

УДК 539.3

Ю. Я. Годес, канд. физ.-мат. наук, И. Б. Кочеткова

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО МНОГОСЛОЙНОГО ШАРА С НЕОДНОРОДНЫМИ СЛОЯМИ

Рассмотрена задача о собственных колебаниях в условиях центрально-симметричной деформации полого упругого многослойного шара, в котором произвольным образом чередуются однородные слои и слои с непрерывно изменяющимися в радиальном направлении характеристиками. Предложенный алгоритм определения собственных частот и форм колебаний основан на применении функций жесткости, для построения которых использованы рекуррентные соотношения. Нормированные решения уравнений теории упругости в области полого шара с произвольной непрерывной неоднородностью получены посредством численного решения двух задач Коши.

Ключевые слова: упругость, многослойный шар, напряженно-деформированное состояние, собственные колебания, нормированные решения, функции жесткости, рекуррентные соотношения.

Введение. Одним из наиболее эффективных методов моделирования процессов деформирования многослойных тел является метод функций податливости, получивший широкое распространение при решении граничных задач теории упругости для многослойных оснований [7, 9, 10], многослойных колец и шаров [2, 3, 6]. Идея этого метода заключается в построении функций (коэффициентов, операторов) податливости, которые представляют собой механические характеристики рассматриваемого многослойного тела, не зависящие от внешних воздействий на его поверхности. Функции податливости строятся при помощи специальных рекуррентных соотношений до решения граничных задач. Напряжения и перемещения во всех слоях выражаются через параметры внешних воздействий на границе многослойного тела по рекуррентным формулам, в которые входят функции податливости. Важным достоинством указанного подхода является нечувствительность к росту числа слоев в теле.

Область применения метода функций податливости удалось расширить с кусочно-однородных тел на тела, содержащие слои с непрерывной неоднородностью. В [4, 5] с использованием аппарата коэффициентов податливости получены решения задач теории упругости о плоской осесимметричной деформации многослойного кольца и о центрально-симметричной деформации многослойного шара с чередующимися однородными слоями и слоями, модули сдвига которых непрерывно изменяются в радиальном направлении.

Метод функций податливости был также распространен на динамические задачи об установившемся движении нагрузки по поверхности многослойного основания и о распространении в основании собственных волн [1, 11]. В настоящей статье излагается базирующееся на идеях указанного метода решение задачи о собственных колебаниях упругого многослойного шара.

Постановка задачи. Рассматривается многослойный полый шар, состоящий из N концентрических шаровых слоев конечной толщины $r_{n-1} < r < r_n$ ($n = 1, 2, \dots, N$), находящийся в абсолютно жесткой идеально гладкой внешней обойме. Здесь r_n – внешний радиус n -го слоя, $r\theta\varphi$ – сферическая система координат, центр которой совпадает с центром шара. В процессе деформирования слои не отстают друг от друга, векторы напряжения на их общей границе совпадают. Слои являются упругими, изотропными. Модуль сдвига $G(r)$, коэффициент Пуассона $\nu(r)$ и плотность $\rho(r)$ представляют собой кусочно-непрерывно-дифференцируемые функции радиуса r , которые могут претерпевать конечные разрывы на границах слоев. Если n -й слой однородный, то в области этого слоя указанные величины постоянны. Объемные силы отсутствуют. Внутренняя граница $r = r_0$ шара свободна от внешних воздействий.

Деформация шара предполагается симметричной относительно его центра, поэтому обращаются в нуль перемещения u_θ , u_φ , сдвиги $\varepsilon_{r\theta}$, $\varepsilon_{r\varphi}$, $\varepsilon_{\theta\varphi}$ и касательные напряжения $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{r\varphi}$, $\sigma_{\theta\varphi}$. Рассматривается задача о колебаниях, когда ненулевые компоненты вектора перемещений, тензоров деформации и напряжений представляют собой произведения своих амплитудных значений, которые являются функциями только радиуса r , на гармоническую функцию времени: $u_r(r)e^{i\omega t}$, $\varepsilon_{rr}(r)e^{i\omega t}$, $\varepsilon_{\theta\theta}(r)e^{i\omega t}$, $\sigma_{rr}(r)e^{i\omega t}$, $\sigma_{\theta\theta}(r)e^{i\omega t}$, $\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}$, где ω – частота колебаний. Система уравнений линейной теории упругости в области n -го слоя ($n = 1, 2, \dots, N$) в описанном случае колебаний в условиях центрально-симметричной деформации имеет вид:

