УДК 681.511.4:681.5.015.52

В.Д. Павленко, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., Одес. нац. политехн. ун-т,
Саид Ибрагим Мухаммад Исса, магистр, Одес. нац. морская акад.

ОГРАНИЧЕНИЯ ВЫБОРА ЧАСТОТ ТЕСТОВЫХ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

В.Д. Павленко, С.І.М. Ісса. **Обмеження вибору частот тестових полігармонічних сигналів для ідентифікації нелінійної системи.** Розроблено критерій вибору частот тестових полігармонічних сигналів, що дозволяє однозначно фільтрувати з парціальної складової відгуку нелінійної системи значення багатовимірних передаточних функцій — Фур'є-зображень ядер Вольтерра. Показано, що цей критерій значно послаблює відомі раніше обмеження на вибір частот.

В Д. Павленко, С.И.М. Исса. **Ограничения выбора частот тестовых полигармонических сигналов для идентификации нелинейной системы.** Разработан критерий выбора частот тестовых полигармонических сигналов, позволяющий однозначно фильтровать из парциальной составляющей отклика нелинейной системы значения многомерных передаточных функций — Фурье-изображений ядер Вольтерра. Показано, что этот критерий значительно ослабляет известные ограничения на выбор частот.

V.D. Pavlenko, S.I.M. Issa. **Limitations of the frequency choice of polyharmonic test signals for non–linear system identification.** A criterion for choosing a polyharmonic signals frequency band is developed. That allows the values of multidimensional transfer functions of Volterra–kernel Fourier-images to be unambiguously filtered out from the partial component of a nonlinear system response. It is shown that the criterion significantly liberalizes frequency selection.

Для моделирования сложных нелинейных динамических систем (НДС) широко используются интегростепенные ряды Вольтерра (РВ) [1]. Задача моделирования (идентификации) НДС в виде РВ во временной [2...4] или частотной [4...8] области заключается в определении на основе данных экспериментальных исследований "вход – выход" НДС многомерных весовых функций — ядер Вольтерра (ЯВ) или многомерных передаточных функций (ПФ) — Фурье-изображений ЯВ, соответственно для моделирования системы.

Известен метод непараметрической идентификации НДС в частотной области с использованием в качестве тестовых воздействий полигармонических сигналов [4]. При этом находятся многомерные амплитудно– и фазочастотные характеристики (АЧХ и ФЧХ) НДС. При определении многомерных АЧХ и ФЧХ необходимо накладывать определенные ограничения на выбор частот тестовых полигармонических сигналов, следовательно, значения ПФ на запрещенных участках могут быть получены только с помощью процедуры интерполяции. При реализации метода необходимо минимизировать число таких точек неопределенности на интервале определения многомерных ПФ, т.е. стремиться обеспечить минимум ограничений на выбор частот тестового сигнала.

В общем случае соотношение "вход – выход" для непрерывной НДС при нулевых начальных условиях может быть представлено в виде интегростепенного РВ [1]

$$y[x(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}y_n[x(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\dots\int w_n(\tau_1,\tau_2,...,\tau_n)\prod_{r=1}^{n}x(t-\tau_r)d\tau_r, \qquad (1)$$

где $x(t)$ и $y[x(t)]$ — соответственно входной и выходной сигналы НДС;

$w_n(\tau_1,\tau_2,...,\tau_n)$ — весовая функция, или ЯВ n-го порядка, симметричная относительно вещественных переменных $\tau_1, \tau_2,\dots,\tau_n$;

$y_n[x(t)]$ — n-я парциальная составляющая отклика НДС;

t — текущее время.

Построение модели НДС во временной или частотной области в виде РВ заключается в выборе вида тестовых воздействий $x(t)$ и разработке алгоритма, который позволял бы по измеренным выходным сигналам $y(t)$ выделять парциальные составляющие $y_n[x(t)]$ [9] и определять на основе их ЯВ $w_n(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ или их Фурье-изображения $W_n(j\omega_1,\ldots,j\omega_n)$.

