УДК 517.911

Т.А. Комлева, канд. физ-мат. наук, доц.,
А.В. Плотников, д-р. физ-мат. наук, проф.,
Одес. гос. акад. стр-ва и архитектуры,
Л.И. Плотникова, канд. физ-мат. наук, доц.,
Одес. нац. политехн. ун-т

НЕЧЕТКИЕ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Т.О. Комлєва, А.В. Плотніков, Л.І. Плотнікова. **Нечіткі квазідиференціальні рівняння.** Вводиться поняття нечіткого квазідиференціального рівняння, доводяться теореми існування його розв’язань та деякі їх властивості.

Т.А. Комлева, А.В. Плотников, Л.И. Плотникова. **Нечеткие квазидифференциальные уравнения**. Вводится понятие нечеткого квазидифференциального уравнения и доказываются теоеремы существования решений и их некоторые свойства.

T.A. Komleva, A.V. Plotnikov, L.I. Plotnikova. **Fuzzy quasidifferential equations.** The concept of the fuzzy quasidifferential equations is introduced. The existence of theorems for their solutions and some of their properties are proved.

Понятие нечеткого дифференциального уравнения было введено O. Kaleva в 1987 году. В работе [1] ним была доказана теорема существования и единственности решения такого типа уравнений. В дальнейшем в работах [2...6] были получены другие свойства нечетких дифференциальных уравнений и их решений. Для определения нечеткой производной O. Kaleva использовал подход M.L. Puri и D.A. Rulescu [7] H-дифференцируемости нечетких отображений, который, в свою очередь, основан на идее M. Hukuhara [8] дифференцируемости многозначных отображений. В связи с этим подход O. Kaleva перенял все те недостатки, которые свойственны дифференциальным уравнениям с производной Хукухары.

В 1990 году J.P. Aubin [9] и V.A. Baidosov [10, 11] ввели в рассмотрение нечеткие дифференциальные включения. Их подход к разрешению таких уравнений основан на сведении последних к обычным дифференциальным включениям. В дальнейшем нечеткие включения были рассмотрены в работах [12...15].

Здесь, аналогично тому, как это было сделано в теории дифференциальных уравнений с многозначной правой частью [16], вводится понятие нечеткого квазидифференциального уравнения. Это дает возможность с одной стороны, избежать тех сложностей, которые возникают при решении нечетких дифференциальных уравнений и включений, а с другой — получить некоторые их свойства более доступными (менее громоздкими) методами. Для нечетких квазидифференциальных уравнений в статье доказаны теоремы существования и единственности решения и некоторые их свойства.

Пусть $\mathrm{Conv}(R^n)$ — пространство непустых выпуклых компактных подмножеств R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(F,G) = \max\left\{ \sup_{f\in F}\inf_{g\in G}\|f-g\| \ , \ \sup_{g\in G}\inf_{f\in F}\|f-g\| \right\} \ ,$$

где под $\|\cdot\|$ понимается евклидова норма в пространстве R^n.

Введем в рассмотрение пространство E^n отображений $u: R^n \to [0,1]$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. u — полунепрерывно сверху, т.е. для любого $y' \in R^n$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(y',\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $\|y - y'\| < \delta$ выполняется условие $u(y) < u(y') + \varepsilon$;

2. u — нормально, т.е. существует вектор $y_0 \in R^n$ такое, что $u(y_0) = 1$;

3. u — нечетко выпукло, т.е. для любых $y', y'' \in R^n$ и любого $\lambda \in [0,1]$ справедливо неравенство $u(\lambda y' + (1-\lambda)y'') \geq \min\{u(y')\ ,\ u(y'')\}$;

4. Замыкание множества $\{y \in R^n \mid u(y) > 0\}$ компактно.

Нулем в пространстве E^n является элемент $\theta(y) = \begin{cases} 1, & y = 0 \\ 0, & y \in R^n \setminus 0 \end{cases}$.