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = -\rho\omega^2 u_r, \quad \sigma_{rr} = \frac{2G}{1-2\nu}((1-\nu)\varepsilon_{rr} + 2\nu\varepsilon_{\theta\theta}),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2G}{1-2\nu}(\varepsilon_{\theta\theta} + \nu\varepsilon_{rr}), \quad \varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad r_{n-1} < r < r_n. \quad (1)$$

В математическом плане задача определения напряженно-деформированного состояния многослойного шара сводится к построению в

областях всех слоев решений уравнений теории упругости, удовлетворяющих следующим граничным условиям:

1) условиям сопряжения слоев

$$\sigma_{rr}|_{r=r_n+0} = \sigma_{rr}|_{r=r_n-0}, \quad u_r|_{r=r_n+0} = u_r|_{r=r_n-0}, \quad n = 1, 2, \dots, N; \quad (2)$$

2) условию отсутствия перемещений на внешней границе шара

$$u_r|_{r=r_N} = 0; \quad (3)$$

3) условию свободной внутренней границы шара

$$\sigma_{rr}|_{r=r_0} = 0. \quad (4)$$

Нормированные решения дифференциальных уравнений. Задача решения системы уравнений (1) в области n -го слоя сводится в соответствии с известной методикой [8] к определению функций

$\tau = \sigma_{rr}$, $s = 2G \frac{u_r}{r}$, связанных с радиальными напряжением и перемещением. Эти функции удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d\tau}{dr} = -\frac{2}{r} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \tau + \frac{2}{r} \frac{1+\nu}{1-\nu} s - \frac{\rho}{2G} r \omega^2 s,$$

$$\frac{ds}{dr} = \frac{1-2\nu}{(1-\nu)r} \tau + \left(\frac{d}{dr} \ln G - \frac{1+\nu}{(1-\nu)r} \right) s. \quad (5)$$

Общее решение этой системы уравнений выражается через начальные параметры напряженно-деформированного состояния n -го слоя

$$\tau_n = \sigma_{rr}|_{r=r_{n-1}+0}, \quad s_n = 2G \frac{u_r}{r} \Big|_{r=r_{n-1}+0} \quad (6)$$

следующим образом:

$$\tau = S_{\tau\tau}(\omega, r) \tau_n + S_{\tau s}(\omega, r) s_n,$$

$$s = S_{s\tau}(\omega, r) \tau_n + S_{ss}(\omega, r) s_n, \quad r_{n-1} < r < r_n, \quad (7)$$

где $S_{\tau\tau}(\omega, r)$, $S_{s\tau}(\omega, r)$ и $S_{\tau s}(\omega, r)$, $S_{ss}(\omega, r)$ – нормированные решения системы дифференциальных уравнений (5), построение которых сводится к двум задачам Коши.

Для полого шара с неоднородностью произвольного типа эти задачи Коши можно решить только численно. Они допускают аналитическое решение либо для однородного шара, либо если модуль сдвига и плотность n -го слоя изменяются вдоль радиуса $r_{n-1} < r < r_n$ по степенным законам с согласованными показателями неоднородности, а коэффициент Пуассона постоянен:

$$\frac{G(r)}{G(r_{n-1})} = \left(\frac{r}{r_{n-1}}\right)^{\gamma_n}, \quad \frac{\rho(r)}{\rho(r_{n-1})} = \left(\frac{r}{r_{n-1}}\right)^{\gamma_n - 2}, \quad v(r) = v(r_{n-1}). \quad (8)$$

