УДК 517.926+517.956+517.95

А.В. Арсирий, магистр, Одес. нац. ун-т им. И.И. Мечникова

КОМПАКТНОСТЬ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ МНОГОЗНАЧНОЙ ТРАЕКТОРИЕЙ

А.В. Арсірій. **Компактність множини досяжності системи керування багатозначною траєкторією.** Розглядається задача оптимального керування системою, у якій стан описується багатозначним відображенням, а допустиме керування — це підсумовувана функція. Доводиться теорема про компактність множини досяжності цієї системи.

А.В. Арсирий. **Компактность множества достижимости системы управления многозначной траекторией.** Рассматривается задача оптимального управления, в которой состояние описывается многозначным отображением, а допустимое управление — суммируемая функция. Доказывается теорема о компактности множества достижимости такой системы.

A.V. Arsiry. **Compactness of the approachability set of the set-valued map control system.** The optimal control problem, in which the condition of the system is described by the set-valued map and admissible controls are summable functions, is considered. The theorem about compactness of the set of approachability for the given system is proved.

В теории многозначных отображений введена производная и интеграл от многозначных отображений и исследована их связь между собой [1], рассмотрены дифференциальные уравнения с производной Хукухары [2], введены различные определения решений этих уравнений и доказаны теоремы их существования [3], а также рассмотрена возможность применения схем усреднения для такого типа уравнений [4…6].

Уравнения с производной Хукухары были использованы при изучении некоторых свойств “интегральной воронки” дифференциального включения в Банаховом пространстве [7], а также при исследовании уравнений с нечеткими начальными условиями [8,9].

При решении задач управления, где состояние системы описывается многозначной траекторией, возникает вопрос о существовании оптимального управления. Для неоспоримости этого факта необходимо доказать, что множество достижимости рассматриваемой системы компактно.

Предлагается доказательство теоремы про компактность множества достижимости для системы управления многозначной траекторией. Система описывается линейным дифференциальным уравнением с производной Хукухары.

Из теории многозначных отображений известны некоторые необходимые в дальнейшем определения и обозначения.

Пусть $\mathrm{Comp}(R^n)$ — пространство непустых компактных, а $\mathrm{Conv}(R^n)$ — пространство непустых компактных и выпуклых подмножеств евклидового R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(A, B)=\min\{r\geq 0|\ A\subset S_r(B),\ B\subset S_r(A)\},$$

где $S_r(A)$, $S_r(B)$ — окрестности радиуса r множеств A и B, соответственно.

Определение 1. Пусть $A, B\in\mathrm{Conv}(R^n)$. Если существует множество $C\in\mathrm{Conv}(R^n)$ такое, что $A=B+C$, то C называется разностью Хукухары множеств A и B и обозначается $A \overset{h}{-} B$.

Определение 2. Многозначное отображение $F(\cdot){:}R^1\to\mathrm{Conv}(R^n)$ дифференцируемо по Хукухаре в точке $t\in R^1$, если существует $D_hF(t)\in\mathrm{Conv}(R^n)$ такое, что пределы

$$\lim_{\Delta t \to 0+} \frac{1}{\Delta t}(F(t+\Delta t) \stackrel{h}{-} F(t)),$$
$$\lim_{\Delta t \to 0+} \frac{1}{\Delta t}(F(t) \stackrel{h}{-} F(t-\Delta t))$$

существуют и равны $D_h F(t)$.

Пусть система описывается линейным дифференциальным уравнением с производной Хукухары в стандартной форме

$$D_h X(t) = \mathbf{A}(t)X(t) + u(t) + F(t), \quad X(0) = X^0, \tag{1}$$

где $t \in [0, T]$, $T = L\varepsilon^{-1}$,

t — момент времени,

$L > 0$ — постоянная;

$X(\cdot):[0, T] \to \mathrm{Conv}(R^n)$ — многозначное отображение, определяющее состояние системы;

X^0 — начальное множество;

$\mathbf{A}(t)$ — матрица размерности $n \times n$;

$F(\cdot):[0, T] \to \mathrm{Conv}(R^n)$ — многозначное отображение, определяющее отклонение рассматриваемой системы;

$u(\cdot) \in U \in \mathrm{Conv}(R^n)$ — управляющее воздействие (далее управление).

Предположение 1. Предполагается, что система (1) удовлетворяет условиям

— матрица $\mathbf{A}(t)$ — измерима на $[0, T]$;

— существует константа $a > 0$ такая, что $\|\mathbf{A}(t)\| \le a$ для почти всех $t \in [0, T]$;

— многозначное отображение $F(\cdot)$ измеримо на $[0, T]$.