Фурье-изображение ЯВ n-го порядка [2]

$$W_n(j\omega_1, j\omega_2, ..., j\omega_n) = F_n\left\langle w_n(t_1, t_2, ..., t_n)\right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int w_n(t_1, t_2, ..., t_n)\exp(-j\sum_{i=1}^{n}\omega_i t_i)\prod_{i=1}^{n} dt_i\ , \tag{2}$$

где $F_n\langle\ \rangle$ — n-мерное преобразование Фурье.

Модель НДС на основе РВ в частотной области можно представить в виде

$$y[x(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{-1}\left\langle W_n(j\omega_1, j\omega_2, ..., j\omega_n)\prod_{i=1}^{n} X(j\omega_i)\right\rangle_{t_1=t_2=...=t_n=t}\ , \tag{3}$$

где $F_n^{-1}\langle\ \rangle$ — обратное n-мерное преобразование Фурье;

$X(j\omega_i)$ — Фурье-изображение входного сигнала.

Идентификация НДС в частотной области сводится к определению на заданных частотах значений амплитуды и фазы многомерной ПФ — многомерных АЧХ и ФЧХ, которые представляют собой соответственно модуль и фазу многомерного преобразования Фурье ЯВ n-го порядка,

$$\left|W_n(j\omega_1, j\omega_2,\ \ldots, j\omega_n)\right| = \sqrt{[\mathrm{Re}(W_n(j\omega_1, j\omega_2,\ \ldots, j\omega_n))]^2 + [\mathrm{Im}(W_n(j\omega_1, j\omega_2,\ \ldots, j\omega_n))]^2}\ , \tag{4}$$

$$\arg W_n(j\omega_1, j\omega_2,\ \ldots, j\omega_n) = arctg\frac{\mathrm{Im}(W_n(j\omega_1, j\omega_2,\ \ldots, j\omega_n))}{\mathrm{Re}(W_n(j\omega_1, j\omega_2,\ \ldots, j\omega_n))}\ , \tag{5}$$

где Re и Im — соответственно вещественная и мнимая части комплесной функции n-переменных.

В частотной области для идентификации применяются тестовые полигармонические воздействия [4]

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k\cos(\omega_k t + \varphi_k), \tag{6}$$

где n — порядок оцениваемой ПФ;

A_k, ω_k и φ_k — соответственно амлитуда, частота и фаза k-й гармоники.

Для простоты выкладок амплитуды A_k полагаются одинаковыми, а фазы φ_k — равными нулю.

При идентификации НДС в частотной области необходимы ограничения на выбор частот тестового полигармонического сигнала. Например, парциальная составляющая второй степени [4]

$$\begin{aligned}
y_2[x(t)] &= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int w_2(\tau_1,\tau_2)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 = \\
&= \frac{A^2}{2}\{\left|W_2(j\omega_1, j\omega_2)\right|\cos[(\omega_1+\omega_2)t + \arg W_2(j\omega_1, j\omega_2)] + \\
&+ \left|W_2(j\omega_2, j\omega_1)\right|\cos[(\omega_1+\omega_2)t + \arg W_2(j\omega_2, j\omega_1)] + \\
&+ \left|W_2(j\omega_1, j\omega_1)\right|\cos[2\omega_1 t + \arg W_2(j\omega_1, j\omega_1)] + \\
&+ \left|W_2(j\omega_2, j\omega_2)\right|\cos[2\omega_2 t + \arg W_2(j\omega_2, j\omega_2)] + \\
&+ \left|W_2(j\omega_1, -j\omega_2)\right|\cos[(\omega_1-\omega_2)t + \arg W_2(j\omega_1, -j\omega_2)] + \\
&+ \left|W_2(j\omega_2, -j\omega_1)\right|\cos[(\omega_2-\omega_1)t + \arg W_2(j\omega_2, -j\omega_1)] + \\
&+ \left|W_2(j\omega_1, -j\omega_1)\right|\cos(\arg W_2()j\omega_1, -j\omega_1) + \\
&+ \left|W_2(j\omega_2, -j\omega_2)\right|\cos(\arg W_2(j\omega_2, -j\omega_2))\}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Если из этого выражения выделить гармонические составляющие с частотой $\omega_1+\omega_2$, а с учетом симметрии ЯВ [1] необходимо выделить фактически одну гармонику с удвоенной амплитудой, то получим значения для модуля и фазы Фурье-изображения ЯВ второго порядка. Для определения ПФ, т.е. выделения гармоники с частотой $\omega_1+\omega_2$, необходимо применить фильтрацию. Для однозначного выделения информативных гармоник необходимо, чтобы частоты гармонических составляющих в (7) были различны. Следует наложить некоторые ограничения на выбор частот тестового полигармонического сигнала, обеспечивающие неравенство комбинационных частот (КЧ) в гармониках выходного сигнала. Аналогичные ограничения необходимы и в случае определения ПФ n-го порядка ($n>2$). Третья парциальная составляющая также содержит информативные и “лишние” гармоники [4].