В случае степенной неоднородности вида (8) нормированные решения системы дифференциальных уравнений (5) имеют следующий вид:

$$S_{\tau\tau}(\omega, r) = \left(\frac{r}{r_{n-1}}\right)^{\alpha_n} \left((1 + \mu_n) \left(\frac{r}{r_{n-1}}\right)^{\beta_n} - \mu_n \right),$$

$$S_{s\tau}(\omega, r) = \frac{1}{\kappa_n \beta_n} \left(\frac{r}{r_{n-1}}\right)^{\alpha_n} \left(\left(\frac{r}{r_{n-1}}\right)^{\beta_n} - 1 \right),$$

$$S_{\tau s}(\omega, r) = -\kappa_n \beta_n \mu_n \left(\frac{r}{r_{n-1}}\right)^{\alpha_n} \left(\left(\frac{r}{r_{n-1}}\right)^{\beta_n} - 1 \right), \quad (9)$$

$$S_{ss}(\omega, r) = \left(\frac{r}{r_{n-1}}\right)^{\alpha_n} \left(1 - \mu_n \left(\left(\frac{r}{r_{n-1}}\right)^{\beta_n} - 1 \right) \right),$$

где γ_n – показатель неоднородности модуля сдвига,

$$\beta_n = \sqrt{(\gamma_n - 3)^2 + 8 \frac{\gamma_n}{\kappa_n} - 4(\omega t_n)^2}, \quad \mu_n = \frac{1}{\beta_n} \left(\alpha_n - \gamma_n + \frac{1 + v(r_{n-1})}{1 - v(r_{n-1})} \right),$$

$$t_n = r_{n-1} \sqrt{\frac{1}{2\kappa_n} \frac{\rho(r_{n-1})}{G(r_{n-1})}}, \quad \alpha_n = \frac{1}{2}(\gamma_n - \beta_n - 3), \quad \kappa_n = \frac{1 - v(r_{n-1})}{1 - 2v(r_{n-1})}. \quad (10)$$

В случае однородного шарового слоя, когда $G(r) = G_n$, $\rho(r) = \rho_n$, $v(r) = v_n$, $r_{n-1} < r < r_n$, нормированные решения системы дифференциальных уравнений (5) выражаются через сферические функции Бесселя $j_0(z)$, $y_0(z)$, $j_1(z)$, $y_1(z)$ [12] и могут быть сведены к элементарным функциям:

$$\begin{aligned}
 S_{\tau\tau}(\omega, r) &= \frac{r_{n-1}}{r} \cos \alpha + \left(1 - \frac{r_{n-1}}{r}\right) \left(1 - \frac{2r_{n-1}}{\kappa_n r}\right) \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \\
 &\quad - \frac{2}{\kappa_n} \left(1 - \frac{r_{n-1}}{r}\right)^3 \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha^3}, \\
 S_{s\tau}(\omega, r) &= \frac{1}{\kappa_n} \left(1 - \frac{r_{n-1}}{r}\right) \left(\frac{r_{n-1}}{r} \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \left(1 - \frac{r_{n-1}}{r}\right)^2 \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha^3}\right), \\
 S_{\tau s}(\omega, r) &= \frac{2r_{n-1}}{r} \left(1 - \frac{r_{n-1}}{r}\right) \cos \alpha - \kappa_n \omega t_n \frac{r_{n-1}}{r} \sin \alpha + \quad (11) \\
 &+ 2 \left(1 - \frac{r_{n-1}}{r}\right) \left(1 - \frac{2r_{n-1}}{\kappa_n r} + \frac{r_{n-1}^2}{r^2}\right) \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \frac{4}{\kappa_n} \left(1 - \frac{r_{n-1}}{r}\right)^3 \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha^3}, \\
 S_{ss}(\omega, r) &= \frac{r_{n-1}^2}{r^2} \cos \alpha + \left(\frac{2}{\kappa_n} - \frac{r_{n-1}}{r}\right) \left(1 - \frac{r_{n-1}}{r}\right) \frac{r_{n-1}}{r} \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \\
 &\quad + \frac{2}{\kappa_n} \left(1 - \frac{r_{n-1}}{r}\right)^3 \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha^3}, \\
 \alpha &= \omega t_n \left(\frac{r}{r_{n-1}} - 1\right), \quad t_n = r_{n-1} \sqrt{\frac{1}{2\kappa_n} \frac{\rho_n}{G_n}}.
 \end{aligned}$$

Для приближенного определения нормированных решений системы дифференциальных уравнений (5) в областях неоднородных слоев использовался метод Рунге – Кутты пятого порядка с автоматическим выбором шага интегрирования. Многочисленные расчеты показали, что получаемые результаты с высокой степенью точности совпадают с

аналитическими решениями для эквивалентных кусочно-однородных шаров и для шара со степенной неоднородностью вида (8).

