

УДК 62-752

В.А. Белоус, канд. техн. наук, Одес. нац. политехн. ун-т

ДИНАМИЧЕСКОЕ ГАШЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

В.О. Білоус. Динамічне гасіння коливань пластини на пружній основі. Запропоновано методику визначення параметрів пружно приєднаних мас для динамічного гасіння коливань пластини на пружній основі для її захисту від вібрацій.

В.А. Белоус. Динамическое гашение колебаний пластины на упругом основании. Предложена методика определения параметров упруго присоединенных масс для динамического гашения колебаний пластины на упругом основании для ее защиты от вибраций.

V.A. Belous. Dynamic dampening of elastic-foot plate's oscillations. The method of suggested to determine the parameters of elastically-attached masses for dynamic dampening of vibrations in an elastic-foot to protect it from the vibrations.

Идея динамического гашения колебаний — введение дополнительных масс, которые своими колебаниями на частоте внешнего возмущения гасят колебания находящегося под его действием объекта системы, — применяется в конструкциях самого различного типа при защите их от вибраций основания. Исследований по гашению колебаний в системах с распределенными параметрами сравнительно мало, при этом, как правило, расчетные схемы представляются в виде комбинаций подсистем с сосредоточенными параметрами, что не дает полного представления о формах колебаний [1].

Рассмотрим колебания прямоугольной пластины длиной b и шириной a , контактирующей всей своей поверхностью с упругим основанием и шарнирно опертой по продольным краям. Срединную плоскость пластины примем за координатную плоскость xu , а ось z направим по нормали к этой плоскости. Пусть движение основания при кинематическом возмущении осуществляется с частотой ω и амплитудой R , т.е. $w_k(t) = R \sin \omega t$. Разместим над пластиной достаточное число малых упруго присоединенных масс гасителей для того, чтобы их действие на нее можно было считать распределенным (рис. 1).

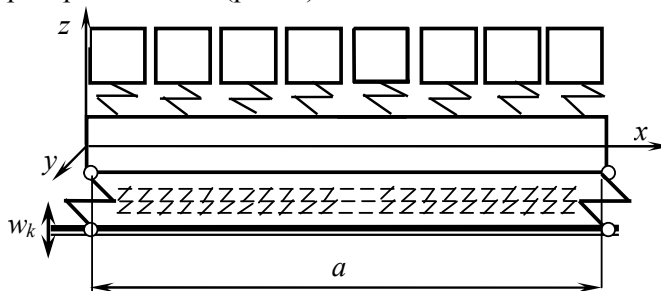


Рис. 1. Схема кинематического возмущения основания пластины с гасителями

В полученной колебательной системе можно рассматривать условный слой динамических гасителей, каждый элемент которого совершает независимые движения ортогонально срединной поверхности пластины. Изогнутую поверхность участка, достаточно удаленного от поперечных краев длинной пластины ($b \geq 3a$), при этом можно считать цилиндрической [2]. Тогда мысленно вырезав из пластины в направлении оси x элементарную полосу, последнюю можно рассматривать как балку длиной a на упругом основании.

Дифференциальные уравнения малых колебаний пластины около положения статического равновесия для прогибов w и перемещений слоя гасителей имеют вид w_0 [3]

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -c(w - w_k) - c_0(w - w_0), \quad m_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = -c_0(w_0 - w),$$

где $m = \rho h$;

$$m_0 = \rho_0 h_0;$$

ρ и ρ_0 — плотности материала пластины и слоя гасителей, соответственно;

h и h_0 — толщины пластины и слоя гасителей, соответственно;

c и c_0 — коэффициенты жесткости основания пластины и слоя гасителей, соответственно;

D — цилиндрическая жесткость пластины.

Изгибающий момент M и перерезывающая сила Q в сечении пластины, перпендикулярном оси x , определяются как [2]

$$M = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad Q = -D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}.$$

Тогда граничные условия на продольных краях пластины

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=0,a} = 0; \quad \left. \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right|_{x=0,a} = \pm CD^{-1} \cdot (w - w_k) \Big|_{x=0,a},$$

где C — погонная жесткость продольного края пластины.

