# ПРОБЛЕМЫ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ И ПРИКЛАДНЫХ НАУК

УДК 519.81

**В.В. Крючковский,** канд.физ.-мат.наук, проф., Херсон. нац. техн. ун-т,
**А.В. Усов,** д-р техн.наук, проф., Одес. нац. политехн. ун-т

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПОЛЕЗНОСТИ РЕШЕНИЙ

*В.В. Крючковський, А.В. Усов.* **Теоретичний аналіз інтервальної невизначеності корисності рішень.** Проведено системний аналіз залежності величини інтервалів невизначеності корисності рішень від форми подання вихідної інформації.

*В.В. Крючковский., А.В. Усов.* **Теоретический анализ интервальной неопределенности полезности решений. П**роведен системный анализ зависимости величины интервалов неопределенности полезности решений от формы представления выходной информации.

*V.V. Kruchkovsky, A.V. Usov.* **Theoretical analysis of interval uncertainty of decisions utility.** System analysis of the dependence of the range of intervals of uncertainty of the decisions utility on the form of presentation of the initial information.

**Актуальность проблемы.** Одним из источников информативной неопределенности является принципиальная особенность решения задачи многокритериальной оптимизации. Ситуацию, в которой отсутствует как объективная, так и субъективная информация о характере возможных значений полезности (эффективности) альтернативных решений, называют интервальной неопределенностью, которая характеризуется границами интервала, внутри которого находится значение переменной [1].

В общем случае модель оценивания скалярной полезности многокритериальных альтернатив содержит переменные и параметры различных видов: в статистической, нечеткой форме или в виде интервальных величин [2]. В связи с этим возникает необходимость приведения всех их к одному базису. В качестве базовой можно принять только одну из субъективных форм представления неопределенности.

Такая трансформация связана с увеличением неопределенности при переходе от одной формы к другой, что выражается в увеличении интервалов возможных значений. При этом возникает вопрос о величине погрешности определения обобщенного интервального значения полезности при переходе от более информативных форм к менее информативным.

К настоящему времени эта важная проблема в научной литературе не освещена и поэтому требует своего разрешения.

**Анализ исследований и публикаций.** Первая попытка принятия решений в условиях неопределенности была предпринята Яковом Бернулли (1654-1715) в его книге “Искусство предположений” [3]. Именно на принцип недостаточного основания Я.Бернулли (который гласит, что если распределение вероятностей состояний природы неизвестно, то нет причин считать их различными) опирается критерий недостаточного основания Лапласа. В той или иной ситуации используют также критерии Вальда, Сэвиджа, Гурвица, Ходжа-Лемана [4].

Другое направление исследований ориентировано на повышение достоверности и воспроизводимости результатов прогнозной экспертизы. Так, согласно методу Черчмена-Акоффа альтернативы ранжируются по важности [5]. В методе Терстоуна для получения численных оценок значимости альтернатив используются парные сравнения [6]. Метод фон Неймана-Моргенштерна заключается в получении численных оценок альтернатив с помощью так называемых вероятностных смесей [7].

Общей чертой этих и других методов является ориентация на формирование точечных числовых оценок важности альтернатив. Это связано с тем, что перечисленные методы обслуживают решение частной задачи оценивания важности частных критериев в аддитивной модели оценивания.

В отличие от описанного выше подхода, основанного на замещении интервальных неопределенностей некоторыми гипотетическими стохастическими или нечеткими предположениями лица, принимающего решение (ЛПР), что позволяет, в конечном счете, получить точечные оценки “качества” допустимых альтернатив, в настоящее время развивается подход, основанный на непосредственном анализе интервалов [8]. В рамках этого подхода на всех промежуточных этапах вычислений и анализа рассматриваются интервальные величины, заданные только значениями границ интервала. В терминах задачи принятия решений это означает, что показатели эффективности решения вычисляются в виде интервальных значений и только на последнем этапе принятия решений в случае необходимости трансформируются в точечные решения. Это позволяет сохранить до последнего момента полноту информации о множестве возможных решений.