Функции жесткости. Удовлетворяя условиям сопряжения слоев (2), в силу равенств (6), (7) приходим к рекуррентным соотношениям, связывающим начальные параметры напряженно-деформированного состояния соседних слоев:

$$\tau_{n+1} = S_{\tau\tau}(\omega, r_n - 0)\tau_n + S_{\tau s}(\omega, r_n - 0)s_n,$$

$$\frac{G(r_n - 0)}{G(r_n + 0)}s_{n+1} = S_{s\tau}(\omega, r_n - 0)\tau_n + S_{ss}(\omega, r_n - 0)s_n. \quad (12)$$

Для удовлетворения условию отсутствия перемещений на внешней границе шара (3) начальные параметры N -го слоя следует связать равенством

$$\tau_N = -B_N(\omega)s_N, \quad B_N(\omega) = \frac{S_{ss}(\omega, r_N)}{S_{s\tau}(\omega, r_N)}.$$

Воспользовавшись рекуррентными соотношениями (12), приходим к выводу, что аналогичными равенствами связаны начальные параметры напряженно-деформированного состояния всех слоев:

$$\tau_n = -B_n(\omega)s_n, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (13)$$

Величины $B_n(\omega)$ представляют собой функции жесткости многослойного шара. Зная эти величины, можно связать между собой напряжения и перемещения на внутренних границах слоев. Функции жесткости являются механическими характеристиками многослойного тела, так как определяются исключительно его геометрией и механическими свойствами материалов слоев.

Для построения функций жесткости воспользуемся известными приемами метода функций податливости [9–10]. Подставив рекуррентные соотношения (12) в равенство (13) для слоя с номером $n + 1$, приходим к уравнению относительно τ_n . Сравнив решение этого уравнения с равенством (13), получим рекуррентные соотношения для функций жесткости:

$$B_n(\omega) = \frac{\frac{G(r_n - 0)}{G(r_n + 0)}S_{\tau s}(\omega, r_n - 0) + B_{n+1}(\omega)S_{ss}(\omega, r_n - 0)}{\frac{G(r_n - 0)}{G(r_n + 0)}S_{\tau\tau}(\omega, r_n - 0) + B_{n+1}(\omega)S_{s\tau}(\omega, r_n - 0)}. \quad (14)$$

Исходной для рекуррентного процесса (14) является функция жесткости $B_N(\omega)$, которая была найдена выше.

Частоты и формы колебаний. Удовлетворение условию свободной внутренней границы многослойного шара приводит к уравнению частот

$$B_1(\omega) = 0. \quad (15)$$

Корни этого уравнения ω_k ($k=1,2,\dots$) представляют собой частоты собственных колебаний рассматриваемого многослойного шара. Для определения формы колебания с k -й собственной частотой необходимо выразить начальные параметры s_n , $n=2,3,\dots,N$, через s_1 при помощи рекуррентных соотношений

$$\frac{G(r_n - 0)}{G(r_n + 0)} s_{n+1} = (S_{ss}(\omega_k, r_n - 0) - B_n S_{s\tau}(\omega_k, r_n - 0)) s_n, \quad (16)$$

вытекающих из равенств (12), (13). Амплитуды радиальных напряжений и перемещений можно найти согласно формулам (7) с учетом равенств (13), после чего амплитуды кольцевых напряжений легко определяются из последних трех уравнений (1):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (S_{\tau s}(\omega_k, r) - B_n(\omega_k) S_{\tau\tau}(\omega_k, r)) s_n, \\ 2G \frac{u_r}{r} &= (S_{ss}(\omega_k, r) - B_n(\omega_k) S_{s\tau}(\omega_k, r)) s_n, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{1-\nu} \left(\nu \sigma_{rr} + 2(1+\nu) G \frac{u_r}{r} \right), \quad r_{n-1} < r < r_n. \end{aligned} \quad (17)$$

Функции жесткости $B_n(\omega)$, которые входят в формулы (16), (17), однозначно определены рекуррентным процессом (14). Как и следовало ожидать, формы колебаний находятся с точностью до произвольной мультипликативной постоянной s_1 , задающей перемещение внутренней границы многослойного шара.

