УДК 004.021+519.17 **А.В. Коломийчук,** магистр, Одес. нац. политехн. ун-т

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ НУМЕРАЦИИ ГРАФОВ (ЗАДАЧИ 2-СУММА), ПОЛУЧАЕМЫХ ПО СПЕКТРАЛЬНОМУ АЛГОРИТМУ

О.В. Коломійчук. **Аналітична оцінка точності наближених розв'язань задачі екстремальної нумерації графів (задачі 2-сума), які отримуються за спектральним алгоритмом.** Представлено вивід аналітичної оцінки точності наближених рішень комбінаторної екстремальної задачі 2-сума, які отримуються за спектральним алгоритмом. Оцінка засновано на геометричному методі аналізу цієї задачі.

А.В. Коломийчук. **Аналитическая оценка точности приближенных решений задачи экстремальной нумерации графов (задачи 2-сумма), получаемых по спектральному алгоритму**. Представлен вывод аналитической оценки точности приближенных решений комбинаторной экстремальной задачи 2-сумма, получаемых по спектральному алгоритму. Оценка основана на геометрическом методе анализа этой задачи.

A.V. Kolomiychuk. **Analytical estimation for the accuracy of approximate solutions of extremum graph enumeration problem (2-sum problem), obtained by the spectral algorithm.** The derivation of the analytical estimator for the accuracy of approximate solutions of a combinatorial extremum enumeration problem (2-sum problem), obtained according to the spectral algorithm, is presented. The derivation of the estimate is based on the geometrical method of the problem analysis.

Рассматривается комбинаторная задача экстремальной нумерации графов, известная под названием *2-сумма*. Она состоит в минимизации суммы квадратов разностей номеров тех вершин графа, которые соединены ребром, на множестве всевозможных нумераций вершин данного графа [1...3].

Нумерацией графа $G(V,E)$ с n вершинами называется перестановка $\mathbf{p}$ длины n, при этом вершина ν_1 получает номер p_1, вершина ν_2 — номер p_2 и т.д. Множество перестановок $\mathbf{p}$ длины n обозначается как P. Матрица смежностей графа G обозначается как $\boxed{\mathrm{A}} = \{a_{ij}\}$.

Задача 2-сумма может быть описана выражением

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{a_{ij}\neq 0}(p_i - p_j)^2 \to \min, \mathrm{p} \in P. \tag{1}$$

Спектральный алгоритм — приближенный эвристический алгоритм ее решения, основанный на свойствах собственных значений и векторов матриц-лапласианов графов [2,4]. Исследование задачи 2-сумма и спектрального алгоритма актуально в связи с необходимостью решения задач нумерации больших графов с различными целевыми функциями. Понимание свойств спектрального алгоритма может служить основой для разработки эффективных методов решения родственных экстремальных задач, имеющих широкий спектр прикладных применений: переупорядочение больших разреженных матриц, сегментация изображений, кластеризация информационных массивов и др. [1, 3, 5].

Результатами изучения проблемы получения оценок точности приближенных решений, генерируемых спектральным алгоритмом, были либо аналитические оценки, применимые только к отдельным классам графов, либо нестрогие выводы, основанные на вычислительных экспериментах [1, 3].

Исследовано получение аналитической оценки приближенных решений задачи 2-сумма для произвольных графов. Вывод оценки основан на геометрическом методе анализа этой задачи, предполагающем рассмотрение перестановок как векторов Евклидового пространства [6].

Рассматриваемые графы полагаются неориентированными и не имеющими петель. Все векторы считаются столбцами размерности $n \geq 3$; расстояние между векторами понимается в смысле евклидовой нормы; $\mathbf{u}$ — вектор, все элементы которого — единицы [6].

Лапласианом графа G называется матрица:

$$\mathbf{Q} = \boxed{\mathrm{D}} - \boxed{\mathrm{A}}, \tag{2}$$

где D — диагональная матрица степеней вершин.