Определение 3. Множество суммируемых функций таких, что $u(t) \in U$ для почти всех $t \in [0, T]$, называется множеством допустимых управлений LU.

Определение 4. Решением задачи (1), соответствующим допустимому управлению $u(\cdot) \in LU$, называется абсолютно непрерывное многозначное отображение $X(\cdot, u(\cdot))$, удовлетворяющее (1) почти всюду на $[0, T]$ [3].

Определение 5. Множеством достижимости $Y(T)$ системы (1) в момент времени T называется множество всех множеств из пространства $\mathrm{Conv}(R^n)$, в которое можно перейти на промежутке времени $[0, T]$ из начального множества X^0 по решениям уравнения (1) при всех возможных управлениях $u(\cdot) \in LU$, т.е [3]

$$Y(T) = \{X(T, u(\cdot)) \mid u(\cdot) \in LU\}. \tag{2}$$

Наряду с задачей (1) рассмотрим присоединенную к ней задачу

$$X(t) = X^0 + \int_0^t [\mathbf{A}(s)X(s) + u(s) + F(s)]ds, \tag{3}$$

где интеграл понимается в смысле Хукухары [1].

Определение 6. Решением задачи (3), соответствующим допустимому управлению $u(\cdot) \in LU$, называется абсолютно непрерывное многозначное отображение $X(\cdot, u(\cdot))$, удовлетворяющее (3) всюду на $[0, T]$ [3].

Из дифференцируемости почти всюду интеграла с переменным верхним пределом следует, что любое решение задачи (3) является решением задачи (1) [2,3].

Для рассматриваемой системы управления многозначной траекторией можно доказать теорему о компактности множества достижимости.

Теорема 1. Множество достижимости $Y(T)$ системы управления многозначной траекторией (1) является непустой компактной частью пространства $\mathrm{Conv}(R^n)$.

Доказательство.

Доказательство замкнутости множества достижимости $Y(T)$.

Пусть последовательность множеств $\{X(T,u_k(\cdot))\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к некоторому $\overline{X}\in \mathrm{Conv}(R^n)$. Тогда по определению 5 множества достижимости Y(T) существует последовательность многозначных траекторий $\{X(\cdot,u_k(\cdot))\}_{k=1}^{\infty}$. Следовательно существует некоторая последовательность $\{u_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ допустимых управлений. По теореме Асколи-Арцела[12] из нее можно выделить подпоследовательность $\{u_{k_m}(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$, которая слабо сходится к некоторой функции $u_*(\cdot)$, и по теореме Мазура[12] $u_*(\cdot)\in LU$.

Далее доказывается, что $X(T,u_*(\cdot))=\overline{X}$ или $\lim\limits_{m\to\infty} h(X(T,u_{k_m}(\cdot)),X(T,u_*(\cdot)))=0$.

$X(T,u)$ может быть представлено в интегральной форме.

$$X(T,u)=X^0+\int_0^T[\mathbf{A}(s)X(s,u)+u(s)+F(s)]ds=X^0+\int_0^T\mathbf{A}(s)X(s,u)ds+\int_0^T u(s)ds+\int_0^T F(s)ds.$$

Тогда

$$h(X(T,u_{k_m}),X(T,u_*))=$$

$$=h(X^0+\int_0^T[\mathbf{A}(s)X(s,u_{k_m})+u_{k_m}(s)+F(s)]ds,X^0+\int_0^T[\mathbf{A}(s)X(s,u_*)+u_*(s)+F(s)]ds)\le$$

$$\le h(X^0+\int_0^T\mathbf{A}(s)X(s,u_{k_m})ds+\int_0^T u_{k_m}(s)ds+\int_0^T F(s)ds,X^0+\int_0^T\mathbf{A}(s)X(s,u_*)ds+\int_0^T u_*(s)ds+\int_0^T F(s)ds)\le$$

$$\le h(\int_0^T\mathbf{A}(s)X(s,u_{k_m})ds,\int_0^T\mathbf{A}(s)X(s,u_*)ds)+\|\int_0^T u_{k_m}(s)ds-\int_0^T u_*(s)ds\|\le$$

$$\le\int_0^T h(\mathbf{A}(s)X(s,u_{k_m}),\mathbf{A}(s)X(s,u_*))ds+\|\int_0^T u_{k_m}(s)ds-\int_0^T u_*(s)ds\|\le$$

$$\le\int_0^T\|\mathbf{A}(s)\|\,h(X(s,u_{k_m}),X(s,u_*))ds+\|\int_0^T u_{k_m}(s)ds-\int_0^T u_*(s)ds\|\le$$

$$\le a\int_0^T h(X(s,u_{k_m}),X(s,u_*))ds+\|\int_0^T u_{k_m}(s)ds-\int_0^T u_*(s)ds\|.$$

