

УДК 551.501

**В.Я. Копп**, д-р техн. наук, проф.,  
**Ю.В. Доронина**, канд. техн. наук, доц.,  
**М.В. Замоленов**, инженер,  
Севастоп. нац. техн. ун-т

## ПОЛУМАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ НАДЕЖНОСТИ УКРУПНЕННОЙ ОТРАСЛЕВОЙ СИСТЕМЫ СБОРА И ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

*В.Я. Копп, Ю.В. Доронина, М.В. Замоленов. Напівмарківська модель надійності укрупненої галузевої системи збору і обробки даних.* Розглядається напівмарківська модель надійності для укрупненої галузевої гідрометеорологічної системи, побудована на основі циклу гідрометеорологічних даних. Одержано вираз для часу циклу обслуговування пристрою обробки гідрометеорологічних даних.

*В.Я. Копп, Ю.В. Доронина, М.В. Замоленов. Полумарковская модель надежности укрупненной отраслевой системы сбора и обработки данных.* Рассматривается полумарковская модель надежности для укрупненной отраслевой гидрометеорологической системы, построенная на основе цикла гидрометеорологических данных. Получено выражение для времени цикла обслуживания устройства обработки гидрометеорологических данных

*V.Ya. Kopp, Yu.V. Doronina, M.V. Zamorenov. Semi-Markov reliability model of enlarged data acquisition and processing hydrometeorological branch system.* The semi-Markov reliability model for the large-scale hydrometeorological branch system, built on the basis of hydrometeorological information cycle is examined. There is obtained the formulation as to the time of maintenance cycle of the device for hydrometeorological data processing.

Технология формирования циклов гидрометеорологических данных (ЦГМД) принята в качестве единой системы сбора, обработки, архивации и контроля гидрометеорологических данных Госкомгидромета [1]. Система включает следующие этапы: четыре раза в сутки в установленное время — 0, 6, 12, 18 чч. — данные последовательно собирают — Э<sub>1</sub>, обрабатывают — Э<sub>2</sub>, анализируют — Э<sub>3</sub>, контролируют — Э<sub>4</sub>. Параллельно с этапами Э<sub>1</sub>...Э<sub>3</sub> может быть осуществлен контроль целостности собранных гидрометеорологических данных — Э<sub>5</sub> (рис. 1).

Исследование приведенной системы довольно трудоемкая задача. Объединение процессов обработки гидрометеорологических данных в один общий процесс обработки и введение допущения о том, что диагностирование отказа системы происходит мгновенно, позволяет значительно упростить модель системы [2]. Поскольку передача группы данных происходит строго фиксировано в заданные промежутки времени, то для упрощения построения модели примем, что передача данных по этапам происходит только при наличии свободного устройства следующего этапа. Кроме этого будут исследоваться только процессы сбора и обработки данных.

Под группой гидрометеорологических данных понимается совокупность набора значений параметров, описывающих состояние природной среды: температура воздуха, атмосферное давление, влажность, осадки, направление и сила ветра и др., снимаемых одновременно с устройств предварительной обработки — устройств сбора.

Модель системы строится при следующих предположениях: устройство сбора данных не отказывает, считаем его абсолютно надежным в виду малой вероятности его отказа, при отказе устройства обработки гидрометеорологических данных (УОГМД) обслуживание (анализ) данных прерывается, а после восстановления его работоспособности выполнение этапов продолжается с учетом времени прерванного обслуживания [2]. Под УОГМД в общем случае понимается компьютерная вычислительная система “клиент-сервер”.

Функционирует предлагаемая система сбора и обработки гидрометеорологических данных следующим образом. Время сбора группы гидрометеорологических данных на устройстве сбора — случайная величина (СВ)  $\alpha_1$  с функцией распределения (ФР)  $F_1(t) = P\{\alpha_1 \leq t\}$ .

Время обработки гидрометеорологических данных УОГМД — СВ  $\alpha_2$  с ФР  $F_2(t) = P\{\alpha_2 \leq t\}$ .

Время наработки на отказ УОГМД — СВ  $\alpha_3$  с ФР  $F_3(t) = P\{\alpha_3 \leq t\}$ , время его восстановления — СВ  $\beta_3$  с ФР  $G_3(t) = P\{\beta_3 \leq t\}$ .

Время наработки на отказ УОГМД — это время, в течение которого оно функционирует без отказа, причины которого и вид значения не имеют.