Собственные значения $\mathbf{Q}$ обозначаются как $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n$. Матрица $\mathbf{Q}$ — сингулярная М-матрица, поэтому $\lambda_i \ge 0$ $(1 \le i \le n)$ [3]. Собственный вектор, соответствующий λ_k $(1 \le k \le n)$, обозначается x_k и называется k-м собственным вектором $\mathbf{Q}$. Все собственные векторы полагаются нормированными: $\|\mathrm{x}_k\| = 1$ $(1 \le k \le n)$. Поскольку $\lambda_1 = 0$, первым собственным вектором $\mathbf{x}_1$ можно считать любой ненулевой вектор. Так как G — связный граф, матрица $\mathbf{Q}$ неприводима.

В дальнейшем используются следующие свойства матрицы $\mathbf{Q}$:

— $\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}$; $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$.; т.к. $\mathbf{Q}$ симметричная;

— $\mathbf{Q}\mathbf{u} = \mathbf{u}^T\mathbf{Q} = 0$, что следует из определения (2).

Целевая функция задачи (1) может быть преобразована к виду [3]

$$\frac{1}{2}\min_{\mathrm{p}\in P}\sum_{a_{ij}\ne 0}(p_i - p_j)^2 = \min_{\mathrm{p}\in P}\left(\sum_{i=1}^{n} d_{ii}p_i^2 - 2\sum_{\substack{j<i\\ a_{ij}\ne 0}} p_i p_j\right) = \min_{\mathrm{p}\in P}\mathbf{p}^T D\mathbf{p} - \mathbf{p}^T A\mathbf{p} = \min_{\mathrm{p}\in P}\mathbf{p}^T\mathbf{Q}\mathbf{p}, \tag{3}$$

т.е. задача 2-сумма сводится к поиску минимума квадратичной формы лапласиана графа на множестве перестановок.

Идея спектрального алгоритма [2] состоит в ослаблении ограничений задачи 2-сумма и доказательстве того, что второй собственный вектор $\mathbf{x}_2$ лапласиана $\mathbf{Q}$ графа G является точным решением этого варианта задачи. Решение затем используется для эффективного по вычислительной сложности приближенного решения исходной задачи (1).

Вводится множество V векторов $\mathbf{v} \in R^n$, удовлетворяющих ограничениям

$$\begin{cases} \mathbf{v}^T\mathbf{v} = \mathbf{p}^T\mathbf{p} = n(n+1)(2n+1)/6, \\ \mathbf{v}^T\mathbf{u} = \mathbf{p}^T\mathbf{u} = n(n+1)/2. \end{cases} \tag{4}$$

Очевидно $P \subset V$.

В соответствии с геометрическим анализом [6] задачи 2-сумма ее *ослабленный (непрерывный) вариант* рассматривается в виде

$$\begin{cases} \mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} \to \min, \\ \mathbf{x} \in X, \end{cases} \tag{5}$$

где множество X векторов $\mathbf{x} \in R^n$ определяется ограничениями

$$\begin{cases} \mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1, \\ \mathbf{x}^T\mathbf{u} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Между множествами V и X устанавливается взаимнооднозначное соответствие, заданное аффинным преобразованием

$$\mathbf{x} = \alpha(\mathbf{v} + \beta\mathbf{u}), \tag{7}$$

где $\alpha = \sqrt{12/n(n^2-1)}$, $\beta = -(n+1)/2$;

обратное преобразование имеет вид

$$\mathbf{v} = (1/\alpha)(\mathbf{x} - \alpha\beta\mathbf{u}) = \alpha'(\mathbf{x} + \beta'\mathbf{u}), \tag{8}$$

где $\alpha' = 1/\alpha = \sqrt{n(n^2-1)/12}$, $\beta' = -\alpha\beta = \sqrt{3(n+1)/n(n-1)}$.

Множество образов перестановок $\mathbf{p} \in P$ обозначается $\tilde{X}$. Векторы-элементы множества $\tilde{X}$ будут называться *представителями* соответствующих перестановок.

