УДК 519.863:303.725.36
С. А. Цыбульник, канд. техн. наук
(УкрНИИЭП)

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ, ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ И НАГЛЯДНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МНОЖЕСТВА ЭФФЕКТИВНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Определены характерные свойства множества эффективных решений задачи векторной оптимизации и доказаны теоремы их существования. Предложен метод наглядного графического отображения множества эффективных решений в пространство двух параметров.

Ключевые слова: *математическая модель, векторная (многокритериальная) оптимизация, водоохранные мероприятия, множество эффективных решений.*

При распределении затрат на водоохранные мероприятия целесообразно учитывать не только глобальный критерий оптимальности — суммарные затраты, но и локальные критерии, характеризующие влияние планируемых мероприятий на показатели экономической эффективности хозяйственной деятельности водопользователей [1]. В строго математическом смысле, без привлечения дополнительных соображений, задача векторной оптимизации, как правило, неразрешима, так как улучшение значений одних критериев приводит к ухудшению других [2]. Поэтому для выбора решения, как правило, используются процедуры неформального анализа переговорного множества эффективных (неулучшаемых) решений (области Парето). Это обусловливает актуальность проблемы наглядного графического представления указанного переговорного множества решений в виде, позволяющем легко осуществлять сравнительный анализ возможных решений.

Пусть $\{g_1(x),\ldots,g_r(x)\}$ — действительнозначные функции, определенные на $X \subset R^n$. Частичный порядок на X, определяемый следующим образом: $x_1 \prec x_2$ если и только если $g_i(x_1) \le g_i(x_2)$, $\forall_i$, где хотя бы одно неравенство выполняется строго, назовем порожденным системой функций $\{g_1(x),\ldots,g_r(x)\}$. Очевидно, что элементы множества X, не имеющие предшествующих по отношению предпочтительности $\prec$, образуют множество эффективных (неулучшаемых) решений X^0 задачи векторной оптимизации вида

$$\{g_1(x),...,g_r(x)\} \to \min_{x \in X}. \tag{1}$$

Для простоты изложения при взятии min или max по x будем полагать, что он достигается, в противном случае вместо min и max нужно рассматривать inf и sup по x и считать, что задача решается с ограниченной точностью.

Преобразованием максимизируемых критериев в минимизируемые [3] любая задача многокритериального математического программирования может быть сведена к виду (1).

Основные методы отыскания области Парето сводятся к построению скалярной функции $\Gamma(x,\xi)$, где вектор $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_r)$ такой, что минимум этой функции в области возможных решений достигается на множестве эффективных решений (и только). То есть

$$\arg\min_{x \in X} \Gamma(x,\xi) \in X^0, \forall \xi \in R^r. \tag{2}$$

Параметры $\xi_1,\ldots,\xi_r$ могут вводиться как в целевую функцию, так и в систему ограничений задачи. При этом, перебирая различные значения ξ_i, можно получать различные точки области Парето. Одним из первых результатов в этой области является функция С. Карлина [4]

$$\Gamma(x,\xi) = \sum_{i=1}^{r} \xi_i g_i(x),\ \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^{r} \xi_i = 1. \tag{3}$$

Данная свертка применима, когда X выпукло и $\{g_1(x),\ldots,g_r(x)\}$ — выпуклые вниз функции. Недостатком ее является отсутствие взаимно однозначного соответствия между множеством значений вектора параметров ξ и точками области Парето. Одной и той же эффективной точке может соответствовать бесконечное множество векторов ξ, а для линейных критериев — и наоборот.

В общем случае область Парето можно определить, используя функцию Ю. Б. Гермейера [5]

$$\Gamma(x,\xi) = \max_i \xi_i g_i(x), \xi_i > 0, \sum_{i=1}^{r} \xi_i = 1. \tag{4}$$

Недостатком приведенной свертки является недифференцируемость, что затрудняет ее минимизацию.

Рядом авторов исследовано семейство функций вида [6]

$$\Gamma_\beta(x,\xi)=\left[\sum_{i=1}^{r}\left(\xi_i g_i(x)\right)^\beta\right]^{\frac{1}{\beta}},\ \beta\ge 1,\ \xi_i\ge\delta>0,\ \sum_{i=1}^{r}\xi_i=1, \tag{5}$$

где $\delta = (\min_i g_i(x) / \max_i g_i(x)) / r$. Данное семейство является сглаживанием гермейеровского и практически настолько же универсально. Недостаток такой свертки связан с необходимостью применения методов нелинейного программирования.