Ограничения на выбор частот тестового полигармонического сигнала различны [4…7].

Ограничение на выбор частот [5], требующее несоизмеримости частот тестового сигнала, т.е. неравенства между собой любых линейных комбинаций частот с произвольными целочисленными коэффициентами, эквивалентно требованию числовой иррациональности всех частот, кроме одной,

$$\forall\{\omega_i \,|\, i=\overline{1,n}\} \quad \exists\{\omega_p \,|\, p=\overline{1,n-1}\} \subset \{\omega_i \,|\, i=\overline{1,n}\} \,\big|\, \{\omega_p \,|\, p=\overline{1,n-1}\} \subset \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q},$$

где **R** — множество действительных чисел;

Q — множество рациональных чисел;

R**Q** — разность множеств **R** и **Q** — множество иррациональных чисел.

Допустимость только одной рациональной частоты следует из того, что уже для двух можно подобрать такие целые множители, которые при умножении на эти частоты дадут одинаковый результат. В качестве таких множителей можно использовать числитель и знаменатель их отношения. Действительно, пусть $\omega_1=A$ и $\omega_2=B$, где A и B — рациональные числа. Тогда $\frac{A}{B}=\frac{m}{n}$ — рациональное число; $m\in Z$ и $n\in N$, где Z и N — соответственно множества целых и натуральных чисел; и $n\omega_1=nA=mB=m\omega_2$. Для доказательства невозможности еще большего числа рационально–числовых частот достаточно рассмотреть их любые две суммы.

Следует отметить, что это ограничение, кроме иррациональности частот, требует еще и иррациональности их отношения, т.е. $\forall p_1 \neq p_2 \Rightarrow \frac{\omega_{p_1}}{\omega_{p_2}} \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q},$, ибо в противном случае это ограничение также оказывается нарушенным.

Другое ограничение на выбор частот [4] также требует выполнения неравенства между собой любых линейных комбинаций частот с различными целочисленными коэффициентами, но только для коэффициентов, сумма модулей которых не превосходит порядка определяемой ПФ, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\omega_i \neq \sum_{i=1}^{n} b_i\omega_i \;\text{ при }\; \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq n \;\text{ и }\; \sum_{i=1}^{n} |b_i| \leq n.$$

Поскольку это ограничение связано с порядком определяемой ПФ, то оно слабее предыдущего.

