УДК 621.391

М.И. Мазурков, д-р техн. наук, проф.,
В.Я. Чечельницкий, канд. техн. наук, доц.,
Одес. нац. политехн. ун-т

МЕТОД СИНТЕЗА СОВЕРШЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ДВУМЕРНЫХ РЕШЕТОК НАД ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМ АЛФАВИТОМ

М.І. Мазурков, В.Я. Чечельницький. **Метод синтезу досконалих послідовностей і двовимірних решіток над цілочисельним алфавітом.** Запропоновано регулярний метод синтезу досконалих багаторівневих решіток і недвійкових ортогональних коригуючих кодів на основі розв'язання діофантових рівнянь періодичної автокореляції цілочисельних послідовностей.

М.И. Мазурков, В.Я. Чечельницкий. **Метод синтеза совершенных последовательностей и двумерных решеток над целочисленным алфавитом.** Предложен регулярный метод синтеза совершенных многоуровневых решеток и недвоичных ортогональных корректирующих кодов на основе решения диофантовых уравнений периодической автокорреляции целочисленных последовательностей.

M.I. Mazurkov, V.Ja. Chechelnytskyi. **A method for synthesis of perfect sequences and two-dimensional arrays over an integer alphabet.** A regular method for synthesizing of perfect multilevel arrays and nonbinary orthogonal correcting codes based on the solution of Diophantine equations of periodical autocorrelation for integer sequences is proposed.

Известен синтез дискретных последовательностей $X = \{x_i\}$, $i = \overline{0, N-1}$, с идеальной периодической автокорреляционной функцией (ПАКФ) [1, 2]

$$R(\tau) = \sum_{i=0}^{N-1} x_i x_{i+\tau} = \begin{cases} E, \text{ если } \tau = 0, \\ 0, \text{ если } \tau \neq 0, \end{cases} \tau = \overline{0, N-1}, \tag{1}$$

где E — энергия последовательности;
$i+\tau$ — индекс, редуцируемый по модулю N.

Существуют многочисленные приложения, в которых сигналы с идеальной ПАКФ обретают первоочередную важность, например, системы измерения дальности и времени, пилотные или синхронизирующие каналы цифровых систем связи и др. [1].

Известны корреляционные [3] и спектральные [4] методы синтеза дискретных последовательностей над комплексным либо вещественным алфавитом, однако, едва ли можно их признать эффективными в практическом отношении, поскольку результатом такого синтеза являются довольно экзотические значения комплексных амплитуд кода, установка и поддержка которых с требуемой точностью технологически весьма проблематичны.

Предлагается конструктивный метод синтеза совершенных целочисленных последовательностей и двумерных решеток с идеальной ПАКФ произвольных порядков N на основе решения диофантовых уравнений периодической автокорреляции [5].

Необходимые в дальнейшем свойства размножения и композиции дискретных последовательностей (ДП) с идеальной ПАКФ:

— циклический сдвиг на величину τ — $D^{\tau}X$,

— инверсия — $\bar{X}$,

—зеркальное отображения — $Z(X)$,

— собственная децимация на величину δ — $X(\delta)$, когда н.о.д. $(\delta, N) = 1$,

— умножение на константу c — cX,

— композиция двух ДП — X_1 длины N_1 и X_2 длины N_2, дает новую ДП X_3 длины $N_3 = N_1 N_2$ с идеальной ПАКФ, если н.о.д. $(N_1, N_2) = 1$.

Сущность операции композиции состоит в том, что выписывают в строке Y_1 точно N_2 периодов ДП X_1, а в строке Y_2 точно N_1 периодов ДП X_2, затем проводят поэлементное умножение строк Y_1 и Y_2, т.е. $Y1 * Y2$ и получают новую ДП X_3 с идеальной ПАКФ. Например, пусть $X_1 = [1,\ 1,\ 1, -1]$, $X_2 = [2,\ 2, -1]$ — две ДП с идеальной ПАКФ каждая, тогда композиция этих последовательностей дает новую последовательность $X_3 = [2,\ 2, -1, -2,\ 2, -1,\ 2, -2, -1,\ 2,\ 2,\ 1]$, которая имеет длину $N_3 = 12$ и идеальную ПАКФ.