СВ  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3$  предполагаются независимыми, имеющими конечные математические ожидания и дисперсии; у ФР  $F_1(t), F_2(t), F_3(t), G_3(t)$  существуют плотности  $f_1(t), f_2(t), f_3(t), g_3(t)$ .

При отказе УОГМД собственно обработка данных прерывается, после восстановления его работоспособности обслуживание данных продолжается с учетом времени прерванного обслуживания. Считается, что результат функционирования УОГМД до отказа не потерян, поэтому обработка данных после его восстановления продолжается с прерванного места.

Целью построения модели надежности системы является определение ФР  $F_\theta(t)$  СВ — времени  $\theta$  цикла обслуживания группы гидрометеорологических данных с учетом отказов УОГМД.

В дальнейшем используется установившаяся терминология [3]. Для описания функционирования системы используем процесс марковского восстановления (ПМВ)  $\{\xi_n, \theta_n; n \geq 0\}$  и соответствующий ему полумарковский процесс (ПМП)  $\xi(t)$  с множеством возможных состояний.

Граф состояний УОГМД — подсистемы ЦГМД приведен (рис. 2). Фазовое пространство состояний  $E = \{1x, 20x, 21x, 30y, 31y\}$ :

1x — устройство сбора данных готовит данные к обработке;

20x — УОГМД работоспособно, началось обслуживание очередной группы данных; время, оставшееся до отказа УОГМД  $x \geq 0$ ;

21x — состояние (мгновенное), соответствующее моменту окончания обработки группы данных; время, оставшееся до отказа УОГМД  $x \geq 0$ ;

30y — произошло восстановление работоспособности УОГМД и продолжено прерванное обслуживание (обработка) гидрометеорологических данных; время, оставшееся до окончания прерванной обработки, равно  $y \geq 0$ ;

31y — произошел отказ УОГМД, обработка прервана; время, оставшееся до окончания прерванной обработки, равно  $y \geq 0$ .

Определим полумарковское ядро  $Q(t, x, B)$  ПМВ  $\{\xi_n, \theta_n, n \geq 0\}$  в дифференциальной форме [3], где  $\xi_n$  — компонента, образующая однородную цепь Маркова и фиксирующая состояния на  $n$ -м шаге (после  $n$ -го скачка), а вторая компонента  $\theta_n \geq 0$  фиксирует время пребывания в состоянии  $\xi_n$ . Двухкомпонентная последовательность  $\{\xi_n, \theta_n, n \geq 0\}$  является однородной цепью Маркова, переходные вероятности которой не зависят от значений второй компоненты. Эта цепь Маркова называется процессом марковского восстановления (ПМВ):

$$Q(t, 20x, 21dx) = f_2(x - y)1_{x-y}(t)dy, \quad 0 < y < x,$$

где  $1_{x-y}(t)$  — единичное распределение в точке.

$$\begin{aligned} Q(t, 20x, 31dy) &= f_2(x + y)1_x(t)dy, & y > 0, \\ Q(t, 30y, 31dy) &= f_3(x - y)1_{x-y}(t)dy, & 0 < y < x, \\ Q(t, 30y, 21dx) &= f_3(x + y)1_x(t)dy, & y > 0, \\ Q(t, 1x, 20x) &= F_1(t), \\ Q(t, 21x, 1x) &= 1(t), \\ Q(t, 31y, 30y) &= G_3(t). \end{aligned}$$

Представим множество всех состояний системы в виде

$$E = E_+ \cup E_-, \quad E_+ = \{1x, 20x, 30y, 31y\}, \quad E_- = \{21x\}.$$

Время пребывания ПМП  $\xi(t)$  в подмножестве состояний  $E_+$  при условии, что при  $t=0$  система находилась в состоянии  $20x$ , равно времени обработки гидрометеорологических данных.

Найдем распределение времени пребывания ПМП  $\xi(t)$  в подмножестве состояний  $E_+$ .

Пусть  $\tau_{20x}, \tau_{30y}, \tau_{31y}, \tau_{1x}$  — время пребывания  $\xi(t)$  в  $E_+$  с начальным состоянием  $20x, 30y, 31y, 1x$ , соответственно  $\Phi_{20x}(x, t), \Phi_{30y}(y, t), \Phi_{31y}(y, t), \Phi_{1x}(x, t)$  — их функции распределения.

