: Mashinostroenie, 1979. 567 p. (in Russian).
8. *Composite materials: Handbook* / eds. V. V. Vasil'ev, Yu. M. Tarnopolskii. M.: Mashinostroenie, 1990. 512 p. (in Russian).
9. **Kokhanenko Yu. V.**, *Bystrov V. M.* Edge effect in a fibrous composite material with uniform loading of surface fibers // *Applied Mechanics.* 2007. Vol. 43. No 11. P. 15–23. (in Russian).
10. **Lurie A. I.** *Nonlinear Elasticity Theory.* M.: Nauka, 1980. 512 p. (in Russian).

11. **Ortega Dzh. and Reinboldt V.** [Integration Methods for Solving of Nonlinear Systems of Equations with Many Unknowns], M.: Mir, 1975. 558 p. (in Russian).
12. Thermal Strength of Mashine Parts / eds, I. A. Birger and B. F. Shor. M.: Mashinostroenie, 1975. 455 p. (in Russian).
13. **Chernykh K. F.** Nonlinear Elasticity Theory in Machine-Building Calculations.], Letningrad: Mashinostroenie, 1986.336c. (in Russian).
14. **Andrianov I. V., Danishevs'kyi V. V.,** Weichert D. Analytical study of the load transfer in fibre-reinforced 2D composite materials // Int. J. of Solids and Structures. 2008. Vol. 45. P. 1217–1243.
15. **Korn G. A. and Korn T. M.** Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review. N.Y.: General Publ. Company, 2000. 1151 p.
16. **Loffer K.** Die berechnung von Rotierenden Scheiben und Schalen. Göttingen: Springer-Verlag OHG, 1961.
17. **Portnov G. G. and Bakis Ch. E.** Estimation of limit strains in disk-type flywheels made of compliant elastomeric matrix composite undergoing radial creep // Mech. Compos. Mater, 2000. Vol. 36. No 1. P. 87–94).
18. **Tervonen M. and Pramila A.** Stresses in a hollow rotating cylindrically orthotropic tube. // Mech. Compos. Mater. 1996. Vol. 32. No 6. P. 577–581.

*Національна металургійна
академія України,
Дніпро, Україна*

Надійшла до редколегії 01.09.2018