Предлагаемый метод синтеза целочисленных последовательностей с идеальной ПАКФ реализован с помощью *Алгоритма 1*:

— для заданной длины N дискретной последовательности $X = \{x_i\}$, $i = \overline{0, N-1}$ построить вспомогательную последовательность $X_0 = \{\alpha,\ \alpha,\ \ldots,\ \alpha,\ -\beta\}$ с идеальной ПАКФ, где очевидно, что значение $\beta = (N-2)\alpha/2$ выбирается целочисленным; синтез последовательности X проводится над целочисленным алфавитом из q различных символов $A = \{-\beta,\ -(\beta-1),\ \ldots, 0, \ldots,\ (\beta-1),\ \beta\}$, т.е. найденный алфавит A является, по сути, принятым ограничением;

— составить для последовательности X целочисленные (диофантовы) нелинейные уравнения периодической автокорреляции вида

$$R(\tau) = \sum_{i=0}^{N-1} x_i x_{i+\tau} = 0\,,\ \tau = \overline{1,\ \psi}\,, \tag{2}$$

где ψ — необходимое и достаточное количество уравнений, определяемое условием

$$\psi = \begin{cases} (N1)/2, \text{ если } N \text{ — нечетное}, \\ \\ N/2, \text{ если } N \text{ — четное}; \end{cases} \tag{3}$$

уравнения периодической корреляции (1) являются избыточными, поскольку вторая половина совпадает с первой с точностью до порядка следования слагаемых в рамках каждого соответствующего уравнения;

— установить границы изменения целочисленных переменных $a \le x_i \le b$, $i = \overline{0, N-1}$, и учесть указанные свойства дискретных последовательностей с идеальной ПАКФ;

— с помощью математического пакета, например, MATHEMATICA 6.03 [6], выбрать функцию решения диофантовых уравнений: *FindInstance[R(τ),vars,Integer,m]* с учетом ранее выбранных ограничений на диапазон значений целочисленных (*Integer*) переменных x_i (*vars*), где m — заданное количество решений системы уравнений; для ускорения процесса решений следует отдельные значения переменных ограничить строгим равенством, например, $x_i = 1$ или $x_i = -1$, исходя из особенностей решаемой задачи;

— провести окончательный выбор одного или нескольких подходящих решений из m полученных с учетом принятых критериев, например, критерия близости к единице значения пик-фактора целочисленной последовательности X

$$\eta = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} |x_i|^2}{N |x_i|^2_{\max}} \Rightarrow 1\,,$$

либо критерия наибольшей многоуровневости $q \Rightarrow q_{\max}$ и критерия $\eta \Rightarrow 1$.

Пример 1. Синтезировать дискретную целочисленную последовательность $X = \{x_i\}$, $i = \overline{1, 7}$, длины $N = 7$. Из анализа вспомогательной последовательности X_0 с идеальной ПАКФ определено, что $\alpha = 2$, а $\beta = 5$, тогда алфавит $A = \{-5, -4, \ldots, 0, \ldots, 4, 5\}$. В соответствии с предлагаемым методом синтеза составляется программа решения диофантовых уравнений при следующих ограничениях на значения диапазонов изменения элементов x_i, $i = \overline{1, 7}$:

```
FindInstance[{x1*x2+x2*x3+x3*x4+x4*x5+x5*x6+x6*x7+x7*x1 == 0
  && x1*x3+x2*x4+x3*x5+x4*x6+x5*x7+x6*x1+x7*x2 == 0
  && x1*x4+x2*x5+x3*x6+x4*x7+x5*x1+x6*x2+x7*x3 == 0          (4)
  && –3<x1<3 && -3<x2<3 && -3<x3<3 && -3<x4<3 && –3<x5<3
  && –3<x6<3 && -6<x7<6},{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7},Integers,30],
```

при этом практически быстро находится $m = 30$ целочисленных решений уравнения (4), большинство из которых совпадают между собой с точностью до операций циклического сдвига, инверсии и децимации. Для каждой из двух типичных последовательностей с идеальной ПАКФ

$$X_1 = \{1 \ -1 \ -2 \ -2 \ 1 \ -2 \ 1\},$$
$$X_2 = \{1 \ -1 \quad 0 \quad 0 \ 1 \quad 0 \ 1\}$$

параметры $q = 3$ и $\eta = 0,57$, тогда как для вспомогательной последовательности $X_0 = \{2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 -5\} - q = 2$ и $\eta = 0,28$.

