УДК 532.511

**С.В. Сурков,** канд. техн. наук, доц.,
**Е.А. Горбатенко,** инженер,
Одес. нац. политехн. ун-т

# КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ

*С.В. Сурков, Е.А. Горбатенко.* **Кинематические свойства двухпараметрических вихревых течений.** Получено уравнение, связывающее кинетическую энергию продольного течения жидкости с угловой скоростью течения в плоскости поперечного сечения потока. Показано, что математические модели вторичных течений могут быть получены из теории двухпараметрических вихревых течений как частный случай.

*С.В. Сурков, О.А. Горбатенко.* **Кінематичні властивості двопараметричних вихрових течій.** Отримано рівняння, що зв'язує кінетичну енергію подовжнього руху рідини із кутовою швидкістю течії у площині поперечного перерізу потоку. Показано, що математичні моделі вторинних течій можуть бути отримані з теорії двопараметричних вихрових течій як окремий випадок.

*S.V. Surkov, O.A. Gorbatenko.* **Kinematic properties of the two-parametrical vortex flows.** An equation is obtained relating the kinetic energy of the liquid's longitudinal flow with the angular velocity of the flow in a plane of the cross-section of the stream. It is shown, that the mathematical models of the secondary flows may be obtained from a theory of the two-parametrical vortex flow as a special case.

Математические модели двухпараметрических вихревых течений используются для описания вторичных течений, возникающих в призматических каналах [1], в каналах с круглым и кольцевым поперечным течением [2], а также закрученных течений в каналах и трубах. Для совершенствования существующих моделей необходимо включить в них взаимосвязь между продольной скоростью и параметрами течения в плоскости поперечного сечения потока.

Рассмотрим установившееся вихревое течение идеальной жидкости. Вначале введем понятие двухпараметрического потока – трехмерного потока, основные параметры которого зависят только от двух координат, а влиянием третьей координаты можно пренебречь. Будем для определенности считать, что параметры потока зависят только от поперечных координат $y$ и $z$, а влиянием продольной координаты $x$ можно пренебречь. Тогда уравнение несжимаемости принимает вид

$$\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0\,, \tag{1}$$

а проекции угловой скорости

$$\omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right), \tag{2}$$

$$\omega_y=\frac{1}{2}\frac{\partial u_x}{\partial z}\,, \tag{3}$$

$$\omega_z=-\frac{1}{2}\frac{\partial u_x}{\partial y}\,. \tag{4}$$

Введем теперь функцию тока $\psi$, так что

$$u_y=\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{и} \quad u_z=-\frac{\partial \psi}{\partial y}\,. \tag{5}$$

Теперь уравнение несжимаемости (1) выполняется автоматически. При подстановке (5) в (2) получаем

$$\omega_x = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right). \tag{6}$$

Если массовые силы, действующие в жидкости, являются потенциальными, то можно использовать уравнения Эйлера в форме Громеки-Лэмба

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 2(u_y\omega_z - u_z\omega_y), \tag{7}$$

$$\frac{\partial E}{\partial y} = 2(u_z\omega_x - u_x\omega_z), \tag{8}$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = 2(u_x\omega_y - u_y\omega_x), \tag{9}$$

где $E = -\Phi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}$ — механическая энергия, отнесенная к единице массы жидкости;

$\Phi$ — потенциал массовых сил.

$\frac{\partial E}{\partial x}$, в соответствии с ранее сделанными допущениями, принимается равным нулю, тогда из (7) следует, что

$$u_z\omega_y - u_y\omega_z = 0 \tag{10}$$

или

$$\frac{\omega_y}{u_y} = \frac{\omega_z}{u_z}. \tag{11}$$

Условие (11) означает, что проекции векторов угловой и линейной скорости жидкости на плоскость поперечного сечения потока ( $x = \text{const}$ ) параллельны между собой.

Подставив в (11) соответственно (3), (4) и (5), получаем

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial u_x}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0. \tag{12}$$

Левая часть (12) представляет собой функциональный определитель или якобиан. Равенство его нулю означает, что между функциями $u_x$ и $\psi$ существует функциональная зависимость, не зависящая от координат $y$ и $x$,

$$u_x = f(\psi). \tag{13}$$

Умножая теперь уравнения (8) и (9) соответственно на $u_y$ и $u_z$ и складывая произведения, получаем

$$u_y\frac{\partial E}{\partial y} + u_z\frac{\partial E}{\partial z} = 2u_x(u_z\omega_y - u_y\omega_z). \tag{14}$$

Правая часть (14) равна нулю в силу (10). Тогда

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial E}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial E}{\partial z} = 0.$$

Таким образом, между удельной энергией $E$ и функцией тока $\psi$ также существует функциональная зависимость. Представим ее в виде

$$E = -F(\psi)\,. \tag{15}$$

Теперь можно вывести выражение для полного дифференциала удельной энергии

$$dE = \frac{\partial E}{\partial y}dy + \frac{\partial E}{\partial z}dz = \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)d\psi + f(\psi)df(\psi)\,.$$

С другой стороны, из (15)

$$dE = -F'(\psi)d\psi\,.$$

Тогда окончательно

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + f(\psi)f'(\psi) + F'(\psi) = 0\,. \tag{16}$$

Система уравнений (5), (13), (15) и (16) описывают двухпараметрический вихревой поток идеальной жидкости.

В соответствии с общим интегралом Бернулли вдоль линии тока при вихревом установившемся течении удельная энергия жидкости постоянна. Если все линии тока выходят из одного сосуда, тогда и для всего потока жидкости удельная энергия постоянна, т.е.

$$E = -\Phi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const}\,.$$

Тогда уравнение (16) упрощается к виду

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + f(\psi)f'(\psi) = 0\,. \tag{17}$$

Исходя из допущений двухпараметрического потока, можно также выполнить следующие преобразования.