Определение 1. α-срезкой $[u]^\alpha$ отображения $u \in E^n$ при $0 < \alpha \leq 1$ назовем множество $\{y \in R^n \mid u(y) \geq \alpha\}$. Нулевой срезкой отображения $u \in E^n$ назовем замыкание множества $\{y \in R^n \mid u(y) > 0\}$.

Определим в пространстве E^n метрику $D : E^n \times E^n \to [0, +\infty)$, полагая

$$D(u,v) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} h([u]^\alpha,\ [v]^\alpha)\ .$$

Определение 2. Отображение $f : [0,T] \to E^n$ называется слабо непрерывным в точке $t_0 \in (0,T)$, если для любого фиксированного $\alpha \in [0,1]$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon,\alpha) > 0$ такое, что $h(f_\alpha(t), f_\alpha(t_0)) < \varepsilon$ для всех $t \in [0,T]$ таких, что $|t - t_0| < \delta(\varepsilon,\alpha)$.

Определение 3. Будем говорить, что отображение $\varphi : [0,\sigma) \times [0,T] \times E^n \to E^n$ задает локальное квазидвижение, если выполнены следующие условия:

1) аксиома начальных условий: $\varphi(0,t,x) = x$;

2) аксиома квазиприпасовывания:

$$D(\varphi(h,0,x_0), \quad \varphi(h_m, t_{m-1}, x_{m-1})) = o(h),$$

где $h = \sum_{i=1}^{m} h_i, \quad h_i \geq 0, \quad t_i = \sum_{s=0}^{i} h_s, \quad x_i = \varphi(h_i, t_{i-1}, x_{i-1});$

3) аксиома непрерывности: отображение $\varphi(h,t,x)$ слабо непрерывно.

Аппроксимационное уравнение

$$D(x(t+h), \quad \varphi(h,t,x(t))) = o(h), \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

будем называть нечетким квазидифференциальным уравнением.

Определение 4. Непрерывное отображение $x : [0,T] \to E^n$, удовлетворяющее (1) будем называть решением нечеткого квазидифференциального уравнения.

Теорема 1. Пусть в области $Q\{\tau \geq 0, \quad 0 \leq t \leq \sigma, \quad E^n\}$ отображение $\varphi(\tau,t,x)$ удовлетворяет условиям определения 3, непрерывно и удовлетворяет условию Липшица по τ с постоянной λ. Тогда существует $\eta > 0$ такое, что на промежутке $[0,\eta)$ существует решение нечеткого квазидифференциального уравнения (1).

Доказательство. Зададим некоторое $r > 0$ и рассмотрим $S_r(x_0) = \{x \mid D(x,x_0) \leq r\}$. Пусть $\eta = \min\left\{\sigma_0, \frac{r}{\lambda}\right\}$. Разобьем отрезок $[0,\eta]$ на m частей точками $t_k = \frac{k\eta}{m}$ и определим нечеткую обобщенную ломаную Эйлера:

$$y^m(t) = \varphi(t - t_k, t_k, y(t_k)), \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = \overline{0, m-1}, \quad y^m(0) = x_0.$$

Очевидно, что $y^m(t) \in S_r(x_0), \quad D(y^m(t'), y^m(t'')) \leq \lambda |t' - t''|, \ t', t'' \in [0,\eta]$, т.е. семейство нечетких ломаных Эйлера равномерно ограниченно и равностепенно непрерывно. По теореме Асколи [14] из последовательности $\{y^m(t)\}$ можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся в метрике $D(\cdot,\cdot)$ к некоторому слабо непрерывному отображению $y(t)$.

Доказательство того, что отображение $y(t)$ удовлетворяет уравнению (1), проводится аналогично [16].

Теорема 2. Пусть в области Q отображение $\varphi(\tau, t, x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и условию

$$\left|D(x, y) - D(\varphi(\tau, t, x), \varphi(\tau, t, y))\right| \le \mu(\tau) D(x, y), \tag{2}$$

где $\lim\limits_{\tau\to 0}\dfrac{\mu(\tau)}{\tau} = \gamma, \quad \gamma > 0$.