По предложенному *Алгоритму 1* построены целочисленные последовательности с идеальной ПАКФ (табл. 1).

Таблица 1

Структура и параметры целочисленных последовательностей с идеальной ПАКФ

№ посл.	Длина, N	Вид целочисленной последовательности с идеальной ПАКФ	Параметры	
			q	η
1	2	[1, 0]	2	0,5
2	3	[1, 2, −1]	2	0,75
3	4	[1, 1, 1, −1]	2	1,0
4	5	[2, 2, 2, 2, −3]	2	0,55
5	5	[6, 6, 2, 3, −6]	4	0,67
6	6	[1, 1, 0, −1, 1, 0]	3	0,67
7	7	[1, 0, 1, 0, 0, −1, 1]	3	0,57
8	7	[2, −2, 2, −1, −1, 1, 2]	3	0,57
9	7	[11, −6, −6, 10, −6, 10, 10]	3	0,62
10	7	[29, 36, 36, −20, 36, −20, −20]	3	0,65
11	8	[1, 0, 1, 0, −1, 0, 1, 0]	3	0,50
12	8	[8, 8, 4, 1, −4, 8, −8, 0]	5	0,56
13	9	[1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, −2]	3	0,25
14	10	[2, 0, 2, 0, −3, 0, 2, 0, 2, 0]	3	0,28
15	11	[−1, 2, 0, −1, 2, −1, −1, −1, 2, 2, 2]	3	0,56
16	12	[2, 2, −1, −2, 2, −1, 2, −2, −1, 2, 2, 1]	4	0,75
17	13	[1, 0, 1, 0, 0, 1, −1, 1, 0, −1, −1, 1, 1]	3	0,69
18	14	[2, 0, 2, 0, −1, 0, 2, 0, −1, 0, −1, 0, 1, 0]	3	0,28
19	15	[3, 3, 3, 3, −2, 3, −2, 3, 3, −2, −2, 3, −2, −2, −2]	2	0,74

Предлагаются новые приложения q-ичных целочисленных последовательностей с идеальными ПАКФ в задачах синтеза совершенных многоуровневых ($Q > 2$) решеток (СМР) и построения Q-ичных ортогональных корректирующих кодов. На основе свойств матриц кронекеровского произведения [7] разработан регулярный *Алгоритм 2* построения Q-ичных ортогональных корректирующих кодов и СМР:

— синтезировать q-ичную последовательность X с идеальной периодической автокорреляционной функцией (ПАКФ) произвольной заданной длины N согласно Алгоритму 1;

— на основе порождающей последовательности X построить ортогональную матрицу-циркулянт $\mathbf{C}(N, q)$ [7];

— построить Q-ичный код кронекеровского произведения $K(n) = [\mathbf{C}(N,q) \otimes \mathbf{C}(N,q)]$, длины $n = N^2$ и мощностью, т.е. объемом, $J = N^2$, который по построению является ортогональным и обладает свойством двухпетлевого циклического N-сдвига [8], при этом параметр $Q = \dfrac{q(q-1)}{2}$;.

— на основе каждой строки матрицы кронекеровского произведения $K(n)$ построить СМР $\mathbf{G}(N)$ порядка N, путем последовательной записи по строкам N цугов, длины N каждый.

Пример 2. Синтезируем многоуровневый ортогональный корректирующий код на основе последовательности $X = [2, 2, -1, -2, 2, -1, 2, -2, -1, 2, 2, 1]$ (см. табл. 1, № 16). Соответствующая матрица-циркулянт

$$\mathbf{C}(12,4) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & -2 & 2 & -1 & 2 & -2 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 2 & -1 & 2 & -2 & -1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & -1 & 2 & -2 & -1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 2 & -2 & -1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 & -1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & -1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & -1 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & -1 & -2 & 2 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & -1 & -2 & 2 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & -1 & -2 & 2 & -1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & -2 & 2 & -1 & 2 & -2 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Путем кронекеровского произведения $K(144) = [\mathbf{C}(12, 4) \otimes \mathbf{C}(12, 4)]$ ортогональных матриц-циркулянт (5) получен ортогональный Q-ичный код, для $Q = \dfrac{q(q-1)}{2} = 6$, длины $n = N^2 = 12^2 = 144$ и мощностью $J = n = 144$. В качестве примера представлены первое K_1 и второе K_2 кодовые слова этого кода.