Запишем систему уравнений ПМВ для функций  $\bar{\Phi}_i(x, t) = 1 - \Phi_i(x, t), i = \overline{1, 4}$ , с учетом того, что  $\bar{\Phi}_{30y}(x, t) = \bar{\Phi}_{31y}(x, t) = 1, \bar{\Phi}_{20x}(x, t) = \bar{F}_2(t)^-, \bar{\Phi}_{1x}(x, t) = \bar{F}_1(t)$  при  $0 \leq t < x$ :

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{20x}(x, t) &= \int_0^{t-x} f_2(x + y)\bar{\Phi}_{31y}(y, t - x)dy + \bar{F}_2(t), \quad t \geq x; \\ \bar{\Phi}_{30y}(x, t) &= \int_0^x f_3(x - s)\bar{\Phi}_{31y}(s, t - x + s)ds, \quad t \geq x; \\ \bar{\Phi}_{31y}(x, t) &= \int_0^{t-x} g_3(t - x - \tau)\bar{\Phi}_{30y}(x, x + \tau)d\tau + \bar{G}_3(t - x), \quad t \geq x; \\ \bar{\Phi}_{1x}(x, t) &= \int_0^{t-x} f_1(t - x - \tau)\bar{\Phi}_{20x}(x, x + \tau)d\tau + \bar{F}_1(t), \quad t \geq x. \end{aligned} \tag{1}$$

После подстановки  $\bar{\Phi}_{30x}(x, t)$  второго уравнения из системы (1) в третье

$$\bar{\Phi}_{31y}(x, t) = \int_0^{t-x} g_3(t - x - \tau)d\tau \int_0^x f_3(x - s)\bar{\Phi}_{31y}(s, \tau + s)ds + \bar{G}_3(t - x). \tag{2}$$

Для решения этого уравнение методом последовательных приближений проинтегрируем его  $n$  раз.

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{31y}(x, t) &= \int_0^{t-x} g_3^{*(n)}(t - x - \tau)d\tau \int_0^x f_3^{*(n)}(x - s)\bar{\Phi}_{31y}(s, \tau + s)ds + \bar{G}_3(t - x) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} F_3^{*(k)}(x)[G_3^{*(k)}(t - x) - G_3^{*(k+1)}(t - x)], \end{aligned}$$

где  $g_3^{*(n)}, f_3^{*(n)}$  —  $n$ -кратные свертки плотностей распределений;

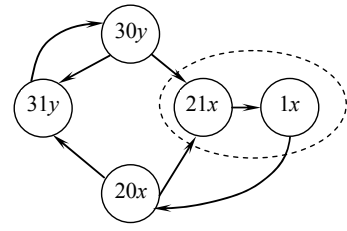


Рис. 2. Граф состояний УОГМД

$F_3^{*(k)}, G_3^{*(k)}$  —  $k$ -кратные свертки функций распределения.

Перейдем в обеих частях равенства к пределу при  $n \rightarrow \infty$ . Предел интеграла в правой части равен нулю при всех  $x$  и  $t$ , т.к.

$$\int_0^{t-x} g_3^{*(n)}(t-x-\tau) d\tau \int_0^x f_3^{*(n)}(x-s) \bar{\Phi}_{31x}(s, \tau+s) ds \leq F_3^{*(n)}(x) G_3^{*(n)}(t-x) \leq F_3^{*(n)}(x),$$

$F_3^{*(n)}(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Таким образом,

$$\bar{\Phi}_{31y}(x, t) = \bar{G}_3(t-x) + \sum_{n=1}^{\infty} F_3^{*(n)}(x) [G_3^{*(n)}(t-x) - G_3^{*(n+1)}(t-x)], t \geq x. \tag{3}$$

Подставим (3) во второе уравнение системы уравнений (1), тогда

$$\bar{\Phi}_{30y}(x, t) = F_3(x) \bar{G}_3(t-x) + \sum_{n=1}^{\infty} F_3^{*(n+1)}(x) [G_3^{*(n)}(t-x) - G_3^{*(n+1)}(t-x)], t \geq x,$$

и в первое уравнение, тогда

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{20x}(x, t) &= \int_0^{t-x} f_2(x+y) \left[ \bar{G}_3(t-x) + \sum_{n=1}^{\infty} F_3^{*(n)}(x) [G_3^{*(n)}(t-x) - G_3^{*(n+1)}(t-x)] \right] dy + \bar{F}_2(t) = \\ &= \int_0^{t-x} f_2(x+y) \bar{G}_3(t-x) dy + \bar{F}_2(t) + \int_0^{t-x} f_2(x+y) \sum_{n=1}^{\infty} F_3^{*(n)}(x) [G_3^{*(n)}(t-x) - G_3^{*(n+1)}(t-x)] dy. \end{aligned} \tag{4}$$