**Изложение основного материала.** Конечной целью задачи принятия решений является выбор из допустимого множества *X* единственного наиболее эффективного решения.

Для конструктивного решения этой задачи необходимо ввести некоторую метрику, в которой на количественном или качественном уровне можно абсолютно или относительно оценивать “качество” решений и на этой основе сравнивать их между собой. Такую метрику в теории принятия решений называют критерием оценки эффективности решений $K(x)$ [9]. Тогда оптимальное решение на допустимом множестве *X* определяется как

$$x^0 = \arg\operatorname*{extr}_{x\in X} K(x)$$

Здесь символ $\arg\operatorname{extr}K(x)$ обозначает значение аргумента *x*, доставляющее экстремум функции $K(x)$ [10].

Но это условие является необходимым, но не достаточным условием эффективности решения [11]. Для достаточности оно должно быть дополнено условиями своевременности и полноты (комплексности) решения. Требование своевременности означает, что момент $t_p$ принятия решения должен удовлетворять условию $t_p \in [t_n, t_k]$, где $t_n, t_k$ — границы интервала принятия решения. Требование полноты является определяющим и означает, что решение должно приниматься с учетом кортежа частных (локальных) критериев $K(x) = \langle k_i(x)\rangle, i = \overline{1,n}$, каждый из которых характеризует локальный эффект, а их совокупность достаточно характеризует эффективность решения в целом. Таким образом, модель выбора эффективного решения принимает вид

$$x^0 = \arg\operatorname*{extr}_{x\in X}\langle k_i(x)\rangle\,, \quad \forall i = \overline{1,n}\,, \tag{1}$$

где условие своевременности вошло как ограничение в определении допустимого множества решений *X*.

Однако, необходимость максимально полного и глубокого учета факторов и их взаимосвязей, влияющих на решение, приводит к росту сложности, многомерности модели принятия решений и, в конечном счете, к ее многокритериальности. Следует отметить, что при переходе к многокритериальной постановке задачи выбора эффективности решений отмечается рост влияния источников неопределенности (НЕ-факторов), что приводит к снижению адекватности модели.

Несогласованность локальных моделей и необходимость учета слабо формализованных факторов являются дополнительным источником различного рода неопределенностей. Проблема связана с тем, что основным методом анализа сложных систем является декомпозиция на условно-независимые подсистемы (задачи), каждая из которых моделируется отдельно, и затем производится интеграция результатов. Реализация такого подхода порождает ряд дополнительных НЕ-факторов: неточность и неполнота ограничений, определяющих требования к локальным моделям; несогласованность их входов-выходов; разнородность абстрактных языков описания; несогласованность локальных оптимальных решений и т.д.

Таким образом, требование полноты, своевременности и оптимальности получаемого решения трансформируется в необходимость учета в модели задачи принятия решений многокритериальности и неопределенности исходной информации.

При этом необходимо решать специфическую задачу многокритериальной оптимизации (1), решение которой требует дополнительного системного анализа.

В общем случае множество допустимых решений $X$ является объединением двух подмножеств согласованных $X^s$ и компромиссных (Парето-оптимальных) $X^c$ решений[12]:

$$X = X^s \cup X^c; \qquad X^s \cap X^c = \varnothing.$$

При этом, на подмножестве согласованных решений один или несколько частных критериев можно улучшить без ухудшения качества других частных критериев. Это означает, что $X^s$ в принципе не может содержать экстремальных решений, так как каждое $x \in X^s$ можно улучшить хотя бы по одному критерию. В то же время на подмножестве компромиссных решений ни один частный критерий $k_i(x)$ невозможно улучшить без ухудшения качества одного или группы других частных критериев, либо ни один частный критерий нельзя улучшить вообще.