K_1 = 4, 4, –2, –4, 4, –2, 4, –4, –2, 4, 4, 2, 4, 4, –2, –4, 4, –2, 4, –4, –2, 4, 4, 2, –2, –2, 1, 2, –2, 1, –2, 2, 1, –2, –2, –1, –4, –4, 2, 4, –4, 2, –4, 4, 2, –4, –4, –2, 4, 4, –2, –4, 4, –2, 4, –4, –2, 4, 4, 2, –2, –2, 1, 2, –2, 1, –2, 2, 1, –2, –2, –1, 4, 4, –2, –4, 4, –2, 4, –4, –2, 4, 4, 2, –4, –4, 2, 4, –4, 2, –4, 4, 2, –4, –4, –2, –2, –2, 1, 2, –2, 1, –2, 2, 1, –2, –2, –1, 4, 4, –2, –4, 4, –2, 4, –4, –2, 4, 4, 2, 4, 4, –2, –4, 4, –2, 4, –4, –2, 4, 4, 2, 2, 2, –1, –2, 2, –1, 2, –2, –1, 2, 2, 1;

K_2 = 4, –2, –4, 4, –2, 4, –4, –2, 4, 4, 2, 4, 4, –2, –4, 4, –2, 4, –4, –2, 4, 4, 2, 4, –2, 1, 2, –2, 1, –2, 2, 1, –2, –2, –1, –2, –4, 2, 4, –4, 2, –4, 4, 2, –4, –4, –2, –4, 4, –2, –4, 4, –2, 4, –4, –2, 4, 4, 2, 4, –2, 1, 2, –2, 1, –2, 2, 1, –2, –2, –1, –2, 4, –2, –4, 4, –2, 4, –4, –2, 4, 4, 2, 4, –4, 2, 4, –4, 2, –4, 4, 2, –4, –4, –2, –4, –2, 1, 2, –2, 1, –2, 2, 1, –2, –2, –1, –2, 4, –2, –4, 4, –2, 4, –4, –2, 4, 4, 2, 4, 4, –2, –4, 4, –2, 4, –4, –2, 4, 4, 2, 4, 2, –1, –2, 2, –1, 2, –2, –1, 2, 2, 1, 2.

В результате анализа построенного кода определены кодовые расстояния в метрике Хэмминга [9, 10]: минимальное $d_{\min} = 72$, максимальное $d_{\max} = 120$ и среднее $d_{\text{ср}} = 113{,}6$. Спектр кодовых расстояний $S(d)$ построенного кода представлен в табл. 2.

Таблица 2

Спектр кодовых расстояний ортогонального K(144)-кода

Кодовые расстояния d	72	96	120
Спектр кодовых расстояний $S(d)$	2160	1152	17280

Воспользуемся методологией получения оценки корректирующей способности блочных кодов [10], и получим обобщенную границу Плоткина корректирующей способности произвольных Q-ичных, $Q > 2$, кодов. Для этого различными способами вычислена двойная сумма вида

$$\sum_{i=1}^{J}\sum_{k=1}^{J} \operatorname{dist}(X_i, X_k), \tag{6}$$

где X_i и X_k — кодовые слова кода;

$\operatorname{dist}(X_i, X_k)$ — расстояние Хэмминга между X_i и X_k.