Известны также методы определения множества эффективных решений, основанные на вводе вектора параметров ξ в систему ограничений и использовании семейства функций вида [7]

$$\Gamma_j(x,\xi)=g_j(x),\ g_j(x)\le\xi_i,\ (i\ne j)\wedge\left(i\in[1,...,r]\right). \tag{6}$$

или функции вида [8]

$$\Gamma(x,\xi)=\sum_{i=1}^{r}g_i(x),\ g_i(x)\le\xi_i,\ i\in[1,...,r]. \tag{7}$$

Общим недостатком всех приведенных методов определения эффективных решений является необходимость перебора множества значений вектора параметров ξ. Для больших r задание множества значений ξ само является отдельной задачей. Кроме того, к недостаткам следует отнести невозможность наглядного представления множества эффективных решений, если векторный критерий содержит более двух компонент.

В целом строгие алгоритмы определения множества эффективных решений в настоящее время разработаны только для многокритериальных задач линейного программирования. Эти алгоритмы основываются на понятиях эффективных ребер и эффективных базисных решений или использовании методов целочисленного программирования.

Цель настоящего исследования заключается в разработке метода перечисления множества эффективных решений, позволяющего в наглядном графическом виде представлять параметризованные подмножества эффективных решений в плоскости двух параметров.

Прежде чем сформулировать идею и теоретические основы метода, докажем некоторые ранее сформулированные [9] свойства множества эффективных решений.

Определение 1. Эффективной базой системы функций $\{g_1(x),\ldots$ $\ldots g_r(x)\}$ называется минимальная подсистема этой системы $\{g_j(x)\}$, $j \in J$, такая, что $g_i(x) = \mu_i(\{g_j(x)\})$, $j \in J$, $\forall_i$, где $\mu_i(\bullet)$ — строго монотонно возрастающие функции.

ТЕОРЕМА 1. Частичные порядки, порождаемые на X системой функций $\{g_1(x),\ldots,g_r(x)\}$ и ее эффективной базой, совпадают.

Доказательство. Пусть $x^0, x^* \in X$ и $x^0 \prec x^*$ относительно системы функций $\{g_1(x),\ldots,g_r(x)\}$. Из определения частичного порядка $\prec$ следует, что хотя бы для одного i имеет место $g_i(x^0) < g_i(x^*)$ или $\mu_i(\{g_j(x^0)\}) < \mu_i(\{g_j(x^*)\})$. В силу строгой монотонности $\mu_i(\bullet)$ это влечет $g_j(x^0) < g_j(x^*)$ хотя бы для одного $j \in J$. Следовательно, по определению частичного порядка, $x^0 \prec x^*$ относительно системы функций $\{g_j(x)\}$, $j \in J$. Обратное утверждение доказывается аналогично.

Следствие. Если эффективные базы двух систем функций (возможно, имеющих различную мощность) совпадают с точностью до строго монотонного преобразования, совпадают и множества решений, эффективных относительно этих систем функций.

В терминах теории игр теореме 1 соответствует утверждение, что множество эффективных стратегий определяется только сторонами, имеющими независимые стратегии. При этом следствие вытекает из теоремы Ю. Б. Гермейера о неизменности результатов сравнения эффективности стратегий при любом монотонном преобразовании критерия эффективности [5].

На основании теоремы 1, при параметризации и перечислении множества эффективных решений задачи векторной оптимизации, можно заменять исходную систему функций другой, более удобной для практических расчетов.

Необходимой и важной характеристикой области Парето являются эффективные решения, соответствующие экстремальным значениям функций $\{g_1(x),\ldots,g_r(x)\}$, определяющие наилучшие и наихудшие варианты решения задачи векторной оптимизации с точки зрения каждого отдельного критерия.