Итак

$$h(X(T,u_{k_m}),X(T,u_*))\le a\int_0^T h(X(s,u_{k_m}),X(s,u_*))ds+\|\int_0^T u_{k_m}(s)ds-\int_0^T u_*(s)ds\|.$$

На основании леммы Гронуллла-Беллмана[11]

$$h(X(T,u_{k_m}),X(T,u_*))\le\|\int_0^T u_{k_m}(s)ds-\int_0^T u_*(s)ds\|\,e^{aT}.$$

Так как последовательность $\{u_{k_m}(\cdot)\}$ слабо сходится к $u_*(\cdot)$, то

$$\lim_{k_m\to\infty}\|\int_0^T u_{k_m}(s)ds-\int_0^T u_*(s)ds\|=0.$$

Поэтому

$$\lim_{k_m\to\infty} h(X(s,u_{k_m}),X(s,u_k))=0.$$

Значит $X(T,u_*)=\overline{X}\in Y(T)$.

Замкнутость доказана.

Доказательство компактности множества достижимости $Y(T)$.

Через $\cup Y$ обозначается множество $\bigcup_{X \in Y(T)} X$. Очевидно, что $\cup Y \in \mathrm{Comp}(R^n)$. Через Z обозначается множество, элементами которого являются непустые компактные множества, входящие в $\cup Y$. Множество Z является компактным [10]. Так как $Y(T)$ является замкнутым подмножеством Z, то множество $Y(T)$ является компактным. Теорема доказана.

Доказанная теорема о компактности множества достижимости системы управления многозначной траекторией может быть использована при нахождении оптимального управления в задачах управления, где состояние системы описывается многозначными отображениями.

Литература

1. Hukuhara, M. Integration des applications mesurables don't la valeur est un compact convexe / M. Hukuhara // Func. Ekvacioj. — 1967. — № 10. — P. 205 — 223.
2. de Blasi, F.S. Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatoo convesso / F.S. de Blasi, F. Iervolino // Boll. Unione Mat. Ital. — 1969. —T.2, № 4 — 5. — P. 491 —501.
3. Brandao Lopes Pinto, A.J. Uniqueness and existence theorem for differential equations with compact convex values solutions / A.J. Brandao Lopes Pinto, F.S. de Blasi, F. Iervolino // Boll. U.M.I. — 1970. — № 4. — P. 543 — 538.
4. Kisielewicz, M. Description of a class of differential equations with set-valued solutions / M. Kisielewicz // Lindcei-Rend. Sc. fis. mat. e nat. — 1975. — Vol. 9 — P. 158 — 162.
5. Kisielewicz, M. Method of Averaging for Differential Equations with Compact Convex Valued Solutions / M. Kisielewicz // Rend. Math. — 1976. — Vol. 9, № 3. — P. 397 — 408.
6. Плотников, В.А. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы / В.А. Плотников, А.В. Плотников, А.Н. Витюк — Одесса: Астропринт, 1999. — 354 с.
7. Толстоногов, А.А. Дифференциальные включения в Банаховом пространстве / А.А. Толстоногов — Новосибирск: Наука, 1986. — 296 с.
8. Kaleva, O. Fuzzy differential equations / O. Kaleva // Fuzzy Sets and Systems. —1987. — Vol. 24, № 3. — P. 301 — 317.
9. Kaleva, O. The Cauchy problem for fuzzy differential equations / O. Kaleva // Fuzzy Sets and Systems. —1990. — Vol. 35. — P. 389 — 396.
10. Половинкин, Е.С. Теория многозначных отображений: Учеб. пособие / Е.С. Половинкин. — М.: Изд-во МФТИ, 1983. — 100 с.
11. Математическая теорія оптимальных процес сов / [Н.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, М.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко]. — М.: Наука, 1983. — 392 с.
12. Треногин, В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. — М.: Наука, 1980. — 496 с.

Рецензент д-р техн. наук Одес. нац. политехн. ун-та Антощук С.Г.

Поступила в редакцию 26 сентября 2008 года.