Можно эквивалентно рассматривать задачу с целевой функцией вида (5) на множествах (4) или (6), поэтому для задачи (3) эквивалентной будет задача [6]

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}} \to \min, \\ \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{X}, \end{cases} \tag{9}$$

причем в соответствии с (8) значения целевых функций этих задач связаны соотношением

$$\mathbf{p}^T \mathbf{Q} \mathbf{p} = \alpha' \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}} = \sqrt{n(n^2-1)/12}\, \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}} . \tag{10}$$

Минимум (максимум) непрерывной задачи (5) существует и достигается на втором (n-м) собственном векторе лапласиана $\mathbf{Q}$:

$$\arg\min_{\mathbf{x}\in X} \{\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}\} = \mathbf{x}_2 ;\ \arg\max_{\mathbf{x}\in X} \{\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}\} = \mathbf{x}_n ; \tag{11}$$

$$\min_{\mathbf{x}\in X} \{\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}\} = \lambda_2 ;\ \max_{\mathbf{x}\in X} \{\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}\} = \lambda_n . \tag{12}$$

Этот результат является частным случаем теоремы Куранта-Фишера [7] или может быть получен с помощью применения метода множителей Лагранжа.

Вектор $\mathbf{x}$ *индуцирует* вектор $\mathbf{y}$ (или, эквивалентно, $\mathbf{y}$ индуцирует $\mathbf{x}$), если выполняется условие

$$x_i \le x_j \Leftrightarrow y_i \le y_j ,\ 1 \le i, j \le n .$$

Спектральный алгоритм для решения задачи (1) может быть сформулирован следующим образом:

— по заданному графу G составить лапласиан $\mathbf{Q}$ (2);

— вычислить второй собственный вектор $\mathbf{x}_2$ лапласиана $\mathbf{Q}$, т.е. решить задачу (5);

— сгенерировать перестановку, индуцированную вектором $\mathbf{x}_2$.

При генерировании перестановки на последнем шаге ее элемент 1 помещается на то же место, что и минимальный элемент $\mathbf{x}_2$, элемент 2 на место второго по величине элемента $\mathbf{x}_2$ и т.д.

Для целевой функции задачи (9) с использованием (11) и (12) получена оценка сверху [6]:

$$\tilde{\mathbf{x}}^{*T} \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}}^* \le (\mathbf{x}_2^T \tilde{\mathbf{x}}^*)^2 \lambda_2 + (1 - (\mathbf{x}_2^T \tilde{\mathbf{x}}^*)^2) \lambda_n, \tag{13}$$

где $\tilde{\mathbf{x}}^*$ — вектор-представитель перестановки, ближайшей к $\mathbf{x}_2$, т.е. $\mathbf{x}_2$ индуцирует $\tilde{\mathbf{x}}^*$.

Для получения оценки сверху целевой функции задачи (9) при переходе от вектора $\mathbf{x}_2$ к вектору $\tilde{\mathbf{x}}^*$ рассматривается максимально возможное расстояние между произвольным вектором $\mathbf{x} \in X$ и индуцированным им вектором-представителем перестановки $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{X}$.

Теорема 1. Пусть вектор $\mathbf{x} \in X$ индуцирует вектор $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{X}$ и состоит из n_1 отрицательных и n_2 положительных элементов, при этом $n_1 + n_2 = n$, и нулевые элементы учитываются все вместе как положительные или как отрицательные элементы. Тогда справедлива оценка

$$\mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{x}} \ge \sqrt{3 n_1 n_2 / (n^2 - 1)} ,$$

при этом равенство достигается на единственном векторе, в котором все положительные элементы равны друг другу и стоят на тех же местах, что и положительные элементы вектора $\tilde{\mathbf{x}}$, а также все отрицательные элементы равны друг другу и стоят на тех же местах, что и отрицательные элементы вектора $\tilde{\mathbf{x}}$.

Доказательство теоремы основано на следующих упрощениях и вспомогательных утверждениях.

Без ограничения общности предполагается, что вектор $\tilde{\mathbf{x}}$ является представителем единичной перестановки $\mathbf{p}_1 = (1, 2, \ldots, n)$, т.е. $\tilde{\mathbf{x}} = \alpha(\mathbf{p}_1 + \beta \mathbf{u})$. Для любой другой перестановки достаточно лишь соответственно переставить элементы обоих векторов $\mathbf{x}$ и $\tilde{\mathbf{x}}$, что не повлияет на их скалярное произведение. Любой вектор $\mathbf{x}$ из множества X содержит и положительные и отрицательные элементы поскольку $\mathbf{x}^T \mathbf{u} = 0$.