Оба ограничения определяют только достаточные условия выбора частот, т.к. из выполнения любого из них следует возможность однозначной частотной фильтрации, но не наоборот. Рассмотрим пример более слабого ограничения [4]. Пусть порядок определяемого ЯВ $n=2$. Тогда, в соответствии с (7), во второй парциальной составляющей будут содержаться следующие КЧ:

$$\omega_1+\omega_2;\;\; 2\omega_1;\;\; 2\omega_2;\;\; \omega_1-\omega_2;\;\; -\omega_1+\omega_2;\;\; 0. \quad (8)$$

Если допустить, что равны какие–либо КЧ, отличные от первой, например, третья и четвертая: $2\omega_2=\omega_1-\omega_2$, т.е. $\omega_1=3\omega_2$, то выражения (8) принимают вид

$$4\omega_2;\;\; 6\omega_2;\;\; 2\omega_2;\;\; 2\omega_2;\;\; -2\omega_2;\;\; 0. \quad (9)$$

Сравнивая КЧ в (9), легко заметить, что первая из них не совпадает ни с одной другой. Таким образом, при нарушении этого ограничения сохраняется возможность однозначной фильтрации гармоники с первой из перечисленных в (8) КЧ.

Предлагаются новые менее жесткие, чем существующие [4…7] ограничения выбора частот, существенно сокращающие число точек неопределенности, т.к. в общем случае, при произвольном *n,* в парциальной составляющей для определения ПФ используются гармоники только с одной КЧ, поэтому нет необходимости в неравенстве всех КЧ между собой. Минимум ограничений дает следующая теорема.

Теорема о выборе частот. Для однозначности фильтрации из n-й парциальной составляющей отклика гармоники с комбинационной частотой

$$\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_n \tag{10}$$

необходимо и достаточно, чтобы последняя не равнялась комбинационным частотам вида $k_1\omega_1+k_2\omega_2+\ldots+k_n\omega_n$, где коэффициенты $\{k_i \mid i=1,2,\ldots, n\}$ удовлетворяют условиям:

— мощность конечного множества отрицательных коэффициентов ($k_i<0$) может принимать значения от 0 до $\left[\dfrac{n}{2}\right]$, где [] — функция выделения целой части числа;

— сумма модулей коэффициентов k_i не больше порядка n определяемого ядра: $\sum\limits_{i=1}^{n}|k_i| \le n$;

— сумма модулей коэффициентов k_i сравнима по модулю 2 с порядком n — порядком определяемого ядра: $\sum\limits_{i=1}^{n}|k_i| \equiv n \pmod 2$, т.е. $n-\sum\limits_{i=1}^{n}|k_i| = 2\ell,\ \ \ell\in N$.

Доказательство. Все КЧ в n-й парциальной составляющей можно найти, подставив в n-й член РВ (1) выражение (6) для тестового полигармонического сигнала в комплексной форме

$$x(t)=A\sum_{k=1}^{n}\cos(\omega_k t)=\frac{A}{2}\sum_{k=1}^{n}(e^{j\omega_k t}+e^{-j\omega_k t})=\frac{A}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}e^{j\omega_k t}+\sum_{k=1}^{n}e^{-j\omega_k t}\right). \tag{11}$$

После подстановки

$$y_n[x(t)]=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\ldots\!\int}_{n} w_n(\tau_1,\ldots\tau_n)\prod_{i=1}^{n}x(t-\tau_i)d\tau_i=\frac{A^n}{2^n}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\ldots\!\int}_{n} w_n(\tau_1,\ldots\tau_n)\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}e^{j\omega_k(t-\tau_i)}+\sum_{k=1}^{n}e^{-j\omega_k(t-\tau_i)}\right)d\tau_i. \tag{12}$$

Для дальнейших преобразований используется обобщение формулы бинома Ньютона [10]

$$\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)=\sum_{\{s_m|m=\overline{0,n}\}}\alpha_{s_1}\ldots\alpha_{s_m}\beta_{s_{m+1}}\ldots\beta_{s_n}=\sum_{m=0}^{n}\sum_{\{s_m\}}^{C_n^m}\prod_{l=1}^{m}\alpha_{s_l}\prod_{r=m+1}^{n}\beta_{s_r}, \tag{13}$$

где $\{s_m\in\mathbf{N} \mid m=\overline{0,n}\}$ — всевозможные сочетания из n по m;

$\{s_r \mid r=\overline{m+1,n}\}$ — сочетание, которое дополняет всевозможные сочетания из n по m до перестановки n натуральных чисел.