ТЕОРЕМА 2. Если X^0 — множество эффективных решений относительно системы минимизируемых функций $\{g_1(x),\ldots,g_r(x)\}$, определенных на множестве $X \subset R^n$, и $x^i_\alpha \in \arg\min_{x \in X} \{\, g(x) \,/\, g_i(x)=\alpha \,\}$,

$\forall i$, где $g(x) = \sum_{i=1} g_i(x)$, то для любой функции $g_i(x)$, $i \in [1, r]$, справедливо

$$\min_{x \in X^0} g_i(x) = \min_{x \in X} g_i(x), \tag{8}$$

$$\max_{x \in X^0} g_i(x) = \max_{\alpha} \left\{ g_i(x_\alpha^i) / g(x_\alpha^i) = \min_{x \in X} \left\{ g(x) / g_k(x) \le g_k(x_\alpha^i), \forall k \right\} \right\}. \tag{9}$$

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим (8). Пусть min $g_i(x)$ по $x \in X$ определяет точку x^1 такую, что $x^1 \notin X^0$. Тогда из определения частичного порядка $\prec$ следует, что для точки x^1 можно указать некоторую точку $x^0 \in X^0$ такую, что $g_k(x^0) \le g_k(x^1)$, $\forall_k$ и $g_i(x^0) = g_i(x^1)$. Отсюда справедливо (8). Утверждение (9) очевидно следует из определения условия эффективности решения x_α^i, записанного в виде

$$g(x_\alpha^i) = \min_{x \in X} \left\{ g(x) / g_k(x) \le g_k(x_\alpha^i), \forall k \right\}. \tag{10}$$

Для иллюстрации основных идей предлагаемого метода отображения множества эффективных решений в плоскость двух параметров рассмотрим следующую задачу векторной оптимизации:

$$\begin{aligned} &\left\{ g_1(x_1) = 1{,}5x_1 \right\} \to \min_{x_1}, \\ &\left\{ g_2(x_2) = 4x_2 \right\} \to \min_{x_2}, \\ &\left\{ g_3(x_3) = 3x_3 \right\} \to \min_{x_3}, \\ &x_1 + x_2 + x_3 \ge 1, \\ &x_i \ge 0,\ i \in [1,3]. \end{aligned} \tag{11}$$

Рассмотрим множество эффективных решений задачи (10) в пространстве критериев $\{g_1(x_1), g_2(x_2), g_3(x_3)\}$. Очевидно, что множество эффективных решений определяется условием $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Отсюда, переходя от переменных x_i к функциям $g_i(x_i)$, можно записать условие эффективности в следующем виде: $\frac{2}{3} g_1(x_1) + \frac{1}{4} g_2(x_2) + \frac{1}{3} g_3(x_3) = 1$.

На рис. 1 множество точек, отвечающих данному условию, составляет заштрихованный треугольник ABC с вершинами (1,5; 0; 0), (0; 4; 0) и (0; 0; 3) в системе координат g_1, g_2, g_3.

Рассмотрим на множестве эффективных решений систему ограничений $g_i(x_i) \le \omega$, i $\in [1, 3]$, определяющую некоторую область $\Omega(\omega)$.

Очевидно, что минимально допустимой величине $\omega = \omega^{min}$, при которой система еще совместна, соответствует единственная точка, определяющая минимальные равные значения всех критериев задачи. При увеличении ω от ω^{min} до некоторой величины ω^{max}, при которой все ограничения рассматриваемой системы становятся несущественными, допустимая область $\Omega(\omega)$ расширяется и множество точек $X^0(\omega)$, принадлежащих ее границе, непрерывно пробегает все множество эффективных решений. Следовательно, определяя границу области $\Omega(\omega)$ для ряда значений ω из интервала $[\omega^{min},\omega^{max}]$, можно с требуемой дискретностью перечислять все множество эффективных решений задачи.