Результаты численного моделирования. Для иллюстрации возможностей изложенной выше методики моделировались колебания четырехслойного шара с неоднородностью смешанного типа. Внешние радиусы слоев $r_1 = 2r_0$, $r_2 = 3r_0$, $r_3 = 5r_0$, $r_4 = 6r_0$. Коэффициенты Пуассона и плотности всех слоев одинаковы: $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = 0,3$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4$. Первый слой является однородным с модулем сдви-

га G_1 . Модули сдвига второго и четвертого слоев изменяются по линейному закону:

$$G(r) = G_1 \left(1 - \frac{r - r_2}{2r_2} \right), \quad r_1 < r < r_2; \quad G(r) = G_1 \left(1 + \frac{r - r_3}{2r_3} \right), \quad r_3 < r < r_4,$$

третьего слоя – по степенному закону: $G(r) = G_3 \sqrt{\frac{r_2}{r}}$, $r_2 < r < r_3$.

Изменение модуля сдвига вдоль радиуса показано на рис. 1.

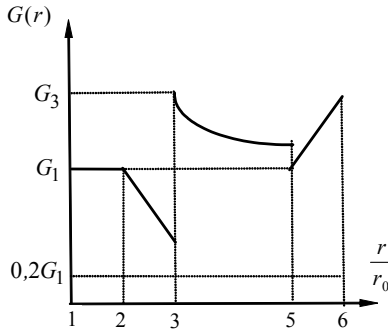


Рис. 1 – Зависимость модуля сдвига $G(r)$ от радиуса

На рис. 2 – рис. 4 показаны формы колебаний многослойного шара, соответствующие первым четырем собственным частотам, при $G_3/G_1 = 50$.