Вводится вектор $\dot{\mathbf{x}} = (\underbrace{c, \ldots, c}_{n_1}, \underbrace{k, \ldots, k}_{n_2})$, $\dot{\mathbf{x}} \in X$; c, k — константы. Теперь утверждение теоремы 1 может быть записано в виде

$$\mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{x}} > \dot{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{x}} = \sqrt{3 n_1 n_2 / (n^2 - 1)}, \quad c < 0, k > 0, \quad \mathbf{x} \ne \dot{\mathbf{x}} ,$$

причем константы c и k должны определяться единственным образом.

Лемма 1. Если два вектора индуцируют друг друга, то после умножения одного из них на положительную константу они также будут индуцировать друг друга.

Доказательство следует из определения индуцирования и того, что после умножения вектора на положительную константу нестрогое неравенство сохраняется между всеми парами его элементов.

Векторы $\boxed{y'}$ и $\boxed{y''}$ имеют *одинаковую структуру*, если

$$y'_i = y'_j \Leftrightarrow y''_i = y''_j \quad (1 \le i, j \le n).$$

Очевидно, что векторы $\boxed{y'}$ и $\boxed{y''}$ и после умножения одного из них на ненулевую константу будут иметь одинаковую структуру.

Лемма 2. Пусть векторы $\boxed{y'}$ и $\boxed{y''}$ имеют одинаковую структуру, и вектор $\boxed{y'}$ индуцирует вектор $\boxed{\tilde{y}}$. Тогда можно выбрать такую достаточно малую константу $a > 0$, что вектор $\boxed{y'''} = \boxed{y'} - a\boxed{y''}$ также будет индуцировать вектор $\boxed{\tilde{y}}$.

Доказательство. Если $y'_i \le y'_j$, тогда при выборе достаточно малой a будет выполняться неравенство

$$y'''_i = y'_i - a y''_i \le y'''_j = y'_j - a y''_j .$$

Таким образом, любая пара элементов вектора $\boxed{y'''}$ будет сохранять нестрогое неравенство, как и соответствующая пара элементов вектора $\boxed{y'}$, а следовательно $\boxed{y'''}$ индуцирует $\boxed{\tilde{y}}$.

Лемма 3. Множество векторов $X_{\mathbf{p}}$ $(X_{\mathbf{p}} \subset X)$, которые индуцируются некоторой фиксированной перестановкой $\mathbf{p}$, замкнуто и ограничено, а следовательно компактно.

Доказательство. Множество $X_{\mathbf{p}}$ ограничено, т.к. является подмножеством ограниченного множества X.

Замкнутость множества $X_{\mathbf{p}}$ доказывается методом от противного на основе рассмотрения его предельных точек. Можно показать, что достаточно малая окрестность любой предельной точки этого множества не может с ним пересекаться. Подробности доказательства опускаются для краткости изложения.

Доказательство теоремы 1. Теорема рассматривается как утверждение о существовании, единственности и структуре решения задачи минимизации

$$\begin{cases} \mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{x}} \to \min, \\ \mathbf{x} \in X_{\mathbf{p}_1}. \end{cases}$$

В силу леммы 3 $X_{\mathbf{p}_1}$ — компактное множество, следовательно, минимум рассматриваемой задачи существует.

В дальнейшем показывается, что минимумом не может быть никакой другой вектор, кроме вектора $\dot{\mathbf{x}}$, и следовательно он является единственным.

Из (6) и (13) следует, что константы c и k, из которых состоит вектор $\dot{\mathbf{x}}$, удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}} = n_1 c^2 + n_2 k^2 = 1, \\ \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{u} = n_1 c + n_2 k = 0 \end{cases} \tag{14}$$

с ограничениями $c < 0, k > 0$.