Основная идея метода состоит в разбиении множества эффективных решений X^0 на r подмножеств по числу компонент векторного критерия — $X_1^0,\dots, X_r^0$, таких, что для всех $\omega \in [\omega^{min},\omega^{max}]$ часть границы области $\Omega(\omega)$, принадлежащая множеству X_k^0, представляет собой множество точек $X_k^0(\omega)$, определяемое условиями $g_k(x_k) = \omega$ и $g_i(x_i) \le \omega$, $\forall i \ne k$. При этом $X_k^0 = \cup X_k^0(\omega)$, $k \in [1, 3]$, где $X_k^0(\omega) = \{x^0 : g_k(x_k^0) = \omega, g_i(x_i) \le \omega, \forall i \ne k, x^0 \in X^0\}$. Таким образом, задача пере-

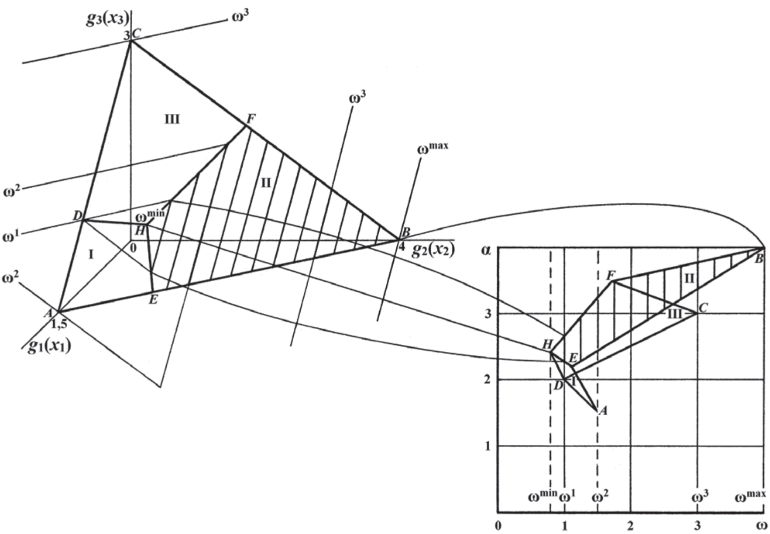

Рис. 1. Отображение множества эффективных решений в плоскость $\omega \times \alpha$.

числения границы области $\Omega(\omega)$ сводится к задаче перечисления точек множеств $X_k^0(\omega)$, $k \in [1, 3]$.

Поставим в соответствие каждой точке $x \in X$ величины $\alpha = g_1(x_1) + g_2(x_2) + g_3(x_3)$ и $\omega = \max\,(g_1(x_1), g_2(x_2), g_3(x_3))$. Тогда для каждой точки $x^0 \in X_k^0$ можно определить соответствующие ей значения α^0 и ω^0 и, следовательно, соответствующую точку в плоскости параметров $\omega \times \alpha$. Отобразим в плоскость $\omega \times \alpha$ точки множеств $X_k^0(\omega)$, соответствующие минимальным и максимальным значениям α, для некоторого набора значений $\omega \in [\omega^{\min}, \omega^{\max}]$. Соединив полученные точки для каждого множества X_k^0, получим его образ в плоскости параметров $\omega \times \alpha$. Заметим, что образы различных множеств всегда будут частично перекрываться. На рис. 1 показан пример построения образов множеств X_1^0, X_2^0, X_3^0 в плоскости параметров $\omega \times \alpha$ для приведенной выше задачи. Образ множества X_2^0 заштрихован.

Рассмотрим применение изложенного метода для задачи (1). Ранее мы определили $\omega^{\min}$ как минимальную равную величину значений всех критериев, определяющую строго компромиссное решение задачи векторной оптимизации. Очевидно, что, с одной стороны, требование равенства значений всех функций $\{g_1(x), \dots, g_r(x)\}$ не является достаточным условием эффективности, и, с другой стороны, не всегда существует принадлежащая области допустимых решений точка, в которой все функции принимают равные значения. Поэтому в общем случае вместо строго компромиссного решения при определении $\omega^{\min}$ необходимо рассматривать строго компромиссное эффективное решение.

Определение 2. Решение $\hat{x} \in X$ называется строго компромиссным эффективным относительно системы функций $\{g_1(x), \dots, g_r(x)\}$, если для любого $x \in X$ и любого $k \in [1, r]$, таких, что $g_k(x) < g_k(\hat{x})$, найдется такое $i \in [1, r]$, что $g_i(x) > \max\,(g_k(x), g_i(\hat{x}))$.