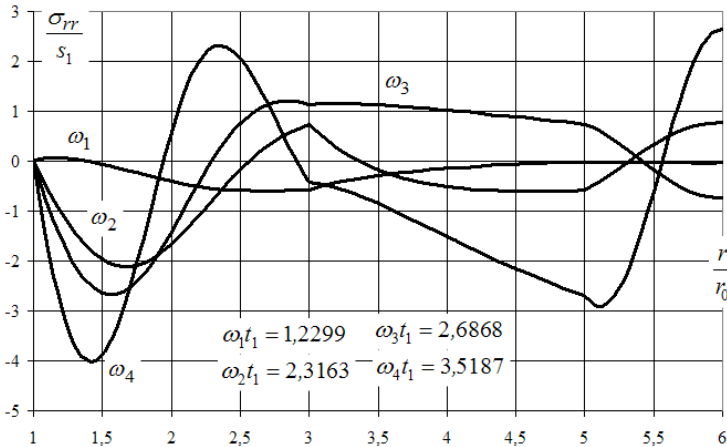


Рис. 2 – Амплитудные значения радиальных напряжений σ_{rr}

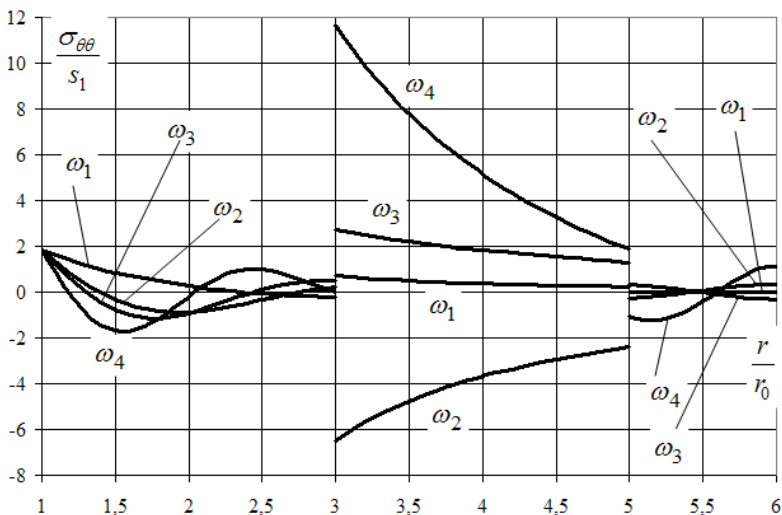


Рис. 3 – Амплитудные значения кольцевых напряжений $\sigma_{\theta\theta}$

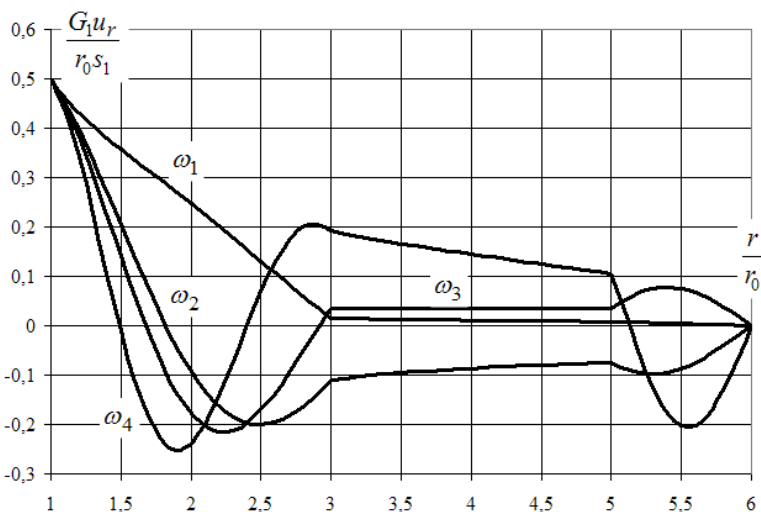


Рис. 4 – Амплитудные значения перемещений u_r

Рис. 5 иллюстрирует изменение амплитуды радиальных напряжений, соответствующих первой собственной частоте, в зависимости от отношения модулей сдвига G_3/G_1 . Как и следовало ожидать, радиальные напряжения и перемещения сохраняют непрерывность на границах

слоев. Кольцевые напряжения остаются непрерывными на границе первого и второго слоев, на которой непрерывен модуль сдвига, и претерпевают разрывы на границах других слоев.

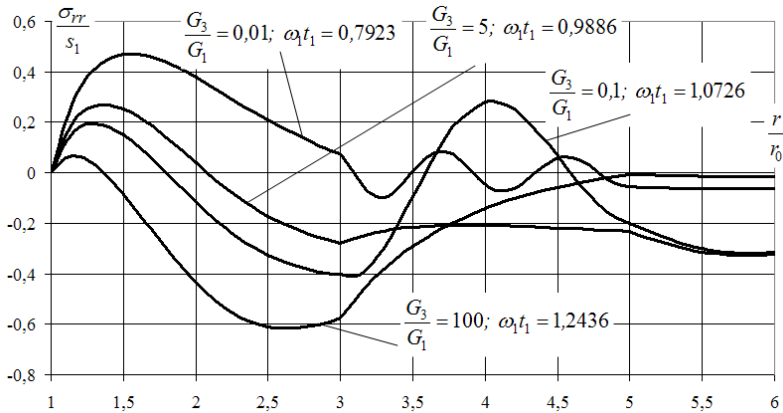


Рис. 5 – Амплитудные значения радиальных напряжений σ_{rr}

Выводы. Предложенная в настоящей статье методика позволяет моделировать в условиях симметричной относительно центра деформации собственные колебания многослойных шаров с произвольным чередованием однородных и непрерывно-неоднородных слоев в широком диапазоне изменения их механических характеристик. Эффективность и достоверность численного определения напряжений и перемещений подтверждена сравнением с аналитическими решениями для эквивалентных кусочно-однородных шаров и шаров со степенной неоднородностью вида (8).

Перспективным направлением дальнейших исследований представляется применение изложенного алгоритма для моделирования колебаний многослойных колец со смешанной неоднородностью в условиях плоской деформации, а также его распространение на ортотропные многослойные кольца и шары.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Вильданова С. И., Годес Ю. Я.** Резонансные явления в многослойных основаниях с чередующимися однородными и неоднородными слоями // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка. 2008. Вип. 11. Т. 1. С. 102–116.
2. **Годес Ю. Я., Климова Е. А., Кочеткова И. Б.** О напряженно-деформированном состоянии многослойного кольца со сцепленными слоями // Вопросы механики деформирования и разрушения твердых тел. Д.: ДГУ. 1995. С. 18–25.
3. **Годес Ю. Я., Кочеткова И. Б.** О напряженно-деформированном состоянии осесимметрично нагруженного многослойного полого шара с упругими связями между слоями // Вопросы прочности и пластичности. Д.: ДГУ. 1996. С. 37–45.