Подставив выражение (4) в функцию распределения  $\bar{\Phi}_{1x}(x, t)$ , получим

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{1x}(x, t) &= \int_0^{t-x} f_1(t-x-\tau) d\tau \left[ \int_0^{t-x} f_2(x+y) \bar{G}_3(t-x) dy + \bar{F}_2(t) + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{t-x} f_2(x+y) \sum_{n=1}^{\infty} F_3^{*(n)}(x) [G_3^{*(n)}(t-x) - G_3^{*(n+1)}(t-x)] dy \right] + \bar{F}_1(t) = \\ &= \int_0^{t-x} f_1(t-x-\tau) d\tau \int_0^{t-x} f_2(x+y) \bar{G}_3(t-x) dy + \int_0^{t-x} f_1(t-x-\tau) d\tau \bar{F}_2(t) + \\ &\quad + \int_0^{t-x} f_1(t-x-\tau) d\tau \int_0^{t-x} f_2(x+y) \sum_{n=1}^{\infty} F_3^{*(n)}(x) [G_3^{*(n)}(t-x) - G_3^{*(n+1)}(t-x)] dy + \bar{F}_1(t). \end{aligned} \tag{5}$$

— В выражении (5) преобразуем первое слагаемое

$$\int_0^{t-x} f_1(t-x-\tau) d\tau \int_0^{t-x} f_2(x+y) \bar{G}_3(t-x) dy = \int_0^{t-x} f_1(t-x-\tau) d\tau \int_x^t f_2(s) \bar{G}_3(t-s) ds = F_1(t-x) \int_x^t f_2(s) \bar{G}_3(t-s) ds;$$

— интегрируем по частям второе слагаемое

$$\begin{aligned} \bar{F}_2(t) \int_0^{t-x} f_1(t-x-\tau) d\tau &= \left[ \begin{matrix} t-x=k; k-\tau=z; d\tau=-dz \\ k=z+\tau; \tau=0: z=k; \tau=k: z=0 \end{matrix} \right] = \\ &= \bar{F}_2(t) \int_k^0 f_1(z) [-dz] = \bar{F}_2(t) \int_0^k f_1(z) dz = \bar{F}_2(t) F_1(t-x); \end{aligned}$$

— третье слагаемое с использованием результатов предыдущих преобразований

$$\begin{aligned} \int_0^{t-x} f_1(t-x-\tau) d\tau \int_0^{t-x} f_2(x+y) \sum_{n=1}^{\infty} F_3^{*(n)}(y) [G_3^{*(n)}(t-x) - G_3^{*(n+1)}(t-x)] dy = \\ = F_1(t-x) \int_0^{t-x} f_2(x+y) \sum_{n=1}^{\infty} F_3^{*(n)}(y) [G_3^{*(n)}(t-x) - G_3^{*(n+1)}(t-x)] dy. \end{aligned}$$

Таким образом, решение системы (1) примет вид

$$\begin{aligned}
 \bar{\Phi}_{1x}(x, t) &= F_1(t-x) \int_x^t f_2(s) \bar{G}_3(t-s) ds + \bar{F}_2(t) F_1(t-x) + \bar{F}_1(t) + \\
 &+ F_1(t-x) \int_0^{t-x} f_2(x+y) \sum_{n=1}^{\infty} F_3^{*(n)}(y) [G_3^{*(n)}(t-x) - G_3^{*(n+1)}(t-x)] dy, t \geq x; \\
 \bar{\Phi}_{20x}(x, t) &= \int_0^{t-x} f_2(x+y) \bar{G}_3(t-x) dy + \bar{F}_2(t) + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t-x} f_2(x+y) F_3^{*(n)}(y) [G_3^{*(n)}(t-x-y) - G_3^{*(n+1)}(t-x-y)] dy, t \geq x; \\
 \bar{\Phi}_{30y}(x, t) &= F_3(x) \bar{G}_3(t-x) + \sum_{n=1}^{\infty} F_3^{*(n+1)}(x) [G_3^{*(n)}(t-x) - G_3^{*(n+1)}(t-x)], t \geq x; \\
 \bar{\Phi}_{31y}(x, t) &= \bar{G}_3(t-x) + \sum_{n=1}^{\infty} F_3^{*(n)}(x) [G_3^{*(n)}(t-x) - G_3^{*(n+1)}(t-x)], t \geq x.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Формулы (6) определяют ФР  $\bar{\Phi}_1(x, t)$  времени цикла обслуживания УОГМС порции гидрометеорологических данных, которая зависит от начального состояния  $20x$ , содержащего непрерывную компоненту  $x$ . Для того, чтобы получить ФР  $F_0(t)$  СВ — времени  $\theta$  цикла обслуживания порции данных — вне зависимости от начального состояния УОГМД, проведем операцию усреднения по формуле