Как следует из определения 2, строго компромиссное эффективное решение обладает тем свойством, что при улучшении в нем значения какого-либо критерия хотя бы один из остальных критериев ухудшает свое значение до величины, превосходящей значение улучшаемого критерия.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функции $\{g_1(x), \dots, g_r(x)\}$ непрерывны и определяемое ими множество эффективных решений X^0 ограничено и замкнуто, тогда существует $\hat{x} \in X^0$, являющееся строго компромиссным эффективным решением.

Доказательство. Определим

$$\tilde{\omega}_1 = \min_{x \in X}\left\{\omega / g_k\left(x\right) \le \omega, \forall k\right\}. \quad (12)$$

Пусть $\tilde{\omega}^1$ достигается в точке $\hat{x}^1$ и H^1 — множество индексов максимальной подсистемы функций $\{g_1(x),\ldots,g_r(x)\}$, для которой существует точка $x^0 \in X$ такая, что $\max\limits_{k\in H} g_k(x^0) < \max\limits_{k\in H} g_k(\hat{x}^1)$ и $g_i(x^0)=g_i(\hat{x}^1)$, $\forall i \notin H^1$.

Если множество H^1 пусто, то точка $\hat{x}^1$ удовлетворяет определению 2. В противном случае определим

$$\tilde{\omega}_2 = \min_{x \in X}\left\{\omega / g_k\left(x\right) \le \omega, \forall k \in H^1, g_i\left(x\right) = g_i\left(\hat{x}^1\right), \forall i \notin H^1\right\}. \quad (13)$$

Аналогично вышеизложенному, определим точку $\hat{x}^2$ и множество индексов H^2. Если множество H^2 пусто, то точка $\hat{x}^2$ удовлетворяет определению 2. В противном случае определим $\hat{x}^2$ и H^2 и т. д. Так как множество функций $\{g_1(x),\ldots,g_r(x)\}$ конечно, то очевидно, найдется $m \in [1, r]$ такое, что H^m пусто. Следовательно, точка $\hat{x}^m$ является строго компромиссным эффективным решением, что доказывает теорему.

Введем обозначения

$$\omega_i^{\min} = g_i\left(\hat{x}\right), \forall i,$$
$$\omega_i^{\max} = \max_{x \in X^0} g_i\left(x\right), \forall i,$$
$$\omega^{\min} = \min_i \omega_i^{min},$$
$$\omega^{\max} = \max_i \omega_i^{max}, \quad (14)$$
$$\breve{g}_i\left(\omega\right) = \begin{cases} \omega, \text{при} & \omega \in \left[\omega_i^{\min}, \omega^{\max}\right], \forall i \\ \omega_i^{\min}, \text{при} & \omega \in \left[\omega^{\min}, \omega_i^{\min}\right] \forall i \end{cases}$$
$$X_k^0\left(\omega\right) = \left\{x^0 : g_k\left(x^0\right) = \omega, g_i\left(x^0\right) \le \breve{g}_i\left(\omega\right), \forall i \ne k, x^0 \in X^0\right\}, \omega \in \left[\omega_k^{\min}, \omega_k^{\max}\right], \forall k$$

и докажем следующую теорему о разбиении множества эффективных решений X^0 на подмножества $X_k^0(\omega)$ по числу компонент векторного критерия.

ТЕОРЕМА 4. $X^0 = \bigcup\limits_{k,\omega} X_k^0\left(\omega\right)$.

Доказательство. Пусть $x^0 \in X^0$. Рассмотрим k^1 такое, что $g_k{}^1(x^0) \in \arg\max\limits_k (g_k(x^0))$.

Из определения 2 следует, что $g_k^1(x^0) \geq \omega_k^{1\min}$. Если $g_k^1(x^0) > \omega_k^{1\min}$, то из определения множеств $X_k^0(\omega)$ следует, что $x^0 \in X_{k^1}^0(g_{k^1}(x^0))$. В противном случае рассмотрим k^2 такое, что $g_{k^2}(x^0) \in \arg\max_{k \neq k^1} g_k(x^0)$.

