

УДК 539.3

Н.Г. Сурьянинов, канд. техн. наук, доц.,
Г.Н. Козолуп, магистр,
Одес. нац. политехн. ун-т

МЕТОД КАНТОРОВИЧА-ВЛАСОВА В ЗАДАЧЕ ИЗГИБА РЕБРИСТЫХ ПЛАСТИН

М.Г. Сур'янінов, Г.М. Козолуп. Метод Канторовича-Власова в задачі вигину ребристих пластин. Пропонується застосування методу граничних елементів для розрахунку ребристих пластин. Перехід від двовимірної задачі до одномірної виконаний з використанням варіаційного методу Канторовича-Власова. Розглянуто всі шість можливих варіантів коренів характеристичного рівняння. Запропоновано загальну концепцію обліку ребер у двох напрямках.

Н.Г. Сурьянинов, Г.Н. Козолуп. Метод Канторовича-Власова в задаче изгиба ребристых пластин. Предлагается применение метода граничных элементов для расчета ребристых пластин. Переход от двумерной задачи к одномерной выполнен с использованием вариационного метода Канторовича-Власова. Рассмотрены все шесть возможных вариантов корней характеристического уравнения. Предложена общая концепция учета ребер в двух направлениях.

N.G. Surianinov, G.N. Kozolup. Kantorovich-Vlasov method in the problem of ridge plates bending. It is offered to use a boundary elements method for calculation of ridge plates. Transition from a two-dimensional problem to the one-dimensional is executed by means of Kantorovich-Vlasov variation method. All six possible variants of roots of the characteristic equation are considered. The general concept of the account of edges in two directions is stated.

Ребристая пластина представляет собой соединение двух разных типов взаимодействующих при деформации элементов — собственно пластины и ребер (одномерных стержней). Напряженно-деформированное состояние каждого из этих элементов, обусловленное в рамках известных прикладных теорий, имеет свои особенности. В связи с этим при изучении ребристых пластин возникает необходимость построения специальной теории, которая учитывает основные особенности, присущие отдельным элементам, и условия их общей работы. Представляется, что для решения этой задачи может оказаться эффективным метод граничных элементов.

Дифференциальное уравнение изгиба пластинки в этом случае принимает вид [3]

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{\bar{q}}{D}, \quad (1)$$

где $W = W(x, y)$ — прогиб пластинки;

$\bar{q} = \bar{q}(x, y)$ — свободный член уравнения, учитывающий не только внешние нагрузки, но и наличие подкрепляющих ребер в продольном направлении, т.е. параллельном оси y (рис. 1).

Применим для (1) метод Канторовича-Власова, то есть прогиб срединной плоскости пластинки будем искать в виде

$$W(x, y) = W_1(y)X_1(x) + W_2(y)X_2(x) + \dots + W_k(y)X_k(x). \quad (2)$$

Усечем ряд (2) до одного члена и возьмем вариацию прогиба только по направлению y , что равносильное принятию расчетной схемы пластинки, которая имеет беско-

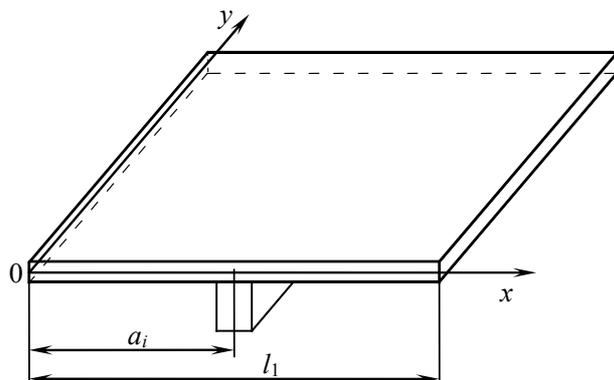


Рис. 1. Пластинка с ребром в продольном направлении

нечное число степеней свободы в одном направлении и одну степень свободы в другом. Тогда прогиб точки срединной плоскости пластины будет имеет вид

$$W(x, y) = W(y)X(x). \tag{3}$$

Функцию поперечного распределения прогибов пластины $X(x)$ нужно выбирать так, чтобы она максимально точно описывала форму выгнутой поверхности пластины в направлении оси x . Этому требованию в полной мере удовлетворяют кривые прогиба балки, которая имеет такие же условия опирания, как и пластина, в направления оси x .