$$\bar{F}_0(t) = \frac{\int_{E_-} \rho(dx) \int_{E_+} \bar{F}_y(t) P(x, dy)}{\int_{E_-} P(x, E_+) \rho(dx)},
 \tag{7}$$

где  $\rho(dx)$  — стационарное распределение вложенной цепи Маркова (ВЦМ)  $\{\xi_n, n \geq 0\}$ ;

$P(x, dy)$  — вероятности переходов ВЦМ;

$F_y(t)$  — ФР времени пребывания в состоянии  $y$ .

Чтобы воспользоваться формулой (7), необходимо знать стационарное распределение ВЦМ  $\{\xi_n, n \geq 0\}$ . Вероятности переходов ВЦМ

$$\begin{aligned}
 p_{20x}^{21y} &= f_2(x-y), \quad 0 < y < x, & p_{20x}^{31y} &= f_2(x+y), \quad y > 0, \\
 p_{20x}^{21y} &= f_2(x-y), \quad 0 < y < x, & p_{30x}^{21y} &= f_3(x+y), \quad y > 0, \\
 p_{21x}^1 &= f_2(t), & P_1^{20x} &= 1, & P_{31x}^{30x} &= 1.
 \end{aligned}$$

Обозначим через  $\rho_1(x)$ ,  $\rho_{20}(x)$ ,  $\rho_{21}(x)$ ,  $\rho_{30}(x)$ ,  $\rho_{31}(x)$  плотности стационарного распределения ВЦМ для состояний  $1x$ ,  $20x$ ,  $21x$ ,  $30x$ ,  $31x$ , соответственно. Следует отметить, что состояния  $1x$  и  $21x$  будут рассматриваться как подмножество, в котором частота попадания в состояние  $1x$  соответствует частоте попадания в мгновенное состояние  $21x$ , представляющее собой состояние окончания обработки порции гидрометеорологических данных с обязательным переходом в состояние, соответствующее физическому процессу сбора новой порции гидрометеорологических данных, обозначенному  $21x$ .

Система интегральных уравнений для плотностей стационарных распределений будет иметь вид

$$\begin{cases}
 \rho_{21}(x) = \int_x^{\infty} f_2(y-x) \rho_{20}(y) dy + \int_0^{\infty} f_3(x+y) \rho_{30}(y) dy; \\
 \rho_{31}(x) = \int_x^{\infty} f_3(y-x) \rho_{30}(y) dy + \int_0^{\infty} f_2(x+y) \rho_{20}(y) dy; \\
 \rho_1(x) = \rho_{20}(x) = \rho_{21}(x), \rho_{30}(x) = \rho_{31}(x); \\
 \int_0^{\infty} (\rho_1(x) + \rho_{20}(x) + \rho_{21}(x) + \rho_{30}(x) + \rho_{31}(x)) dx = 1.
 \end{cases}$$

Известно, что решение этой системы определяется формулами [3]

$$\begin{aligned} \rho_{20}(x) &= \rho_{21}(x) = \rho_1(x) = \rho_0 \overline{F_3}(x), \\ \rho_{30}(x) &= \rho_{31}(x) = \rho_0 \overline{F_2}(x), \end{aligned} \tag{8}$$

где постоянная  $\rho_0$  находится в явном виде из условия нормировки.

Найдем выражения, входящие в числитель и знаменатель формулы (7)