4. **Годес Ю. Я., Кочеткова И. Б., Михаил А. В.** О деформировании упругого многослойного шара с неоднородными слоями // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Механіка. 2015. Вип. 19. Т. 2. С. 18–26.
5. **Годес Ю. Я., Кочеткова И. Б., Оноприенко О. Д.** О деформировании многослойного кольца с чередующимися однородными и неоднородными слоями // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка. 2014. Вип. 18. Т. 1. С. 43–51.
6. **Кочеткова И. Б.** О напряженно-деформированном состоянии многослойного кольца с упругими связями между слоями // Вопросы механики деформирования и разрушения твердых тел. Д.: ДГУ. 1995. С. 135–140.
7. **Ламзюк В. Д., Приварников А. К.** Решение граничных задач теории упругости для многослойных оснований. Д.: ДГУ, 1978. Вып. 1. 64 с., Вып. 2. 58 с.
8. **Ломакин В. А.** Теория упругости неоднородных тел. М.: МГУ, 1976. 368 с.
9. **Приварников А. К.** Пространственная деформация многослойного основания // Устойчивость и прочность элементов конструкций. Д.: ДГУ. 1973. С. 27–45.
10. **Приварников А. К., Ламзюк В. Д.** Упругие многослойные основания. – Д., 1985. Ч.1. 162 с. Деп. в ВИНТИ 23.12.85, №8789-В.
11. **Приварников А. К., Радовский Б. С.** Действие подвижной нагрузки на вязкоупругое многослойное основание // Прикл. механика. 1981. Т.17. Вып. 6. С. 45–52.
12. **Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган.** М.: Наука, 1979. 832 с.

УДК 539.3

Ю. Я. Годес, канд. фіз.-мат. наук, І. Б. Кочеткова

МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАНЬ ПРУЖНОЇ БАГАТОШАРОВОЇ КУЛІ З НЕОДНОРІДНИМИ ШАРАМИ

Розглянуто задачу про вільні коливання в умовах центрально-симетричної деформації порожнистої пружної багат шарової кулі, у якій довільним чином чергуються як однорідні шари, так і шари, модулі пружності та густини яких неперервно змінюються у радіальному напрямі. Запропонований алгоритм визначення власних частот і форм коливань ґрунтується на застосуванні функцій жорсткості, для побудови яких використано рекурентні співвідношення. Нормовані розв'язки рівнянь теорії пружності в області порожнистої кулі з довільною неперервною неоднорідністю одержано як результати числового розв'язання двох задач Коші.

Ключові слова: пружність, багат шарова куля, напружено-деформований стан, власні коливання, нормовані розв'язки, функції жорсткості, рекурентні співвідношення.

UDC 539.3

Yu. Ya. Hodes, PhD (Phys.-Math.), I. B. Kochetkova

VIBRATIONS OF THE ELASTIC MULTILAYERED SPHERE WITH INHOMOGENEOUS LAYERS MODELLING

Problem concerning free vibrations of a hollow elastic multilayered sphere has been considered under conditions of central symmetric deformation. For some

layers elasticity modulus and densities change continuously in the radial direction. Algorithm for evaluation the frequencies and shapes of free vibrations based on the use of rigidity functions is proposed. Recurrent relationships are applied to determine the rigidity functions. Normalized solutions of the elasticity equations for hollow sphere with arbitrary continuous inhomogeneity are obtained as the result of numerical solving Cauchy problems.

Keywords: elasticity, multilayered sphere, stresses, strains, displacements, free vibrations, normalized solutions, rigidity functions, recurrent relationships.

The compliance functions method is well known as the most effective mode to evaluate stressed and strained state of piecewise homogeneous solids, such as multilayered foundations [7, 9, 10], hollow rings and spheres [2, 3, 6]. The idea of this method is to get compliance functions (coefficients, operators) – mechanical parameters of multilayered solid which are independent of external surface load and should be obtained via special recurrent relationships. In [4, 5] the scope of application of this method was extended from piecewise homogeneous solids to multilayered foundations, rings and spheres containing continuously inhomogeneous layers.