Уравнения Эйлера в поперечном сечении потока *x0y* для случая двухпараметрического установившегося течения принимают вид

$$u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\,, \tag{18}$$

$$u_y\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\,. \tag{19}$$

Массовые силы, как и прежде, принимаются потенциальными. После дифференцирования (18) по $\partial z$, а (19) — по $\partial y$, и вычитания результатов, получается

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\omega_x}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega_x}{\partial z} = 0\,. \tag{20}$$

Поскольку якобиан в левой части (20) равен нулю, существует функциональная зависимость между $\omega_x$ и $\psi$, не зависящая от координат,

$$\omega_x = \omega_x(\psi)\,. \tag{21}$$

Сравнивая выражения (6) и (17), получаем

$$2\omega_x(\psi) = u_x(\psi)\frac{du_x}{d\psi}\,,$$

или после разделения переменных

$$2\omega_x(\psi)d\psi = u_x(\psi)du_x\,. \tag{22}$$

После интегрирования (22), получаем универсальную зависимость, связывающую между собой угловую скорость вращения частиц $\omega_x$ и продольную скорость потока $u_x$,

$$2\int \omega_x(\psi)d\psi = \frac{u_x^2}{2} + C\,. \tag{23}$$

По физическому смыслу уравнение (23) связывает изменение кинетической энергии продольного течения жидкости с параметрами течения жидкости в плоскости поперечного сечения потока.

Следует отметить, что это уравнение в общем случае не согласуется с теорией однородных винтовых течений [3], в которой принимается, что $\omega_x$ и $u_x$ связаны между собой линейной зависимостью

$$\frac{\omega_x}{u_x} = \frac{\lambda}{2} = \mathrm{const}\,. \tag{24}$$

Но существует частный случай, когда уравнения (22) и (24) выполняются одновременно. Для этого необходимо принять, что величины $\omega_x$ и $\psi$ также связаны между собой линейной зависимостью

$$\omega_x(\psi) = \frac{\lambda^2}{2}\psi\,.$$

Ранее аналогичное допущение было сделано [1]

$$\omega_x(\psi) = -\frac{C_1}{2}\psi\,. \tag{25}$$

Уравнение (24) позволяет, в частности, объяснить, почему во всех случаях, известных из практики, на границах канала соблюдается условие $\omega_x = 0$: согласно условию прилипания, на стенках канала $u_x = 0$.

Если выполняется условие (25), то модели вторичных течений [1, 2] можно представить как частный случай винтовых течений. Однако теперь эти модели позволяют рассчитывать и продольные скорости потока.

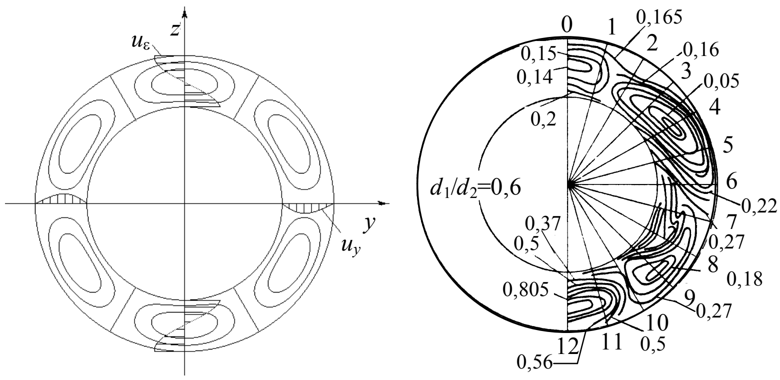
С учетом (25) уравнение (6) принимает вид

$$\nabla^2\psi = C_1\psi\,. \tag{26}$$

Решения уравнения (26) хорошо согласуются с экспериментом. В частности, функция тока для вторичных течений в трубе кольцевого поперечного сечения описывается уравнением

$$\overline{\psi} = J_n(\overline{r})\sin(n\varepsilon)\,. \tag{27}$$

Из эксперимента известно, что на повороте в трубе кольцевого сечения возникает вторичное течение, содержащее шесть вихрей (см. рисунок), которое хорошо согласуется с уравнением (27) при значении $n = 6$.




*Сравнение линий тока вторичного течения, возникающего на повороте трубы кольцевого поперечного сечения, рассчитанных по (26), с экспериментальными данными [4]*

Использование математических моделей двухпараметрических вихревых течений открывает новые возможности для исследования закрученных потоков, а также вторичных течений в трубах и каналах.

**Литература**


1. Сурков, С.В. Волновая модель вторичных течений в призматических каналах / С.В. Сурков // Тр. Одес. политехн. ун-та. — Одесса, 2002. — Вып. 2(18). — С. 184 — 188.
2. Сурков, С.В. Вторичные течения в каналах с круглым и кольцевым поперечным сечением / С.В. Сурков // Тр. Одес. политехн. ун-та. — Одесса, 2003. — Вып. 1(19). — С. 14 — 18.
3. Васильев, О.Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков / О.Ф. Васильев. — М.-Л., Госэнергоиздат, 1958. — 144 с.
4. Дейч, М.Е. Газодинамика диффузоров и выхлопных патрубков турбомашин / М.Е. Дейч, А.Е.Зарянкин. — М.: Энергия, 1970. — 384 с.


Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Королев А.В.

Поступила в редакцию 10 апреля 2009 г.