$$\int_{E_-} P(x, E_+) \rho(dx) = \rho_0 M \alpha_3, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} & \int_{E_-} \rho(dx) \int_{E_+} \overline{F}_y(t) P(x, dy) = \rho_0 \int_0^\infty \overline{F}_3(x) \overline{\Phi}_{1x}(x, t) dx = \\ & = \rho_0 \int_0^t \overline{F}_3(x) \overline{F}_2(t-x) F_1(t-x) dx + \rho_0 \int_0^\infty \overline{F}_3(x) \left( F_1(t-x) \int_x^t f_2(s) \overline{G}_3(t-s) ds \right) dx + \\ & + \rho_0 \left\{ \int_0^t \overline{F}_3(x) F_1(t-x) \int_0^{t-x} f_2(x+y) \sum_{n=1}^\infty F_3^{*(n)}(y) [G_3^{*(n)}(t-x-y) - G_3^{*(n+1)}(t-x-y)] dy \right\} dx + \\ & + \rho_0 \int_0^\infty \overline{F}_3(x) \overline{F}_1(t) dx = \\ & = \rho_0 \left[ \overline{F}_2(t) \int_0^t \overline{F}_3(x) F_1(t-x) dx + \int_0^t \overline{F}_3(x) F_1(t-x) dx \int_x^t f_2(s) \overline{G}_3(t-s) ds + M \alpha_3 \overline{F}_1(t) + \right. \\ & \left. + \int_0^t \overline{F}_3(x) F_1(t-x) dx \int_0^{t-x} f_2(x+y) \sum_{n=1}^\infty F_3^{*(n)}(y) [G_3^{*(n)}(t-x-y) - G_3^{*(n+1)}(t-x-y)] dy \right] = \tag{10} \\ & = \rho_0 \left[ \overline{F}_2(t) \int_0^t \overline{F}_3(x) F_1(t-x) dx + \int_0^t \overline{F}_3(x) F_1(t-x) dx \int_x^t f_2(s) \overline{G}_3(t-s) ds + M \alpha_3 \overline{F}_1(t) + \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^\infty \int_0^t \overline{F}_3(x) F_1(t-x) dx \int_0^{t-x} f_2(x+y) F_3^{*(n)}(y) [G_3^{*(n)}(t-x-y) - G_3^{*(n+1)}(t-x-y)] dy \right] = \\ & = \rho_0 \left[ \overline{F}_2(t) \int_0^t \overline{F}_3(x) F_1(t-x) dx + \int_0^t \overline{F}_3(x) F_1(t-x) dx \int_x^t f_2(s) \overline{G}_3(t-s) ds + M \alpha_3 \overline{F}_1(t) + \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^\infty \int_0^t \overline{F}_3(x) F_1(t-x) dx \int_x^{t-s} f_2(s) F_3^{*(n)}(s-x) ds \int_0^{t-s} g_3^{*(n)}(y) \overline{G}_3(t-s-y) dy \right]. \end{aligned}$$

Подставляя (9), (10) в (7), получаем выражение для функции  $\overline{F}_\theta(t) = 1 - F_\theta(t)$ :

$$\begin{aligned} \overline{F}_\theta(t) &= \frac{1}{M \alpha_3} \left[ \overline{F}_2(t) \int_0^t \overline{F}_3(x) F_1(t-x) dx + \int_0^t \overline{F}_3(x) F_1(t-x) dx \int_x^t f_2(s) \overline{G}_3(t-s) ds + \right. \\ & \left. + M \alpha_3 \overline{F}_1(t) + \sum_{n=1}^\infty \int_0^t \overline{F}_3(x) F_1(t-x) dx \int_x^{t-s} f_2(s) F_3^{*(n)}(s-x) ds \int_0^{t-s} g_3^{*(n)}(y) \overline{G}_3(t-s-y) dy \right] = \tag{11} \\ & = \frac{1}{M \alpha_3} \left[ \overline{F}_2(t) \int_0^t \overline{F}_3(x) F_1(t-x) dx + \int_0^t \overline{F}_3(x) F_1(t-x) dx \int_x^t f_2(s) \overline{G}_3(t-s) ds + \right. \\ & \left. + M \alpha_3 \overline{F}_1(t) + \sum_{n=1}^\infty \int_0^t \overline{F}_3(x) F_1(t-x) dx \int_x^{t-s} f_2(s) F_3^{*(n)}(s-x) ds \int_s^{t-s} g_3^{*(n)}(y-s) \overline{G}_3(t-y) dy \right]. \end{aligned}$$

Численное моделирование выражения (11) проведено на рис. 3.

Математическое ожидание, полученное при расчете ФР  $F_\theta(t)$  СВ времени  $\theta$  цикла обслуживания вне зависимости от начального состояния  $M\theta = \int_0^\infty \overline{F}_\theta(t) dt = 20,485$ .