Тогда решение нечеткого квазидифференциального уравнения (1) определяется однозначно.

Доказательство. Пусть $x(t)$ — решение нечеткого квазидифференциального уравнения (1). Предположим, что существует решение $y(t)$, отличное от $x(t)$.

Пусть $h(t) = D(x(t),\ y(t)), \quad h(0) = 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\left|h(t+\Delta) - h(t)\right| &= \left|D(x(t+\Delta), y(t+\Delta)) - D(x(t), y(t))\right| = \\ &= \left|D(\varphi(\Delta, t, x(t)), \varphi(\Delta, t, y(t))\right| \le \mu(\Delta) h(t) + o(\Delta).\end{aligned}$$

Далее, аналогично [16], получаем $h(t) = 0$ при $t \in [0, \eta)$.

Замечание 1. Если отображение $\varphi(\Delta, t, x)$ имеет вид

$$\varphi(\Delta, t, x) = x + \Delta \cdot f(t, x), \quad x(0) = x_0, \tag{3}$$

где $f : [0, T] \times E^n \to E^n$ слабо непрерывно по (t, x) и удовлетворяет условию Липшица по x с постоянной λ, то в этом случае $\varphi(\Delta, t, x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и нечеткое квазидифференциальное уравнение (1), (3) имеет единственное решение $x(t)$, совпадающее с единственным решением нечеткого дифференциального уравнения

$$x' = f(t, x), \quad x(0) = x_0,$$

которое рассматривалось в работах [1, 3...6].

Замечание 2. В случае, когда

$$[\varphi(\tau, t, x)]^\alpha = \bigcup_{z \in [x]^\alpha} (z + \tau \cdot [F(t, z)]^\alpha), \tag{4}$$

где отображение $F : [0, \eta] \times R^n \to E^n$ непрерывно по (t, z) и удовлетворяет условию Липшица по z, то непосредственно проверяется выполнение условий теоремы 2, тогда единственное решение нечеткого квазидифференциального уравнения (1), (4) совпадает с единственным нечетким *R*-решением нечеткого дифференциального включения

$$x' \in F(t, x), \quad x(0) = x_0,$$

которое рассматривалось в работах [9...15].

Теорема 3. Пусть в области *Q*, отображение $\varphi(\tau, t, x)$ удовлетворяет условиям определения 3, условию Липшица по Δ с постоянной λ и по x условию

$$\left|D(x, y) - D(\varphi(\Delta, t, x), \quad \varphi(\Delta, t, y))\right| \le \Delta \cdot \gamma \cdot D(x, y). \tag{5}$$

Тогда для решений $x(t)$ и $y(t)$ нечеткого квазидифференциального уравнения (1) справедлива следующая оценка

$$D(x(t), \quad y(t)) \le e^{\gamma t} \delta_0, \tag{6}$$

где $x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \delta_0 = D(x_0, y_0)$.

Доказательство. Разобьем промежуток $[0, T]$ на m частей. В моменты $t \in [t_k, t_{k+1}] \subset [0, T]$ оценка погрешности удовлетворяет условию:

$$D(x(t),\, y(t)) \le D(\varphi(t-t_k,\, t_k,\, x(t_k)),\, \varphi(t-t_k,\, t_k,\, y(t_k))) + o(\Delta) \le$$
$$\le (1+\Delta\gamma) D(x(t_k),\, y(t_k)) + o(\Delta) \le$$
$$\le (1+\Delta\gamma) D(\varphi(\Delta,\, t_{k-1},\, x(t_{k-1})),\, \varphi(\Delta,\, t_{k-1},\, y(t_{k-1}))) + (1+\Delta\gamma) o(\Delta) + o(\Delta) \le$$
$$\le (1+\Delta\gamma)^2 D(x(t_{k-1}), y(t_{k-1})) + o(\Delta)(1+\Delta\gamma) + o(\Delta).$$

Очевидно, что

$$D(x(t), y(t)) \le (1+\Delta\gamma)^{k+1}\delta_0 + [(1+\Delta\ \ \gamma)^k + \ldots + (1+\Delta\ \ \gamma)+1] o(\Delta) \le$$
$$\le \left(1+\frac{t}{m}\ \ \gamma\right)^m \delta_0 + \frac{(1+\Delta\gamma)^{k+1}-1}{\Delta\gamma} o(\Delta) \le e^{\gamma\, t}\delta_0 + \frac{o(\Delta)}{\Delta}. \tag{7}$$

Из (7) при $\Delta \to 0$ получаем (6). Теорема доказана.