Разделяя переменные по методу Фурье для установившегося режима колебаний, представим прогибы пластины и перемещения слоя гасителей в виде произведений двух функций

$$w(x, t) = W(x) \cdot \sin \omega t; \quad w_0(x, t) = W_0(x) \cdot \sin \omega t,$$

где $W(x)$ и $W_0(x)$ — амплитудные значения прогибов и перемещений, соответственно.

После подстановки их в дифференциальные уравнения колебаний

$$DW^{IV} + (c + c_0 - m\omega^2)W = c_0 W_0 + cR, \quad (c_0 - m\omega^2)W_0 = c_0 W.$$

Окончательно разрешающее уравнение колебаний пластины можно представить в виде

$$W^{IV} - \chi^4 W = R c D^{-1}, \quad (1)$$

где $\chi^4 = m D^{-1} \omega^2 \cdot \left(1 + \frac{m_0}{m} \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) - c D^{-1}$;

$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_0}{m_0}}$ — парциальная частота слоя гасителей.

Решение уравнения (1) удобно представить в функциях Крылова [3], образующих систему частных решений с единичной матрицей начальных граничных условий, которые принимается в виде

$$U_1(x) = 0,5(\operatorname{ch} \chi x + \cos \chi x); \quad U_2(x) = 0,5(\operatorname{sh} \chi x + \sin \chi x);$$

$$U_3(x) = 0,5(\operatorname{ch} \chi x - \cos \chi x); \quad U_4(x) = 0,5(\operatorname{sh} \chi x - \sin \chi x),$$

причем $U'_1 = \chi U_4$, $U'_2 = \chi U_1$, $U'_3 = \chi U_2$, $U'_4 = \chi U_3$.

Вводя в рассмотрение постоянные

$$A_1 = W(0); \quad A_2 = W'(0)\chi^{-1}; \quad A_3 = W''(0)\chi^{-2}; \quad A_4 = W'''(0)\chi^{-3}; \quad p = c D^{-1} \chi^{-4}; \quad P = C D^{-1} \chi^{-3},$$

можно представить общее решение уравнения (1) в виде

$$W(x) = A_1 U_1(x) + A_2 U_2(x) + A_3 U_3(x) + A_4 U_4(x) + pR [U_1(x) - 1].$$

Учитывая начальные граничные условия

$$W''(0) = 0; \quad W'''(0) = C D^{-1} \cdot [W(0) - R],$$

$$A_3 = 0, \quad A_4 = (A_1 - R)P.$$

В этом случае форма прогибов пластины имеет вид

$$W(x) = A_1 [U_1(x) + PU_4(x)] + A_2 U_2(x) + [pU_1(x) - p - PU_4(x)] \cdot R.$$

Учитывая конечные граничные условия

$$W''(a) = 0; \quad W'''(a) = -CD^{-1} \cdot [W(a) - R],$$

получим уравнения

$$A_1 [U_3(a) + PU_2(a)] + A_2 U_4(a) = [PU_2(a) - pU_3(a)]R;$$

$$A_1 [U_2(a) + 2PU_1(a) + P^2U_4(a)] + A_2 [U_3(a) + PU_2(a)] = \\ = \{(1 + p)P + (1 - p)PU_1(a) - pU_2(a) + P^2U_4(a)\}R,$$

после решения которых

$$A_1 = 0,5R \cdot [(1 - p)P (\operatorname{ch} \chi a \sin \chi a - \operatorname{sh} \chi a \cos \chi a) - (1 + p)P (\operatorname{sh} \chi a - \sin \chi a) - \\ - p(1 - \operatorname{ch} \chi a \cos \chi a) + 2P^2 \operatorname{sh} \chi a \sin \chi a] / A,$$

где $A = 0,5[(1 - \operatorname{ch} \chi a \cos \chi a) + 2P(\operatorname{ch} \chi a \sin \chi a - \operatorname{sh} \chi a \cos \chi a) + 2P^2 \operatorname{sh} \chi a \sin \chi a]$.