Поскольку здесь каждому сочетанию $\{s_m \mid m=\overline{0,n}\}$ соответствует только одно дополняющее, то каждое слагаемое в формуле (13) представляет собой сумму $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ слагаемых. Преобразуем в (12) произведение n членов, каждый из которых состоит из $2n$ слагаемых, по формуле (13), тогда

$$y_n[x(t)]=\frac{A^n}{2^n}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\ldots\!\int}_{n} w_n(\tau_1,\ldots\tau_n)\left(\sum_{m=0}^{n}\sum_{\{s_m|m=\overline{0,n}\}}^{C_n^m}\prod_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}e^{j\omega_k(t-\tau_{s_l})}\prod_{r=m+1}^{n}\sum_{k=1}^{n}e^{-j\omega_k(t-\tau_{s_r})}\right)\prod_{i=1}^{n}d\tau_i. \tag{14}$$

С учетом симметрии ЯВ $w_n(\tau_1,\ldots\tau_n)$ вместо сочетаний — $\{s_m \,|\, m=\overline{0,n}\}$ можно рассмотреть C_n^m множеств чисел $\{\overline{1,m}\}$, где $m=\overline{0,n}$. При m=0 эти множества сочетаний и чисел — пустые множества. Тогда

$$y_n[x(t)] = \frac{A^n}{2^n}\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int}_{n} w_n(\tau_1,\ldots\tau_n)\left(\sum_{m=0}^{n} C_n^m \prod_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} e^{j\omega_k(t-\tau_l)} \prod_{r=m+1}^{n}\sum_{k=1}^{n} e^{-j\omega_k(t-\tau_r)}\right)\prod_{i=1}^{n} d\tau_i. \tag{15}$$

После перемножения сумм в произведениях

$$y_n[x(t)] = \frac{A^n}{2^n}\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int}_{n} w_n(\tau_1,\ldots\tau_n)\left(\sum_{m=0}^{n} C_n^m \underbrace{\sum_{k_1=1}^{n}\ldots\sum_{k_n=1}^{n}}_{n} e^{j\omega_{k_1}(t-\tau_1)}\ldots e^{j\omega_{k_m}(t-\tau_m)} e^{-j\omega_{k_{m+1}}(t-\tau_{m+1})}\ldots e^{-j\omega_{k_n}(t-\tau_n)}\right)\prod_{i=1}^{n} d\tau_i. \tag{16}$$

В результате приведения подобных членов в показателях степеней (16)

$$y_n[x(t)] = \frac{A^n}{2^n}\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int}_{n} w_n(\tau_1,\ldots\tau_n)\left(\sum_{m=0}^{n} C_n^m \underbrace{\sum_{k_1=1}^{n}\ldots\sum_{k_n=1}^{n}}_{n} e^{j\left(\sum\limits_{l=1}^{m}\omega_{k_l} - \sum\limits_{r=m+1}^{n}\omega_{k_r}\right)t} e^{-j\left(\sum\limits_{l=1}^{m}\omega_{k_l}\tau_{k_l} - \sum\limits_{r=m+1}^{n}\omega_{k_r}\tau_{k_r}\right)}\right)\prod_{i=1}^{n} d\tau_i. \tag{17}$$

После преобразований

$$y_n[x(t)] = \frac{A^n}{2^n}\sum_{m=0}^{n} C_n^m \underbrace{\sum_{k_1=1}^{n}\ldots\sum_{k_n=1}^{n}}_{n} e^{j\left(\sum\limits_{l=1}^{m}\omega_{k_l} - \sum\limits_{r=m+1}^{n}\omega_{k_r}\right)t} \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int}_{n} w_n(\tau_1,\ldots\tau_n) e^{-j\left(\sum\limits_{l=1}^{m}\omega_{k_l}\tau_{k_l} - \sum\limits_{r=m+1}^{n}\omega_{k_r}\tau_{k_r}\right)}\prod_{i=1}^{n} d\tau_i. \tag{18}$$