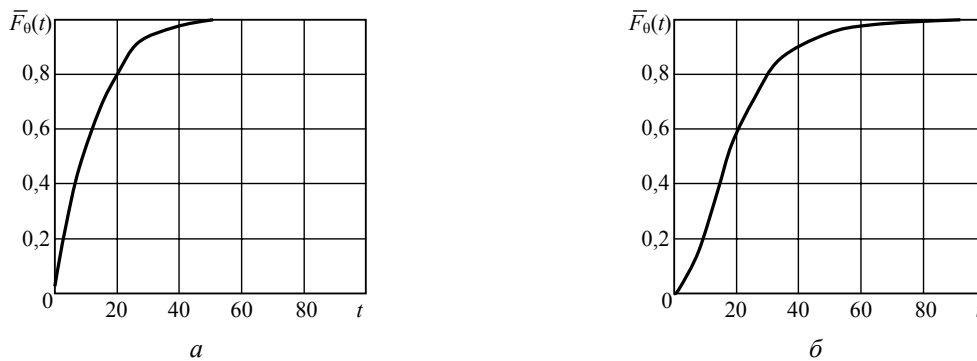


Рис. 3. Численное моделирование выражения (11) для экспоненциального закона распределения СВ (а) и распределения Эрланга (б)

Определим стационарное распределение ПМП по формулам [3]:

$$\pi(B) = \int_B \rho(dx)\theta(x) / \theta,$$

где  $\theta = \int_x \rho(dx)\theta(x)$ .

$$\theta_{1x} = \alpha_1; \theta_{21x} = 1; \theta_{20x} = \alpha_2 \wedge x; \theta_{30x} = \alpha_3 \wedge y; \theta_{31x} = \beta_3.$$

В результате

$$\begin{aligned} \pi_{1x} &= \frac{\rho_{1x}\theta_{1x}}{\theta} = \frac{\alpha_1\rho_0\bar{F}_3(x)}{\theta}; \\ \pi_{20x} &= \frac{\int_0^\infty \rho_{20x}(x)\theta_{20x}(x)dx}{\theta} = \frac{\rho_0 \int_0^\infty F_3(x)\theta_{20x}(x)dx}{\theta}; \\ \pi_{30x} &= \frac{\int_0^\infty \rho_{30x}(x)\theta_{30x}(x)dx}{\theta} = \frac{\rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_2(x)\theta_{30x}(x)dx}{\theta}; \\ \pi_{31x} &= \frac{\rho_{31x}\theta_{31x}}{\theta} = \frac{\beta_3\rho_0\bar{F}_2(x)}{\theta}; \end{aligned} \tag{12}$$

$$\theta = \rho_{1x}\theta_{1x} + \int_0^\infty \rho_{20x}(x)\theta_{20x}(x)dx + \int_0^\infty \rho_{30x}(x)\theta_{30x}(x)dx + \rho_{31x}\theta_{31x}.$$

После преобразования выражения (12):

$$\begin{aligned} \theta &= \rho_{1x}\theta_{1x} + \rho_{31x}\theta_{31x} + \int_0^\infty \rho_{20x}(x)\theta_{20x}(x)dx + \int_0^\infty \rho_{30x}(x)\theta_{30x}(x)dx = M\alpha_1\rho_0\bar{F}_3(x) + \\ &+ M\beta_3\rho_0\bar{F}_2(x) + \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_3(x)\theta_{20x}(x)dx + \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_2(x)\theta_{30x}(x)dx = \rho_0(M\alpha_1\bar{F}_3(x) + \\ &+ M\beta_3\bar{F}_2(x) + \int_0^\infty \bar{F}_3(x)\theta_{20x}(x)dx + \int_0^\infty \bar{F}_2(x)\theta_{30x}(x)dx). \end{aligned}$$

Так как  $\bar{F}_{\theta_{20x}} = \bar{F}_2(t)\bar{F}_x(t)$ , где  $\bar{F}_x(t) = \bar{I}_x(t)$ , причем  $\bar{I}_x(t) = \begin{cases} \bar{F}_2(t), t < x \\ 0, t \geq x \end{cases}$ , то

$$\begin{aligned} \theta &= \rho_0(M\alpha_1\bar{F}_3(x) + M\beta_3\bar{F}_2(x) + \int_0^\infty \bar{F}_3(x)\theta_{20x}(x)dx + \int_0^\infty \bar{F}_2(x)\theta_{30x}(x)dx) = \\ &= \rho_0(M\alpha_1\bar{F}_3(x) + M\beta_3\bar{F}_2(x) + \int_0^\infty \bar{F}_3(x) \int_0^x \bar{F}_2(t)dt dx + \int_0^\infty \bar{F}_2(x) \int_0^x \bar{F}_3(t)dt dx) = \\ &= \rho_0(M\alpha_1\bar{F}_3(x) + M\beta_3\bar{F}_2(x) + M\alpha_2 M\alpha_3). \end{aligned} \tag{13}$$