Введя в рассмотрение безразмерные параметры

$$\bar{\chi} = \chi a; \quad \bar{C} = CD^{-1}a^3; \quad \bar{c} = cD^{-1}a^4; \quad \bar{c}_0 = c_0D^{-1}a^4; \quad \bar{\omega}^2 = \omega^2mD^{-1}a^4; \quad \bar{m}_0 = m_0m^{-1},$$

тогда для безразмерной жесткости \bar{c}_0 гасителей с учетом выражения (1) имеем

$$\bar{c}_0 = \bar{m}_0 \bar{\omega}^2 \cdot \{1 - \bar{m}_0 [(\bar{\chi}^4 + \bar{c}) \bar{\omega}^{-2} - 1]^{-1}\}^{-1}. \quad (2)$$

Полное гашение вынужденных колебаний продольных краев пластины будет при условии $A_1 = 0$, что приводит к уравнению

$$\left[\frac{1 + \operatorname{ch} \bar{\chi}}{\operatorname{sh} \bar{\chi}} - \frac{1 + \cos \bar{\chi}}{\sin \bar{\chi}} \right] \cdot \bar{C} \bar{\chi}^4 + \left[\frac{1 - \operatorname{ch} \bar{\chi}}{\operatorname{sh} \bar{\chi}} - \frac{1 - \cos \bar{\chi}}{\sin \bar{\chi}} \right] \cdot \bar{c} \bar{C} - \frac{1 - \operatorname{ch} \bar{\chi} \cos \bar{\chi}}{\operatorname{sh} \bar{\chi} \sin \bar{\chi}} \cdot \bar{c} \bar{\chi}^3 + 2 \bar{C}^2 \bar{\chi} = 0. \quad (3)$$

Для заданных безразмерных жесткостей упругих опор \bar{C} и упругого основания \bar{c} из решения уравнения (3) можно найти параметр пластины $\bar{\chi}$. Далее, выбирая соотношение масс гасителей и пластины \bar{m}_0 , требуемая безразмерная жесткость гасителей \bar{c}_0 определяется по формуле (2) в зависимости от конкретной безразмерной частоты колебаний основания $\bar{\omega}$. Результаты соответствующих расчетов представлены графиками на рис. 2.

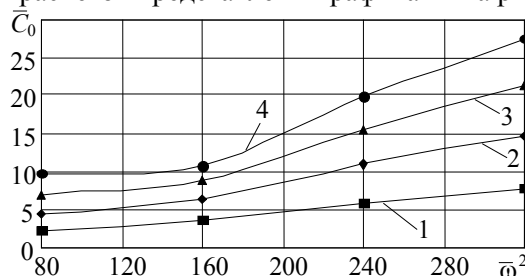


Рис. 2. Зависимость \bar{c}_0 от $\bar{\omega}^2$ для $\bar{C} = 100$ и $\bar{c} = 50$ ($\bar{\chi} = 2,959$)
при $\bar{m}_0 = 0,025$ (1), $0,050$ (2), $0,075$ (3), $0,100$ (4)

Таким образом, от оценки влияния малых масс гасителей на формы колебаний пластины зависит правильность расчета возникающих при изгибных колебаниях деформаций и напряжений в технических конструкциях. Приведенные графики можно использовать для настройки динамических масс гасителей, при которой продольные края пластины остаются неподвижны-

ми. При их наличии можно по заданной частоте кинематического возмущения при выбранной массе гасителей определять их соответствующие жесткости.

Литература

1. Карамышкин, В.В. Динамическое гашение колебаний / В.В. Карамышкин. — Л.: Машиностроение, 1988. — 108 с.
2. Тимошенко, С.П. Пластины и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. — М.: Наука, 1966. — 636 с.
3. Пановко, Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара / Я.Г. Пановко. — Л.: Политехника, 1990. — 272 с.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та оробей В.Ф.

Поступила в редакцию 9 декабря 2008 г.