Таким образом, множество допустимых экстремальных решений задачи (1) совпадает с областью компромиссов $X^c$ и, если она не пустая ($X^c \neq \varnothing$), все $x \in X^c$ являются решением задачи. Но в таком случае задача многокритериальной оптимизации не имеет единственного решения и, следовательно, является некорректной по Адамару [13]. Некорректными по Адамару считаются задачи, для которых решение существует, единственно и устойчиво, т.е. в заданной метрике малым изменениям входных переменных соответствуют малые изменения выходных переменных.

Для определения единственного решения задачи многокритериальной оптимизации ее необходимо привести к условно корректной [14] путем привлечения дополнительной, внешней по отношению к исходной задаче, оптимизации.

Из обилия разнообразных подходов к регуляризации задачи многокритериальной оптимизации в качестве основного и наиболее конструктивного можно выделить направление исследований, связанное с трансформацией исходной задачи многокритериальной оптимизации в задачу однокритериальной скалярной оптимизации. Основными методами преобразования многокритериальных оптимизационных задач в однокритериальные являются принцип главного критерия, схема последовательной оптимизации, функционально-стоимостный анализ, метод многофакторного обобщенного оценивания эффективности (полезности) и др. [15].

Из указанных методов наиболее конструктивным и перспективным является метод многофакторного скалярного оценивания, основанный на гипотезе, согласно которой для любого решения $x \in X$ существует скалярная оценка полезности (эффективности) $P(x)$, удовлетворяющая следующим условиям: если $x_1, x_2 \in X$, то $x_1 \succ x_2 \Leftrightarrow P(x_1) > P(x_2)$ [7]. В этом случае скалярная оценка эффективности любого решения $x_j \in X$ определяется функцией полезности вида [16]

$$P^*(x_j) = F[(\lambda_i,\ k_i(x_j)]; \quad j = \overline{1,\ m},$$

где $\lambda_i$ — коэффициенты, приводящие разнородные частные критерии к изоморфному виду, т.е. к одной размерности, одинаковому интервалу возможных значений и т.д.;

$F$ — оператор, определяющий структуру модели многокритериального оценивания (функции полезности);

$x_j \in X$ — множество допустимых решений.

В конкретных случаях возникают затруднения с корректным определением значений коэффициентов изоморфизма $\lambda_i$. В связи с этим на практике широко используется нормализованная функция полезности вида

$$P(x_j) = F[(a_i,\ k_i^n(x_j)],\tag{2}$$

где $k_i^n(x)$ — нормализованные, т.е. приведенные к безразмерному виду, единому интервалу [0, 1] возможных значений и одинаковому направлению доминирования, частные критерии;

$a_i$ — безразмерные коэффициенты относительной важности нормализованных частных критериев. По определению для коэффициентов $a_i$ должны выполняться требования

$$0 \le a_i \le 1, \quad \forall i = \overline{1,\ n}, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \le 1.$$

Предложено несколько различных проблемно-ориентированных форм функции полезности (2), отличающихся структурой, т.е. видом оператора *F*, модели оценивания. Наиболее широко используется аддитивная [7]

$$P(x_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i k_i^n(x_j),\tag{3}$$

мультипликативная [17]

$$P(x_j) = \prod_{i=1}^{n} a_i k_i^n(x_j),\tag{4}$$

модель Кобба-Дугласа [18]

$$P(x_j) = \prod_{i=1}^{n} \left[ k_i^n(x_j) \right]^{\alpha_i}, \quad \alpha_i > 0,\tag{5}$$

мультипликативно-аддитивная [19]

$$P(x_j) = \beta \left[ \sum_{i=1}^{n} a_i k_i^n(x_j) \right] + (1-\beta) \prod_{i=1}^{n} k_i^n(x_j), \quad 0 \le \beta \le 1\tag{6}$$

формы функций полезности.