The compliance functions method was also extended to dynamic problems of steady-state load motion and waves propagation in multilayered foundations [1, 11]. In this article the rigidity functions algorithm based on the ideas of this method is used to solve the free vibrations problem concerning central symmetric deformation of a hollow elastic multilayered sphere containing layers with continuously changing elasticity modulus and densities.

Mathematical formulation of the problem is presented by the elasticity equations (which are reduced to special form) for each spherical layer and boundary conditions. General solution of differential equations contains normalized solutions $S_{\tau\tau}(\omega, r)$, $S_{s\tau}(\omega, r)$, $S_{\tau s}(\omega, r)$, $S_{ss}(\omega, r)$ and initial parameters – radial stresses and displacements at the inner boundary of the spherical layer. The initial parameters for each pair of neighboring layers are connected by recurrent relationships. The initial parameters s_n , τ_n of any layer are related by formula $\tau_n = -B_n(\omega)s_n$. Recurrent process for determining the rigidity functions $B_n(\omega)$ is proposed. Natural frequencies are the roots of equation $B_1(\omega) = 0$. Equations for calculation the vibrations shape are obtained. The numerical simulation results for four-layered sphere with mixed inhomogeneity are given to illustrate the potentialities of the technique described.

REFERENCES

1. **Vildanova S. I.**, *Hodes Yu. Ya.* Resonance phenomena in the multilayered foundations with the alternate homogeneous and nonhomogeneous layers // Bulletin of Dnipropetr. Univ. Ser.: *Mechanika*. 2008. vol. 1. No. 11. P. 102–116. (in Russian).
2. **Hodes Yu. Ya.**, *Klimova E. A.*, *Kochetkova I. B.* Stressed and strained state of the multilayered ring with rigid coupling of the layers // *Problems of solids deformation and fracture mechanics*. Dnepropetrovsk, 1995. P. 18–25. (in Russian).

3. **Hodes Yu. Ya., Kochetkova I. B.** Stressed and strained state of the axisymmetrically loaded multilayered sphere with elastic coupling of the layers // Problems of strength and plasticity. Dnepropetrovsk. 1996. P. 37–45. (in Russian).
4. **Hodes Yu. Ya., Kochetkova I. B., Mikhail A. V.** Deformation of the elastic multilayered sphere with nonhomogeneous layers // Bulletin of Dnipropetr. Univ. Ser.: Mechanika. 2015. vol. 2. No. 19. P. 18–26. (in Russian).
5. **Hodes Yu. Ya., Kochetkova I. B., Onoprienko O. D.** Deformation of the multilayered ring with the alternate homogeneous and nonhomogeneous layers // Bulletin of Dnipropetr. Univ. Ser. Mechanika. 2014. vol. 1. No 18. P. 43–51. (in Russian).
6. **Kochetkova I. B.** Stressed and strained state of the multilayered ring with elastic coupling of the layers // Problems of solids deformation and fracture mechanics. – Dnepropetrovsk. 1995. P. 135–140. (in Russian).
7. **Lamzyuk V. D., Privarnikov A. K.** Solution of the elasticity boundary problems for multilayered foundations. Dnepropetrovsk, 1978. No. 1. 64 p. No. 2. 58 p. (in Russian).
8. **Lomakin V. A.** Elasticity theory of nonhomogeneous solids. Moscow, 1976. – 368 p. (in Russian).
9. **Privarnikov A. K.** Three-dimensional deformation of the multilayered foundation // Stability and strength of construction members. Dnepropetrovsk, 1973. P. 27–45. (in Russian).
10. **Privarnikov A. K., Lamzyuk V. D.** Elastic multilayered foundations Dnepropetrovsk, 1985. Part 1. 162 p. Dep. VINITI 23.12.85, №8789-B. (in Russian).
11. **Privarnikov A. K., Radovsky B. S.** Viscoelastic multilayered foundation under moving load // Applied Mechanics. 1981. – Vol. 17. No 6.–P. 45–52. (in Russian).
12. Handbook of mathematical functions / Edited by M. Abramowitz, I. Stegun. Moscow: Nauka, 1979. 832 p.

*Дніпровський національний університет
імені Олеся Гончара,
Національна металургійна академія України,
Дніпро, Україна*

Надійшла до редколегії 14.06.2018