Из (14) следуют единственно-возможные значения для c и k

$$c = -\sqrt{n_2 / n_1 n}; \quad k = \sqrt{n_1 / n_2 n} . \tag{15}$$

Единственность вектора $\dot{\mathbf{x}}$, состоящего из констант c и k, доказана.

Из (15) и (7) следуют тождества

$$\dot{\mathbf{x}}^T\tilde{\mathbf{x}} = (\underbrace{c,\ldots,c}_{n_1},\underbrace{k,\ldots,k}_{n_2})(\alpha(\underline{p}_1+\beta\underline{u})) = \alpha/2\sqrt{nn_1n_2} = \sqrt{3n_1n_2/(n^2-1)}\,. \qquad (16)$$

Необходимо показать, что $\mathbf{x}^T\tilde{\mathbf{x}} > \dot{\mathbf{x}}^T\tilde{\mathbf{x}}$ для $\forall\mathbf{x}\neq\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}\in X$. Без ограничения общности полагается, что $0\le\mathbf{x}^T\tilde{\mathbf{x}}\le 1$ и $\mathbf{x}\neq-\dot{\mathbf{x}}$.

Для любого вектора $\mathbf{x}$: $\mathbf{x}\neq\dot{\mathbf{x}}$ можно показать существование другого вектора $\mathbf{x}''$: $\mathbf{x}''\neq\mathbf{x}$, $\mathbf{x}''\neq\dot{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x}''\in X$, причем вектор $\mathbf{x}''$ также индуцирует вектор $\tilde{\mathbf{x}}$, и векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}''$ имеют одинаковую структуру. Действительно, поскольку $\mathbf{x}\neq\dot{\mathbf{x}}$, по крайней мере два элемента одного знака в векторе $\mathbf{x}$ не равны друг другу. Таким образом, в общем случае имеется два подмножества элементов этого вектора: $x_i=\ldots=x_{i+r}<x_j=\ldots=x_{j+t}$, $1\le i,j+t\le n$, $j=i+r+1$, причем только элементы $\{x_i,\ldots,x_{i+r}\}$ из всех элементов вектора $\mathbf{x}$ равны x_i, и только элементы $\{x_j=\ldots=x_{j+t}\}$ равны x_j; элементы $x_i,\ldots,x_{i+r},x_j,\ldots,x_{j+t}$ имеют одинаковый знак.

Из вектора $\mathbf{x}$ образуется новый вектор $\mathbf{x}'$ путем прибавления к его элементам $x_i,\ldots,x_{i+r}$ малой положительной константы $\mu=\varepsilon/(r+1)$ и вычитания из элементов $x_j,\ldots,x_{j+t}$ малой положительной константы $\eta=\varepsilon/(t+1)$; все остальные элементы не изменяются. Положительная константа ε выбирается достаточно малой для того, чтобы сохранялось строгое неравенство между элементами рассматриваемых подмножеств: $x_i+\mu=\ldots=x_{i+r}+\mu<x_j-\eta=\ldots=x_{j+t}-\eta$.

Очевидно, векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$ имеют одинаковую структуру, но не равны друг другу.

Ясно, что вектор, $\mathbf{x}'$, так же как и $\mathbf{x}$, индуцирует $\tilde{\mathbf{x}}$. Кроме того, поскольку

$$x_i+\mu+\ldots+x_{i+r}+\mu+x_j-\eta+\ldots+x_{j+t}-\eta = x_i+\ldots+x_{i+r}+x_j\ldots+x_{j+t}\,,$$

выполняется равенство $\mathbf{x}'^T\mathbf{u}=\mathbf{x}^T\mathbf{u}=0$.