Аналогично предыдущему имеем: либо $x^0 \in X_{k^2}^0(g_{k^2}(x^0))$, либо $g_{k^2}(x^0) = \omega_k^{2\min}$ и так далее, для любого k^m, $m \in [1, r]$ либо $x^0 \in X_{k^m}^0(g_{k^m}(x^0))$, либо $g_{k^m}(x^0) = \omega_k^{m\min}$. При этом, если для k^r имеет место $g_k^r(x^0) = \omega_k^{r\min}$, то решение x^0 является строго компромиссным эффективным решением и $x^0 \in X_{k^m}^0(g_{k^m}(x^0))$, $\forall k,m$. Таким образом, существует хотя бы одно $m \in [1, r]$ такое, что $x^0 \in X_{k^m}^0(g_{k^m}(x^0))$. Теорема доказана.

Для отображения множеств $X_k^0(\omega)$ в плоскость параметров $\omega \times \alpha$, где $\omega = \max_i g_i(x)$ и $\alpha = g(x)$, необходимо определить точки множеств $X_k^0(\omega)$, соответствующие минимальным и максимальным значениям параметра α при фиксированных значениях параметра ω. Обозначим минимальное и максимальное значения параметра α на множестве $X_k^0(\omega)$ через $\alpha_k^{\min}(\omega)$ и $\alpha_k^{\max}(\omega)$ соответственно. Из теоремы 2 и условия эффективности (10) имеем следующие очевидные соотношения:

$$\alpha_k^{\min}(\omega) = \min_{x \in X}\left\{g(x) \,/\, g_k(x) = \omega,\ g_i(x) \leq \breve{g}_i(\omega), \forall i \neq k\right\}, \tag{15}$$

$$\alpha_k^{\max}(\omega) = \max_{\alpha}\left\{\Gamma_k(x, \omega, \alpha)\right\}, \tag{16}$$

где

$$\Gamma_k(x, \omega, \alpha) = \left\{\min_{x \in X} g(x) \,/\, g(x) \geq \alpha, g_k(x) = \omega, g_i(x) \leq \breve{g}_i(\omega), \forall i \neq k\right\}. \tag{17}$$

ТЕОРЕМА 5. $X_k^0(\omega) = \bigcup_{\alpha} \arg_x \Gamma_k(x, \omega, \alpha),\ \omega \in \left[\omega_k^{\min}, \omega_k^{\max}\right]$.

<u>Доказательство.</u> Каждой точке x^0 множества $X_k^0(\omega)$ можно поставить в соответствие единственное значение $\alpha^0 = g(x^0)$ такое, что $x^0 \in \arg \Gamma_k(x, \omega, \alpha^0)$ по $x \in X$. И, наоборот, из определения свойств множеств $X_k^0(\omega)$ и первого утверждения теоремы 2 следует, что для каждого $\alpha^0 \in [\alpha_k^{\min}(\omega), \alpha_k^{\max}(\omega)]$ значение функции $\Gamma_k(x, \omega, \alpha^0)$ достигается на множестве $X_k^0(\omega)$ и для каждого $x^0 \in \arg \Gamma_k(x, \omega, \alpha^0)$ по $x \in X$ имеет место $g(x^0) = \alpha^0$. Таким образом, левая и правая части утверждения теоремы взаимно однозначно определяют одно и то же множество точек. Теорема доказана.

Определив значения функции $\Gamma_k(x, \omega, \alpha)$ для некоторого набора значений α из интервала $[\alpha_k^{\min}(\omega), \alpha_k^{\max}(\omega)]$, можно с требуемой дискретностью перечислить каждое множество $X_k^0(\omega)$. Заметим, что отображения множеств $X_k^0(\omega)$ в плоскость параметров $\omega \times \alpha$ не являются взаимно однозначными.

Используя семейство функций $\Gamma_k(x,\omega,\alpha)$, $k \in [1, r]$, можно представить множество эффективных решений X^0 в виде r множеств X_k^0, параметризованных по двум параметрам — ω и α. При этом поскольку все точки множеств X_k^0 определяются из решений задач параметрического программирования, то при монотонном изменении ω и α монотонно изменяются все функции $\{g_1(x),\ldots,g_r(x)\}$. Это позволяет, с одной стороны, строить графические отображения X_k^0 на основании небольшого числа точек, и, с другой стороны, облегчает неформальный анализ точек области Парето лицу, принимающему решения. Если $\{g_1(x),\ldots,g_r(x)\}$ строго монотонные функции от x, то согласно следствию теоремы 1, их можно заменить линейными функциями с тем же характером монотонности и использовать для нахождения множеств X_k^0 методы линейного параметрического программирования.