Таким образом введены нечеткие квазидифференциальные уравнения, обобщающие рассмотренные ранее нечеткие дифференциальные уравнения и включения и дающие возможность исследовать из свойства.

Литература

1. Kaleva, O. Fuzzy differential equations / O. Kaleva // Fuzzy Sets and Systems. — 1987. — Vol. 24, № 3. — P. 301 — 317.
2. Комлева, Т.А. Усреднение нечетких дифференциальных уравнений / Т.А. Комлева, А.В. Плотников, Л.И. Плотникова // Тр. Одес. политех. ун-та. — Одесса, 2007. — Вып. 1(27). — С. 185 — 190.
3. Kaleva, O. The Peano theorem for fuzzy differential equations revisited / O. Kaleva // Fuzzy Sets and Systems. — 1998. — № 98. — P. 147 — 148.
4. Kaleva, O. O notes on fuzzy differential equations / O. Kaleva // Nonlinear Analysis. — 2006. — № 64. — P. 895 — 900.
5. Park, J.Y. Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations / J.Y. Park, H.K. Han // Internat. J. Math. and Math. Sci. — 1999. — Vol. 22, № 2. — P. 271 — 279.
6. Park, J.Y. Fuzzy differential equations / J.Y. Park, H.K. Han // Fuzzy Sets and Systems. — 2000. — № 110. — P. 69 — 77.
7. Puri, M.L. Differential of fuzzy functions / M.L. Puri, D.A. Ralescu // J. Math. Anal. Appl. — 1983. — № 91. — P. 552 — 558.
8. Hukuhara, M. Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe / M. Hukuhara // Func. Ekvacioj. — 1967. — № 10. — P. 205 — 223.
9. Aubin, J.P. Fuzzy differential inclusions / J.P. Aubin // Problems of Control and Information Theory. — 1990. — Vol.19, № 1. — P. 55 — 67.
10. Baidosov, V.A. Differential inclusions with fuzzy right-hand side / V.A. Baidosov // Soviet Mathematics. — 1990. — Vol. 40, № 3. — P. 567 — 569.
11. Baidosov, V.A. Fuzzy differential inclusions / V.A. Baidosov // J. of Appl. Math. and Mech. — 1990. — Vol. 54, № 1. — P. 8 — 13.
12. Hullermeir, E. An approach to modeling and simulation of uncertain dynamical systems / E. Hullermeir // Int. J. Uncertainty Fuzziness Knowledge Based Systems. — 1997. — № 5. — P. 117 — 137.
13. Lakshmikantham, V. Interconnection between set and fuzzy differential equations / V. Lakshmikantham, S. Leela, A.S. Vatsala // Nonlinear Analysis. — 2003. — № 54. — P. 351 — 360.
14. Lakshmikantham, V. Theory of set differential equations in metric spaces / V. Lakshmikantham, T. Granna Bhaskar, J. Vasundhara Devi — Cambridge Scientific Publishers, 2006. — 204 p.
15. Lakshmikantham, V. Existence and interrelation between set and fuzzy differential equations / V. Lakshmikantham, A.A. Tolstonogov // Nonlinear Analysis. — 2003. — № 55. — P. 255 — 268.
16. Панасюк, А.И. Квазидифференциальные уравнения в метрическом пространстве / А.И. Панасюк // Дифференциальные уравнения. — 1985. — Т. 21, № 8. — С. 1344 — 1353.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Усов А.В.

Поступила в редакцию 27 марта 2008 г.