В то же время имеет место неравенство $\|\mathbf{x}'\|<\|\mathbf{x}\|=1$, поскольку

$$x_i+\mu<x_j-\eta \;\Rightarrow\; \varepsilon^2/(r+1)+\varepsilon^2/(t+1)<\varepsilon(x_j-x_i)$$

и

$$\begin{aligned}&(x_i+\mu)^2+\ldots+(x_{i+r}+\mu)^2+(x_j-\eta)^2+\ldots+(x_{j+t}-\eta)^2=\\&=x_i^2+\ldots+x_{i+r}^2+x_j^2\ldots+x_{j+t}^2+2\varepsilon(x_i-x_j)+\varepsilon^2/(r+1)+\varepsilon^2/(t+1).\end{aligned}$$

Вводится вектор $\mathbf{x}''$, получаемый нормировкой вектора $\mathbf{x}'$, т.е. $\mathbf{x}''=\mathbf{x}'/\|\mathbf{x}'\|$. Векторы $\mathbf{x}''$ и $\mathbf{x}$, очевидно, имеют одинаковую структуру. При этом $\mathbf{x}''\neq\mathbf{x}$, т.к. деление на $\|\mathbf{x}'\|<1$ изменяет элементы, которые были оставлены неизменными при формировании $\underline{x}'$. Легко проверяется, что $\mathbf{x}''^T\mathbf{x}''=1$ и $\mathbf{x}''^T\mathbf{u}=0$, следовательно, $\mathbf{x}''\in X$. Из леммы 3 следует, что вектор $\mathbf{x}''$ индуцирует вектор $\tilde{\mathbf{x}}$.

Для определенности полагается, что $\tilde{\mathbf{x}}^T\mathbf{x}\le\tilde{\mathbf{x}}^T\mathbf{x}''$, и вводится вектор $\mathbf{x}'''=(\underline{x}-a\mathbf{x}'')\;/\|\underline{x}-a\mathbf{x}''\|$, где a — малая положительная константа (в противном случае вводится вектор $\mathbf{x}'''=(\mathbf{x}''-a\mathbf{x})/\|\mathbf{x}''-a\mathbf{x}\|$, и дальнейшие рассуждения аналогичны). Очевидно, $\mathbf{x}'''\in X$. Из лемм 1 и 2 следует, что вектор $\mathbf{x}'''$ индуцирует $\tilde{\mathbf{x}}$, т.к. константа a выбрана достаточно малой.

Можно показать, что $\tilde{\mathbf{x}}^T\mathbf{x}'''<\tilde{\mathbf{x}}^T\mathbf{x}\le\tilde{\mathbf{x}}^T\mathbf{x}''$. Действительно, поскольку $\|\mathbf{x}\|=\|\mathbf{x}''\|=1$ и $\mathbf{x}\neq\mathbf{x}''$, справедливо $\mathbf{x}^T\mathbf{x}''<1$. Так как $a>0$, то $(1-a)^2<(\mathbf{x}-a\mathbf{x}'')^T(\mathbf{x}-a\mathbf{x}'')$, и следовательно $1-\|\mathbf{x}-a\mathbf{x}''\|<a$. Поскольку $0<\mathbf{x}^T\mathbf{x}\le\mathbf{x}^T\mathbf{x}''$, справедливо строгое неравенство $(1-\|\mathbf{x}-a\mathbf{x}''\|)\mathbf{x}^T\mathbf{x}-a\mathbf{x}^T\mathbf{x}''<0$. Таким образом, выполняется неравенство

$$\tilde{\mathbf{x}}^T\mathbf{x}'''=\mathbf{x}^T(\mathbf{x}-a\mathbf{x}'')/\|\mathbf{x}-a\mathbf{x}''\|<\tilde{\mathbf{x}}^T\mathbf{x}\,.$$

Из описанной процедуры следует, что никакой вектор $\mathbf{x}\neq\dot{\mathbf{x}},\,\mathbf{x}\in X$ не может быть минимумом скалярного произведения $\mathbf{x}^T\tilde{\mathbf{x}}$.

Теорема 1 доказана полностью.