Замена интегралов соответствующими Фурье-изображениями ЯВ дает

$$y_n[x(t)] = \frac{A^n}{2^n}\sum_{m=0}^{n} C_n^m \underbrace{\sum_{k_1=1}^{n}\ldots\sum_{k_n=1}^{n}}_{n} e^{j\left(\sum\limits_{l=1}^{m}\omega_{k_l} - \sum\limits_{r=m+1}^{n}\omega_{k_r}\right)t} W_n(-j\omega_{k_1},\ldots - j\omega_{k_m}, j\omega_{k_{m+1}},\ldots j\omega_{k_n}). \tag{19}$$

После объединения комплексно-сопряженных функций в выражении (19) n-я парциальная составляющая отклика НДС

$$\begin{gathered} y_n[x(t)] = \frac{A^n}{2^{n-1}}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^m \underbrace{\sum_{k_1=1}^{n}\ldots\sum_{k_n=1}^{n}}_{n} e^{j\left(\sum\limits_{l=1}^{m}\omega_{k_l} - \sum\limits_{r=m+1}^{n}\omega_{k_r}\right)t} \left|W_n(-j\omega_{k_1},\ldots - j\omega_{k_m}, j\omega_{k_{m+1}},\ldots j\omega_{k_n})\right| \times \\ \times\cos\left(\left(-\sum_{l=0}^{m}\omega_{k_l} + \sum_{l=m+1}^{n}\omega_{k_l}\right)t + \arg W_n(-j\omega_{k_1},\ldots - j\omega_{k_m}, j\omega_{k_{m+1}},\ldots j\omega_{k_n})\right). \end{gathered} \tag{20}$$

Частный случай применения этой формулы при n=2 известен [4], а результат, аналогичный выражению (20), представлен выражением (7). Таким образом, частоты в парциальной составляющей выражаются формулой

$$-\sum_{l=0}^{m}\omega_{k_l} + \sum_{l=m+1}^{n}\omega_{k_l}, \quad \text{где} \quad m=\overline{0,\left[\frac{n}{2}\right]}. \tag{21}$$

Коэффициенты в выражении (21) для КЧ обладают следующими свойствами:

— сумма модулей коэффициентов не превосходит n;

— число отрицательных слагаемых m в КЧ удовлетворяет неравенству $0 \le m \le \left[\dfrac{n}{2}\right]$;

— среди частот $\{\omega_{k_i} \big| k_i = \overline{1,n}\}$ возможны повторяющиеся частоты, т.е. в (20) возможно взаимное "погашение" одинаковых частот с противоположными по знаку коэффициентами. Примером этого является выражение (7), где последние два слагаемых имеют вырожденную КЧ ω=0. Поэтому сумма модулей коэффициентов k_i равна порядку определяемой ПФ минус удвоенное число возможных "погашений", т.к. при одном "погашении"взаимно уничтожаются две КЧ. Это эквивалентно одновременной четности или нечетности суммы модулей коэффициентов и порядка определяемой ПФ, или сравнимости последних по модулю 2.

Однозначная фильтрация гармоник с КЧ (21) возможна только при неравенстве ее остальным КЧ в парциальной составляющей. Согласно (21) в парциальной составляющей содержатся гармоники только с КЧ, приведенными в формулировке теоремы. Поэтому из однозначной фильтрации вытекает неравенство КЧ (10) остальным комбинационным частотам. Таким образом доказана *необходимость* сформулированных условий на выбор частот.

Доказательство *достаточности* основано на том, что неравенство КЧ (10) другим КЧ из формулировки теоремы, вытекающее из (20), обусловливает возможность однозначной фильтрации гармоники с искомой КЧ из парциальной составляющей отклика идентифицируемой НДС.