Все приведенные виды функции полезности являются частными случаями (фрагментами) полинома Колмогорова - Габора [20]

$$P(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i k_i(x) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} k_i(x) k_j(x) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ijl} k_i(x) k_j(x) k_l(x).\tag{7}$$

Для каждой конкретной ситуации принятия решений необходимо решить задачу структурно-параметрической идентификации, т.е. определить конкретный вид модели в рамках полинома Колмогорова-Габора и численные значения параметров. В силу того, что процедура оценивания является субъективной интеллектуальной процедурой, источником необходимой информации для решения задач идентификации модели скалярного оценивания является пользователь — эксперт или лицо, принимающее решение. При этом, независимо от методов получения и обработки экспертной информации, оценки параметров (весовых коэффициентов $a_i$) всегда являются интервальными за счет разброса субъективных мнений экспертов. Что касается значений частных критериев, то большинство из них также удается измерить с точностью до конечных интервальных значений.

В расширенном пространстве переменных полином Колмогорова-Габора является линейным по параметрам [21]. Это означает, что если в полиноме заменить мультипликативные и степенные функции частных критериев новыми переменными $z_s$, то его можно представить в виде линейной аддитивной формы

$$P(x) = \sum_{s=1}^{n} a_s z_s(x).$$

С учетом интервальной неопределенности исходной информации модель оценивания скалярной полезности многокритериальных альтернатив будет иметь вид

$$P(x) = \sum_{s=1}^{n} \bar{a}_s \bar{z}_s(x), \tag{8}$$

где знаками "–" обозначены интервальные неопределенности.

Под интервальной неопределенностью будем понимать исходные данные, измеренные в количественных шкалах, т.е. представленные числовыми оценками. При этом в силу НЕ-факторов их невозможно представить в виде "точечных" величин, а можно представить в виде некоторых связных областей на числовых шкалах, характеризующих возможные значения параметров в исследуемой ситуации [22].

Результаты расчета по любым моделям также будут интервальными числами. В полной мере это касается моделей многофакторного оценивания (3)...(7).

В условиях неопределенности выбор из допустимого множества решений наиболее эффективного осуществляем следующим образом.

С учетом всех интервальных неопределенностей параметров и переменных модели оценивания полезности (эффективности) решений вычисляются интервальные скалярные значения полезности для всех альтернативных решений или непосредственно экстремальное решение и его интервальное значение полезности. Затем на основе этой информации производится детерминизация (выбор точечного решения).

Реализация этого подхода связана с необходимостью вычисления обобщенных интервальных значений полезности по модели (8). Анализ исходных моделей (3)...(7) показывает, что для этого достаточно арифметических операций суммирования и умножения (возведения в степень) интервальных величин.

Интервальные арифметики являются специализированными, т.е. проблемно-ориентированными на классы неопределенности. Общим для всех интервальных величин является допущение, что границы интервалов известны, поэтому основой их классификации являются вид и форма представления информации о характере распределения возможных значений внутри интервала. По этому признаку можно выделить статистическую, нечеткую интервальные неопределенности и интервальные числа.

В первом случае характер распределения возможных значений на интервале определяется видом и параметрами функции распределения вероятностей, которые являются результатом статистической обработки выборки реальных наблюдений [23], поэтому такую неопределенность часто называют объективной.

В том случае, если выборка наблюдений, необходимая для корректного определения объективных статистических характеристик, отсутствует или недостаточна, информация о характере распределения значений в интервале может быть восполнена знаниями опытных экспертов, которые могут быть представлены в виде субъективных предположений о статистических характеристиках распределения или в виде нечетких множеств [24], когда эксперт задает характер распределения возможных значений в интервале в виде функции принадлежности $\mu(y)$. Наконец, ситуацию, когда отсутствует как объективная, так и субъективная информация о характере распределения значений в интервале, будем называть интервальной неопределенностью, характеризующаяся границами интервала, внутри которого находится значение переменной [1].