Если допускаются произвольные значения n_1 и n_2, то максимум выражения $\sqrt{3n_1n_2/(n^2-1)}$ в теореме 1, достигается при $n_1 = n_2 = n/2$ (для нечетных значений n приближенное равенство), а минимум достигается при $n_1 = 1, n_2 = n-1$ или $n_1 = n-1, n_2 = 1$. Поэтому имеет место

следствие из теоремы 1. Справедлива оценка

$$\mathbf{x}^T\tilde{\mathbf{x}} \geq \sqrt{3/n+1} .$$

Применение теоремы 1 к оценке (13) приводит к получению аналитической оценки сверху целевой функции задачи (9) на приближенных решениях, получаемых по спектральному алгоритму,

$$\tilde{\mathbf{x}}^{*T}\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{x}}^* \leq \frac{3n_1n_2}{(n^2-1)}\lambda_2 + \left(1 - \frac{3n_1n_2}{(n^2-1)}\right)\lambda_n = \frac{1}{n^2-1}(3n_1n_2\lambda_2 + (n^2 - 3n_1n_2 - 1)\lambda_n) . \quad (16)$$

Асимптотическое поведение (16) существенно зависит от соотношения n_1 и n_2. Имеют место следующие предельные случаи:

— если $n_1 = n_2 = \dfrac{n}{2}$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{\mathbf{x}}^{*T}\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{x}}^* = \dfrac{3}{4}\lambda_2 + \dfrac{1}{4}\lambda_n$,

— если $n_1 = 1,\ n_2 = n-1$ или $n_1 = n-1,\ n_2 = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{\mathbf{x}}^{*T}\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{x}}^* = \lambda_n$.

Таким образом, при допущении произвольных n_1 и n_2 в предельном “худшем” случае при $n \to \infty$ оценка (16) вырождается в тривиальную

$$\tilde{\mathbf{x}}^{*T}\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{x}}^* \leq \max_{\mathbf{x}\in X}\{\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}\} = \lambda_n .$$

При конструктивном применении спектрального алгоритма, в т.ч. при проведении с ним вычислительных экспериментов на лапласианах модельных графов, число положительных и отрицательных элементов n_1 и n_2 во втором собственном векторе $\mathbf{x}_2$ лапласиана $\mathbf{Q}$ естественно будет известным. В этом случае полученная оценка (16) остается нетривиальной, т.е. не равна максимуму ослабленного варианта задачи (5) и, при этом, обладает следующими преимуществами:

— не требуется выполнения дополнительных предположений о структуре графа, например, ограниченности степеней вершин и т.п.;

— позволяет косвенно судить о “патологичности” экземпляра задачи, т.е. чем ближе значение оценки к λ_n, тем потенциально “патологичнее” экземпляр задачи.

При применении оценки (16) к задаче 2-сумма в виде (3) следует учитывать соотношение (10).

Актуальным остается получение более точных нетривиальных оценок погрешности приближенных решений задачи 2-сумма, генерируемых спектральным алгоритмом, которые учитывали бы не только геометрию перестановок, но и специфику матриц-лапласианов.

Литература

1. Safro, I. A multilevel algorithm for the minimum 2-sum problem / I. Safro, D. Ron, A. Brandt // J. of Graph Algorithms and Applications. — 2006. — Vol. 10, № . — P. 237 — 258.
2. Barnard, S.T. A spectral algorithm for envelope reduction of sparse matrices / S.T. Barnard, A. Pothen, H.D. Simon // Numer. Linear Algebra Appl. — 1995. — Vol. 2, № 4. — P.317—334.
3. George, J. A. An analysis of spectral envelope reduction via quadratic assignment problems / J.A. George, A. Pothen // SIAM J. Matrix Anal. Appl. — 1997. — Vol. 18, № . — P.706 — 732.
4. Fiedler, M. A property of eigenvectors of nonnegative symmetric matrices and its application to graph theory / M. Fiedler. // Czech. Math. J. — 1975. — Vol. 25(100). — P. 619 — 633.
5. Ding, C. Linearized cluster assignment via spectral ordering / C. Ding, X. He // Proceedings of the 21st international conference on Machine learning. — Banf, Canada, 2004. — P. 199 — 209.
6. Коломийчук, А. В. Геометрический метод анализа одной задачи экстремальной нумерации графов (задачи 2-сумма) // Тр. Одес. политехн. ун-та. — Одесса, 2009. — Вып. 1(31). — С. 121 — 127.
7. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон; пер. с англ. — М.: Мир, 1989. — 655 с.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Крылов В.Н.

Поступила в редакцию 8 июля 2009 г.