Ограничение на выбор частот [5] на практике неприменимо, поскольку требует иррациональности частот, что при использовании ЭВМ для определения ПФ нереализуемо. Это следует из ограниченности разрядной сетки ЭВМ, т.е. использования только рациональных чисел.

Ограничение на выбор частот [4] может применяться на практике, но, как показано в (8) и (9), излишне ограничивает выбор используемых частот. Вообще говоря, это ограничение применимо не только для фильтрации гармоник с частотами (10), но и для любых других гармоник в парциальной составляющей отклика. Применение этого ограничения при определении ПФ второго порядка требует обеспечивать между частотами входного сигнала выполнение пяти неравенств:

$$\omega_1 \neq 0,\ \omega_2 \neq 0,\ \omega_1 \neq \omega_2,\ 3\omega_1 \neq \omega_2 \text{ и } \omega_1 \neq 3\omega_2.$$

При определении ПФ третьего порядка требуется обеспечивать между частотами входного сигнала выполнение уже 45-ти неравенств:

$$\omega_1 \neq 0,\ \omega_2 \neq 0,\ \omega_3 \neq 0,\ \omega_1 \neq \omega_2,\ \omega_1 \neq \omega_3,\ \omega_2 \neq \omega_3,\ \omega_1 \neq \omega_2+\omega_3,\ \omega_2 \neq \omega_1+\omega_3,\ \omega_3 \neq \omega_1+\omega_2,$$

$$2\omega_1 \neq \omega_2,\ 2\omega_2 \neq \omega_1,\ 2\omega_3 \neq \omega_1,\ 2\omega_1 \neq \omega_3,\ 2\omega_2 \neq \omega_3,\ 2\omega_3 \neq \omega_2,\ 2\omega_1 \neq \omega_2+\omega_3,\ 2\omega_2 \neq \omega_1+\omega_3,\ 2\omega_3 \neq \omega_1+\omega_2,$$

$$2\omega_1 \neq \omega_2-\omega_3,\ 2\omega_2 \neq \omega_1-\omega_3,\ 2\omega_3 \neq \omega_1-\omega_2,\ 2\omega_1 \neq -\omega_2+\omega_3,\ 2\omega_2 \neq -\omega_1+\omega_3,\ 2\omega_3 \neq -\omega_1+\omega_2,$$

$$3\omega_1 \neq \omega_2,\ 3\omega_2 \neq \omega_1,\ 3\omega_3 \neq \omega_1,\ 3\omega_1 \neq \omega_3,\ 3\omega_2 \neq \omega_3,\ 3\omega_3 \neq \omega_2,$$

$$3\omega_1 \neq \omega_2+2\omega_3,\ 3\omega_2 \neq \omega_1+2\omega_3,\ 3\omega_3 \neq \omega_1+2\omega_2,\ 3\omega_1 \neq 2\omega_2+\omega_3,\ 3\omega_2 \neq 2\omega_1+\omega_3,\ 3\omega_3 \neq 2\omega_1+\omega_2,$$

$$3\omega_1 \neq \omega_2-2\omega_3,\ 3\omega_2 \neq \omega_1-2\omega_3,\ 3\omega_3 \neq \omega_1-2\omega_2,\ 3\omega_1 \neq -2\omega_2+\omega_3,\ 3\omega_2 \neq -2\omega_1+\omega_3,;\ 3\omega_3 \neq -2\omega_1+\omega_2,$$

$$4\omega_1 \neq \omega_2+\omega_3,\ 4\omega_2 \neq \omega_1+\omega_3 \text{ и } 4\omega_3 \neq \omega_1+\omega_2.$$