Так как при $X_i \neq X_k$ расстояние $\mathrm{dist}(X_i, X_k) \geq d$, то для эквидистантных кодов сумма (6) удовлетворяет равенству

$$\sum_{i=1}^{J}\sum_{k=1}^{J}\mathrm{dist}(X_i, X_k) = J(J-1)d\,. \qquad (7)$$

С другой стороны, пусть $\mathbf{M}$ обозначает $(J \times n)$-матрицу, строками которой являются все кодовые слова (n, J, d, Q)-кода. Предположим, что ν-й столбец $\mathbf{M}$ содержит одинаковое количество, равное J/Q, каждого из символов $\{1, 2, \ldots, Q\}$. Тогда вклад этого столбца в сумму (6) равен $Q\left(\dfrac{J}{Q}\right)\left(J - \dfrac{J}{Q}\right) = J^2\dfrac{Q-1}{Q}$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{J}\sum_{k=1}^{J}\mathrm{dist}(X_i, X_k) = nJ^2\frac{Q-1}{Q}, \qquad (8)$$

где n — число столбцов в матрице **M**, т.е. длина кода.

Сопоставляя соотношения (7) и (8), получаем две формы записи обобщенной границы Плоткина:

— для мощности (объема) (n, J, d, Q)-кода

$$J \leq Q\left\lceil \frac{d}{Qd - n(Q-1)} \right\rceil, \qquad (9)$$

при условии $Qd > n(Q-1)$;

— для кодового расстояния (n, J, d, Q)-кода

$$d = \left\lceil \frac{J}{J-1} \times \frac{Q-1}{Q} \right\rceil n\,. \qquad (10)$$

Если в (9) подставить основание кода $Q = 2$, получаем выражение для границы Плоткина [10]. Легко также видеть, что если основание кода $Q = J$, то кодовое расстояние $d = n$, и это условие фактически определяет оптимальный код для синтеза оптимальной системы дискретных частотных сигналов (ДЧ-сигналов) [11], поскольку рассматриваются ортогональные коды.

Для построенного ранее $K(144)$-кода кронекеровского произведения значение обобщенной границы Плоткина (10) кодового расстояния $d = 120{,}8$, т.е. построенный код имеет параметры весьма близкие к $d_{\text{ср}} = 113{,}6$ — границе Плоткина. Подобные результаты наблюдались при анализе других $K(n)$-кодов на основе целочисленных последовательностей с идеальной ПАКФ.

В последнее время внимание уделяется синтезу совершенных двоичных решеток, которые нашли многочисленные применения в разнообразных прикладных задачах [3, 12, 13]. Предлагается регулярный метод синтеза совершенных многоуровневых решеток (СМР) на основе целочисленных последовательностей с идеальной ПАКФ. Двумерный массив $\mathbf{G} = \left\| g_{i,j} \right\|$, $i, j = \overline{0, N-1}$, называется совершенной решеткой, если ее двумерная периодическая автокорреляционная функция (ДПАКФ) является идеальной, т.е.

$$\mathbf{R}(\tau_1, \tau_2) = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} g_{i,j}\, g_{i+\tau_1, j+\tau_2} = \begin{cases} E, \text{ при } \tau_1 = \tau_2 = 0, \\ 0, \text{ при других } \tau_1 \text{ и } \tau_2. \end{cases} \qquad (11)$$

где $\tau_1, \tau_2 = \overline{0, N-1}$;

N — длина порождающей последовательности X с идеальной ПАКФ.

Например, в соответствии с Алгоритмом 2, для порождающей последовательности $X = [2, 2, -1, -2, 2, -1, 2, -2, -1, 2, 2, 1]$, на основе первой строки $K_1(144)$ (см. таблицу 2) построена совершенная шестиуровневая, $Q = 6$, решетка порядка $N = 12$

$$\mathbf{G}(12)=\begin{bmatrix}
4 & 4 & -2 & -4 & 4 & -2 & 4 & -4 & -2 & 4 & 4 & 2\\
4 & 4 & -2 & -4 & 4 & -2 & 4 & -4 & -2 & 4 & 4 & 2\\
-2 & -2 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 2 & 1 & -2 & -2 & -1\\
-4 & -4 & 2 & 4 & -4 & 2 & -4 & 4 & 2 & -4 & -4 & -2\\
4 & 4 & -2 & -4 & 4 & -2 & 4 & -4 & -2 & 4 & 4 & 2\\
-2 & -2 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 2 & 1 & -2 & -2 & -1\\
4 & 4 & -2 & -4 & 4 & -2 & 4 & -4 & -2 & 4 & 4 & 2\\
-4 & -4 & 2 & 4 & -4 & 2 & -4 & 4 & 2 & -4 & -4 & -2\\
-2 & -2 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 2 & 1 & -2 & -2 & -1\\
4 & 4 & -2 & -4 & 4 & -2 & 4 & -4 & -2 & 4 & 4 & 2\\
4 & 4 & -2 & -4 & 4 & -2 & 4 & -4 & -2 & 4 & 4 & 2\\
2 & 2 & -1 & -2 & 2 & -1 & 2 & -2 & -1 & 2 & 2 & 1
\end{bmatrix},$$