Учитывая (13), получим следующие выражения для стационарного распределения ПМП:

$$\pi_{1x} = \frac{M\alpha_1 \bar{F}_3(x)}{M\alpha_1 \bar{F}_3(x) + M\beta_3 \bar{F}_2(x) + M\alpha_2 M\alpha_3}; \quad (14)$$

$$\pi_{31x} = \frac{M\beta_3 \bar{F}_2(x)}{M\alpha_1 \bar{F}_3(x) + M\beta_3 \bar{F}_2(x) + M\alpha_2 M\alpha_3}; \quad (15)$$

$$\pi_{20x} = \frac{\int_0^{\infty} \bar{F}_3(x) \theta_{20x}(x) dx}{M\alpha_1 \bar{F}_3(x) + \beta_3 \bar{F}_2(x) + M\alpha_2 M\alpha_3} = \frac{\int_0^{\infty} \bar{F}_3(x) \int_0^x \bar{F}_2(t) dt dx}{M\alpha_1 \bar{F}_3(x) + M\beta_3 \bar{F}_2(x) + M\alpha_2 M\alpha_3}; \quad (16)$$

$$\pi_{30x} = \frac{\int_0^{\infty} \bar{F}_2(x) \theta_{30x}(x) dx}{M\alpha_1 \bar{F}_3(x) + M\beta_3 \bar{F}_2(x) + M\alpha_2 M\alpha_3} = \frac{\int_0^{\infty} \bar{F}_2(x) \int_0^x \bar{F}_3(t) dt dx}{M\alpha_1 \bar{F}_3(x) + M\beta_3 \bar{F}_2(x) + M\alpha_2 M\alpha_3}. \quad (17)$$

Преобразуем числитель выражения (16)

$$\int_0^{\infty} \bar{F}_3(x) \int_0^x \bar{F}_2(t) dt dx = \int_0^x \bar{F}_2(t) dt \int_0^{\infty} \bar{F}_3(x) dx = M\alpha_3 \int_0^x \bar{F}_2(t) dt = M\alpha_3 P\{M\alpha_2 < x\}.$$

После аналогичных преобразований числителя выражения (17)

$$\pi_{20x} = \frac{\int_0^{\infty} \bar{F}_3(x) \int_0^x \bar{F}_2(t) dt dx}{M\alpha_1 \bar{F}_3(x) + M\beta_3 \bar{F}_2(x) + M\alpha_2 M\alpha_3} = \frac{M\alpha_3 P\{M\alpha_2 < x\}}{M\alpha_1 \bar{F}_3(x) + M\beta_3 \bar{F}_2(x) + M\alpha_2 M\alpha_3};$$

$$\pi_{30x} = \frac{\int_0^{\infty} \bar{F}_2(x) \int_0^x \bar{F}_3(t) dt dx}{M\alpha_1 \bar{F}_3(x) + M\beta_3 \bar{F}_2(x) + M\alpha_2 M\alpha_3} = \frac{M\alpha_2 P\{M\alpha_3 < x\}}{M\alpha_1 \bar{F}_3(x) + M\beta_3 \bar{F}_2(x) + M\alpha_2 M\alpha_3}.$$

Таким образом, построена полумарковская модель надежности для укрупненной отраслевой гидрометеорологической системы на основе цикла гидрометеорологических данных (ЦГМД) при введении ограничений на вид исходного графа рассматриваемой системы. Получено аналитическое выражение для времени цикла обслуживания устройства обработки гидрометеорологических данных, рассчитано математическое ожидание времени цикла обслуживания вне зависимости от начального состояния, получены выражения для стационарного распределения ПМП.

## Литература

1. Доронина, Ю.В. Автоматизация цикла гидрометеорологических данных / Ю.В. Доронина // Сб. научн. тр. УкрНИГМИ. — К.: УкрНИГМИ, 1999. — С. 250 — 254.
2. Копп, В.Я. Моделирование переналаживаемых автоматизированных производственных систем / В.Я. Копп, Ю.Е. Обжерин, А.И. Песчанский, О.П. Чуб. — Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2007. — 232 с.
3. Корольок, В.С. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем / В.С. Корольок, А.Ф. Турбин. — К.: Наук. думка, 1982. — 236 с.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Гогунский В.Д.

Поступила в редакцию 25 марта 2010 г.