Если все интервальные неопределенности одного вида, то реализация задачи вычисления интервальной полезности (8) не вызывает затруднений, так как для каждого класса интервальных неопределенностей известны специализированные арифметики. Приведем правила выполнения операций суммирования и умножения для введенных классов интервальных неопределенностей. При этом будем полагать, что границы интервалов возможных значений $a$ и $b$ во всех случаях заданы.

При вероятностной неопределенности вычисления производятся на основании статистических параметров — математического ожидания и дисперсии. Рассмотрим два крайних случая — нормальный и равновероятный законы распределения вероятностей.

Оценка параметров на основе данных о границах интервала для нормального закона распределения определяется формулами [23]:

— математическое ожидание

$$M = \frac{(a+b)}{2}, \tag{9}$$

— среднеквадратическое отклонение

$$\sigma = \frac{b-a}{6}, \tag{10}$$

— дисперсия

$$D = \sigma^2. \tag{11}$$

Соответственно для равновероятного закона распределения

$$M = \frac{(a+b)}{2}, \tag{12}$$

$$D = \frac{(b-a)^2}{12}. \tag{13}$$

Арифметические операции со статистическими параметрами выполняются по известным правилам [23].

Для случая, когда частные критерии и весовые коэффициенты представлены в виде нечетких множеств (нечетких чисел в *RL*-форме [25]), вычисление функции полезности (8) производится по следующим формулам сложения и умножения [24, 25]:

$$(a, \alpha, \beta)_{LR} + (b, \gamma, \delta) \underset{-}{\sim} (a+b, \alpha+\gamma, \beta+\delta)_{LR}, \tag{14}$$

$$\forall A \text{, таких, что, } \mu_A,\ \mu_B \in F(R^+),\ a_1 > 0,\ a_2 > 0,$$

$$(a_1,\ \beta_1,\ b_1)_{LR} \cdot (a_2,\ \beta_2,\ b_2) \underset{-}{\sim} (a_1 a_2, a_1\beta_2 + a_2\beta_1, a_1 b_2 + a_2 b_1)_{LR}, \tag{15}$$

где $a_1,\ a_2$ — левые границы нечетких множеств,

$b_1, b_2$ — правые границы нечетких множеств,

$\beta_1,\ \beta_2$ — модальные значения, при которых функция принадлежности функции равна 1.

Аналитические правила выполнения арифметических операций с интервальными величинами имеют вид [18]

$$\begin{cases} A + B = [a_1 + a_2,\ b_1 + b_2], \\ A \cdot B = [\min\{a_1 a_2\}, \{a_1 b_2\}, \{a_2 b_1\}, \{b_1 b_2\}, \\ \max\{a_1 a_2\}, \{a_1 b_2\}, \{a_2 b_1\}, \{b_1 b_2\}]. \end{cases} \tag{16}$$

В силу особенности решения задачи параметрической идентификации на основе экспертных оценок практически невозможно получить достаточно представительную статистическую выборку для вычисления корректных статистических оценок параметров, поэтому они чаще всего задаются в виде нечетких множеств или просто интервальных величин. Что касается значений частных критериев, то их получают из различных источников и поэтому они могут быть заданы в статистической, нечеткой форме или в виде интервальных величин

**Выводы.** В общем случае модель оценки полезности (8) содержит переменные и параметры различных видов. В связи с этим возникает необходимость приведения всех их к одному базису. По степени информативности интервальные неопределенности можно ранжировать следующим образом:

*статистическая* f *нечеткая* f *интервальная*

неопределенности. Очевидно, что в качестве базовой можно принять только одну из субъективных форм представления неопределенности – нечеткую или интервальную. Такая трансформация связана с увеличением неопределенности при переходе от более информативных форм к менее информативным, что выражается в увеличении интервалов возможных значений.

При этом возникает вопрос о величине погрешности определения обобщенного интервального значения полезности (8) при переходе от более информативных форм к менее информативным.