Предложенные ограничения выбора частот предназначены для выделения только гармоники с КЧ (10). Применение их позволит максимально расширить множество допустимых частот, используемых при идентификации, сократить число логических условий (неравенств) при выборе частот, определяющих возможность однозначной фильтрации гармоники с требуемой КЧ. Применение этого ограничения при определении ПФ второго порядка требует обеспечивать между частотами входного сигнала выполнение не пяти, а трех неравенств:

$$\omega_1 \neq 0,\ \omega_2 \neq 0 \text{ и } \omega_1 \neq \omega_2.$$

При определении ПФ третьего порядка требуется обеспечивать между частотами входного сигнала выполнение всего 15-ти неравенств:

$$\omega_1\neq 0,\ \omega_2\neq 0,\ \omega_3\neq 0,\ \omega_1\neq\omega_2,\ \omega_1\neq\omega_3,\ \omega_2\neq\omega_3,\ 2\omega_1\neq\omega_2+\omega_3,\ 2\omega_2\neq\omega_1+\omega_3,\ 2\omega_3\neq\omega_1+\omega_2,$$

$$2\omega_1\neq\omega_2-\omega_3,\ 2\omega_2\neq\omega_1-\omega_3,\ 2\omega_3\neq\omega_1-\omega_2,\ 2\omega_1\neq-\omega_2+\omega_3,\ 2\omega_2\neq-\omega_1+\omega_3 \text{ и } 2\omega_3\neq-\omega_1+\omega_2.$$

Таким образом, доказанная теорема о выборе частот тестового полигармонического сигнала при идентификации НДС с помощью многомерных ПФ значительно ослабляет известные ограничения [4]. Применение новых условий снижает количество интерполяций при восстановлении ПФ и тем значительнее, чем выше порядок оцениваемой ПФ.

Литература

1. Третьяк, А.И. Дифференциально–геометрические методы в теории дискретных систем управления: Моногр. / А.И. Третьяк, А.В. Усов, А.П. Коновалов. — Одесса: Астропринт, 2008. — 360 с.
2. Пупков, К.А. Методы классической и современной теории автоматического управления. Статистическая динамика и идентификация систем автоматического управления: Учеб. для вузов. В 5 тт. Т. 2. / К.А. Пупков, Н.Д. Егупов. — М.: Изд–во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. — 638 с.
3. Doyle, F.J. Identification and Control Using Volterra Models / F.J. Doyle, R.K. Pearson, D.A. Ogunnaike — Published Springer Technology & Industrial Arts, 2001. — 314 p.
4. Данилов, Л.В. Теория нелинейных электрических цепей / Л.В. Данилов, П.Н. Матханов, Е.С. Филиппов. — Л.: Энергоатомиздат, 1990. — 256 с.
5. Bussgang, J.J. Analysis of nonlinear systems with multiple inputs / J.J. Bussgang, L. Ehrman, J.W. Graham // Proc. IEE. — 1974. —Vol. 62, № 8. — P. 1088 — 1119.
6. Сверкунов, Ю.Д. Расчет амплитуд комбинационных гармоник при полигармоническом воздействии на нелинейную инерционную систему / Ю.Д. Сверкунов // Радиотехника и электроника. — 1976. — № 11. — С. 2329 — 2336.
7. Tseng, C.H. Identification of cubically nonlinear systems using undersampled data / C.H. Tseng // IEE Proc. Vision, Image and Signal Processing. — 1997. — Vol. 144, № 5. — P. 267 — 277.
8. Frank, W. An efficient approximation to the quadratic Volterra filter and its application in realtime loudspeaker linearization / W. Frank // Signal Processing. — 1995. — Vol. 45, № 1. — P. 97 — 113.
9. Павленко, В.Д. Построение информационных моделей нелинейных динамических систем в виде многомерных передаточных функций / В.Д. Павленко, С.И.М. Исса, С.Д. Кузниченко // Нові технології. Наук. Вісн. Кременч. ун–ту економіки, інформ. технологій і упр. — 2008. — № 4 (22). — С. 93 — 98.
10. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. — М.: Наука, 1981. — 720 с.

Рецензент канд. техн. наук, доц. Одес. нац. политехн. ун-та Болтенков В.А.

Поступила в редакцию 23 апреля 2009 г.