с идеальной ДПАКФ (11), энергия которой $E = 1296$, и все боковые лепестки равны нулю.

Основные выводы по результатам исследований:

— разработан конструктивный метод синтеза совершенных целочисленных последовательностей с идеальной ПАКФ на основе решения диофантовых уравнений их периодической автокорреляции;

— предложен регулярный метод синтеза совершенных многоуровневых решеток и ортогональных Q-ичных $K(n)$-кодов кронекеровских произведений на основе целочисленных последовательностей с идеальной ПАКФ;

— получена обобщенная граница Плоткина корректирующей способности произвольных блочных Q-ичных кодов и установлено, что предложенные $K(n)$-коды имеют корректирующие свойства, практически близкие к обобщенной границе Плоткина;

— предложенные многоуровневые $K(n)$-коды на основе целочисленных последовательностей с идеальной ПАКФ являются, по-построению, ортогональными и обладают практически привлекательным свойством двухпетлевого циклического N-сдвига, и, следовательно, допускают построение в дальнейшем экономичных схем декодеров по минимуму расстояния Хэмминга.

Литература

1. Ипатов, В.П. Широкополосные системы и кодовое разделение сигналов. Принципы и приложения / В.П. Ипатов. — М.: Техносфера, 2007. — 488 с.
2. Ипатов, В.П. Периодические дискретные сигналы с оптимальными корреляционными свойствами / В.П. Ипатов. — М.: Радио и связь, 1992. — 152 с.
3. Амиантов, И.Н. Избранные вопросы статистической теории связи / И.Н. Амиантов. — М.: Сов. радио, 1971. — 416 с.
4. Luke, H.D. Sequences and Arrays with Perfect Periodic Correlation / H.D. Luke // IEEE transactions on aerospace and electronic system. — 1988. — Vol. 24, May. — P. 287 — 294.
5. Степанов, С.А. Диофантовы уравнения / С.А. Степанов // Тр. МИАН СССР. — 1984. — Т. 168. — С. 31 — 45.
6. Дьяконов, В.П. Mathematica 5.1/5.2/6. Программирование и математические вычисления / В.П. Дьяконов. — М.: ДМК Пресс, 2008. — 576 с.
7. Ланкастер, П. Теория матриц / П. Ланкастер: пер. с англ. — М.: Наука, 1982. — 272 с.
8. Трахтман, А.М. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах / А.М. Трахтман, В.А. Трахтман. — М.: Сов. радио, 1975. — 208 с.
9. Злотник, Б.М. Помехоустойчивые коды в системах связи / Б.М. Злотник. — М.: Радио и связь, 1989. — 232 с.
10. Мак-Вильямс, Ф. Дж. Теория кодов, исправляющих ошибки / Ф.Дж. Мак-Вильямс, Н.Дж. Сдоэн: пер. с англ. — М.: Связь, 1979. — 744 с.
11. Варакин, Л.Е. Системы связи с шумоподобными сигналами / Л.Е. Варакин. — М.: Радио и связь, 1985. — 384 с.
12. Мазурков, М.И. Классы эквивалентных и порождающих совершенных двоичных решеток для CDMA технологий / М.И. Мазурков, В.Я. Чечельницкий // Изв. вузов. Радиоэлектроника. — 2003. — № 5. — С. 54 — 63.
13. Мазурков, М.И. Быстрые ортогональные преобразования на основе совершенных двоичных решеток / М.И. Мазурков, В.Я. Чечельницкий // Изв. вузов. Радиоэлектроника. — 2006. — № 9. — С. 54 — 60.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Баранов П.Е.

Поступила в редакцию 25 июня 2009 г.