**Литература**


1. Алефельд, Г. Введение в интервальные вычисления: пер. с англ. / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. — М.: Мир, 1987. — 360 с.
2. Петров, К.Э. Компараторная структурно-параметрическая идентификация моделей скалярного многофакторного оценивания: моногр. / К.Э. Петров, В.В. Крючковский. — Херсон: ОЛДИ-плюс, 2009. — 294 с.
3. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. Т. 2. Математика XVIII столетия. — М.: Наука, 1970. — 300 с.
4. Кунда, Н.Т. Дослідження операцій у транспортних системах: навч. посіб. / Н.Т. Кунда. — К.: Слово, 2008. — 400 с.
5. Churchman C.W. Methods of Inquiry / C.W. Churchman, R.L. Ackoff. — St. Louis : Educational Publishers, 1950. — 134 p.
6. Thurstone, L.L. The measurement of values / L.L. Thurstone. — Chicago : Univ. Chicago Press, 1959. — 268 p.
7. Нейман, Дж. Теория игр и экономическое поведение / Дж. Нейман, О. Моргенштерн. — М.: Наука, 1970. — 124 с.
8. Левин, В.И. Упорядочение интервалов и задачи оптимизации с интервальными параметрами / В.И. Левин // Кибернетика и систем. анализ. — 2004. — № 3. — С. 14 — 24.
9. Ларичев, О.И. Наука и искусство принятия решений / О.И.Ларичев. — М.: Наука, 1979. — 200 с.
10. Хайкин, С. Нейронные сети: полный курс, 2-е изд., испр.: Пер. с англ. / Саймон Хайкин. — М.: И.Д. Вильямс, 2006. — 1104 с.
11. Глушков, В.М. Введение в АСУ / В.М. Глушков. — К.: Техника, 1972. — 312 с.
12. Подиновский, В.В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В.В. Подиновский. — М.: Наука: 1982. — 254 с.
13. Математический энциклопедический словарь / Под ред. Ю.В. Прохорова. — М.: Сов. энцикл., 1988. — 848 с.
14. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. — М.: Наука, 1986. — 288 с.
15. Петров, Е.Г. Методи та засоби прийняття рішень у соціально-економічних системах / Е.Г. Петров, М.В. Новожилова, І.В. Гребеннік. — К.: Техніка, 2004. — 256 с.
16. Фишберн, П. Теория полезности для принятия решений / П. Фишберн. — М.: Наука, 1978. — 352 с.
17. Штойер. Р. Многокритериальная оптимизация. Теория, расчет и приложения / Р. Штойер. — М.: Наука, 1992. — 284 с.
18. Трухаев, Р.И. Инфлюентный анализ и принятие решений / Р.И. Трухаев. — М.: Наука, 1984. — 235 с.
19. Петров, К.Э. Мультипликативно-аддитивная функция оценки полезности / К.Э. Петров // Радиоэлектроника и информатика. — 2000. — № 4. — С. 35 — 36.
20. Колмогоров, А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного и сложения / А.Н. Колмогоров // Докл. АН СССР. — 1957. — Т. 5(114). — С. 953 — 956.
21. Cover, T.M. Geometrical and statistical of systems of linear inequalities with applications in pattern recognition / T.M. Cover // IEEE Trans. On Electronic Computers. — 1965. — № 14. — P. 326 — 334.
22. Стерпин, М.Ю. Метод представления знаний в интеллектуальных системах поддержки экспертных решений / М.Ю. Стерпин, Г.И. Шевелев // Новости искусств. интеллекта. — 2003. — № 4(58), С. 24 — 33.
23. Вентцель, Е.С. Теория вероятности / Е.С. Вентцель. — М.: Наука, 1964. — 576 с.
24. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений / А.Н. Борисов А.Н., А.В. Алексеев, Г.В. Меркурьев и др. — М.: Радио и связь, 1989. — 184 с.
25. Раскин, Л.Г. Нечеткая математика. Основы теории. Приложения / Л.Г.Раскин. — М.: Парус, 2008. — 252 с.


Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Становский А.Л.

Поступила в редакцию 20 мая 2010 г.