Для применения описанного метода не требуется, чтобы все критерии $\{g_1(x),\ldots,g_r(x)\}$ имели одинаковую размерность. Вместе с тем, в противном случае параметры ω и α не имеют четкой смысловой интерпретации и менее информативны для ЛПР. Поэтому если критерии имеют различную размерность, целесообразно нормализовать их к единому безразмерному масштабу измерения используя монотонное преобразование

$$\overline{g}_k(x) = \frac{g_k(x) - g_k^{\min}}{g_k^{\max} - g_k^{\min}}, \forall k, \tag{18}$$

где $g_k^{\min}$ и $g_k^{\max}$ — соответственно наименьшее и наибольшее значения функций $g_k(x)$ на множестве эффективных решений X^0.

Нормализованные критерии $\{\overline{g}_1(x),\ldots, \overline{g}_r(x)\}$ принимают значения в интервале [0, 1] и характеризуют относительные потери соответствующих исходных критериев. При этом параметр ω определяет максимальную величину относительных потерь для отдельных критериев, а параметр α — максимальную величину суммарных относительных потерь по всем критериям.

Направлением дальнейших исследований в данной области является применение полученных теоретических результатов для разработки методов практического решения задач векторной оптимизации водоохранных мероприятий.

1. Сухоруков Г. А. Прогноз и оптимизация интенсивности водоохранных мероприятий с учетом нескольких критериев оптимальности. В кн.: Проблемы охраны вод / Г. А. Сухоруков, С. А. Цыбульник. — Харьков, 1977. — Вып. 8. — С. 137-145.
2. Нейман фон Дж. Теория игр и экономическое поведение / Нейман фон Дж., Моргенштерн О. — М.: Наука, 1970. — 708 с.
3. Волкович В. Л. Многокритериальные задачи и методы их решения / В. Л. Волкович : В кн.: Кибернетика и вычислительная техника. — К.: Наук. думка, 1969. — Вып. 1. — С. 44-52.
4. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике / С. Карлин. — М. : Мир, 1964. — 839 с.
5. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций / Ю. Б. Гермейер. — М. : Наука, 1971. — 384 с.
6. Меркурьев В. В. Семейство сверток векторного критерия для нахождения точек множества Парето / В. В. Меркурьев, М. А. Молдавский // Автоматика и телемеханика, 1979. — № 1. — С. 110-121.
7. Гуткин Л. С. О применении метода крайних точек при синтезе систем по векторному критерию / Л. С. Гуткин // Техническая кибернетика, 1973. — № 4, с. 178-183 ; № 5, с. 138-144.
8. Метревели Д. Г. Необходимые и достаточные условия эффективности в задачах векторной оптимизации / Д. Г. Метревели // Сообщения АН Грузинской ССР. — Т. 83. — № 3. — С. 585-588.
9. Цыбульник С. А. Параметризация множества эффективных решений / С. А. Цыбульник // Тезисы докл. Всесоюз. семинара по оптимизации и ее приложениям (г. Душанбе, 25-31 октября 1986 г.). — Душанбе, 1986. — С. 216-217.

Цибульник С. А. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПАРАМЕТРИЗАЦІЇ, ПЕРЕРАХУВАННЯ ТА НАОЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ МНОЖИНИ ЕФЕКТИВНИХ РОЗВ'ЯЗАНЬ ЗАДАЧІ ВЕКТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Визначено деякі характерні властивості множини ефективних розв'язань задачі векторної оптимізації та доведені теореми їхнього існування. Запропоновано метод наочного графічного відображення множини ефективних розв'язань у простір двох параметрів.

Ключові слова: *математична модель, векторна оптимізація, водоохоронні заходи, множина ефективних розв'язань.*

Tsybulnyk S. A. THEORETICAL FOUNDATIONS PARAMETERIZATION, LISTINGS AND VISUALIZE THE SET OF EFFICIENT SOLUTIONS OF VECTOR OPTIMIZATION

Some characteristic properties of the set of efficient solutions for vector optimization problems and theorems of their existence. A method is proposed intuitive graphical display multiple effective solutions in the space of two parameters.

***Key words:** mathematical model, vector optimization, water protection measures, set of efficient solutions.*