Выделим два способа для выбора функции прогибов $X(x)$: статический и динамический. При статическом способе прогиб балки определяется приложенной к ней статической нагрузкой (рис. 2).

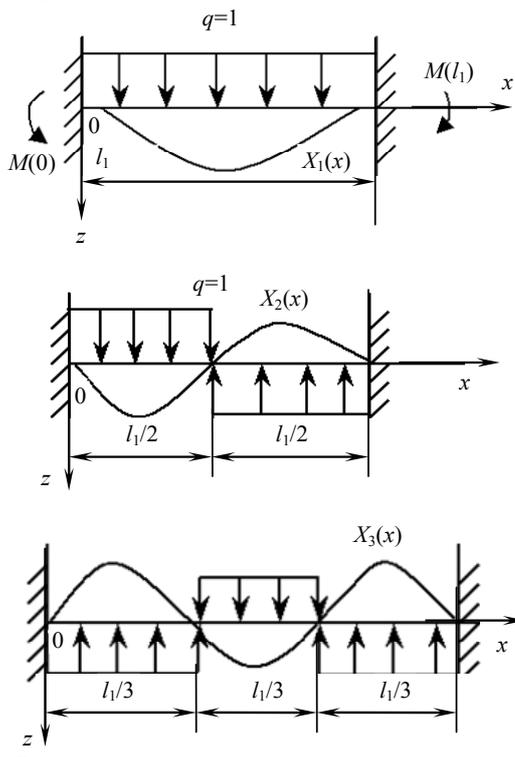


Рис. 2. Функции прогибов (статика)

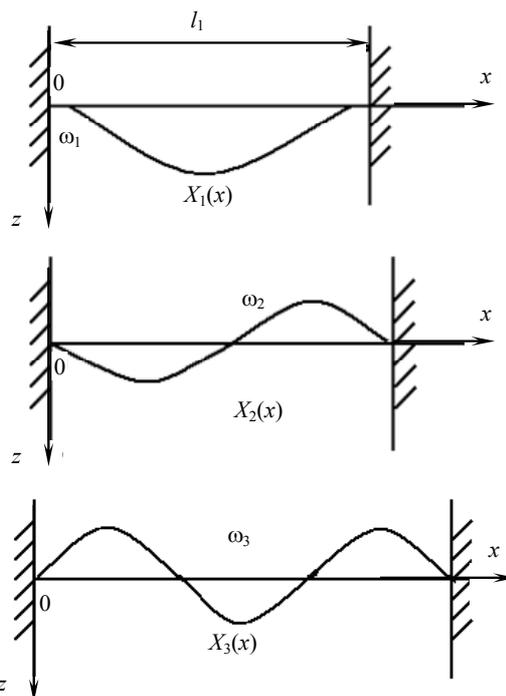


Рис. 3. Функции прогибов (динамика)

В этом случае $X_1(x)$ будет иметь вид

$$X_1(x) = \left(\frac{x}{l_1} - 2 \frac{x^3}{l_1^3} + \frac{x^4}{l_1^4} \right) + M(0) \left(8 \frac{x}{l_1} - 12 \frac{x^2}{l_1^2} + 4 \frac{x^3}{l_1^3} \right) + M(l_1) \left(4 \frac{x}{l_1} - 4 \frac{x^3}{l_1^3} \right),$$

$$M(0) = M(l_1) = -\frac{l_1^2}{12}.$$

Прикладываемые нагрузки должны иметь такой характер, чтобы симметричные и кососимметричные формы кривой прогиба последовательно чередовались.

При динамическом способе прогибы балки выражаются ее формами собственных колебаний (рис. 3).

При таком подходе $X_1(x)$, например, имеет вид

$$X_1(x) = \sin(\omega_1 x / l_1) - \text{sh}(\omega_1 x / l_1) - \alpha_* [\cos(\omega_1 x / l_1) - \text{ch}(\omega_1 x / l_1)],$$

$$\alpha_* = \frac{\sin \omega_1 - \text{sh} \omega_1}{\cos \omega_1 - \text{ch} \omega_1}, \quad \omega_1 = 4,73004075.$$

Заметим, что современное развитие вычислительной техники позволяет определить величину ω_1 с довольно большой точностью.

Наиболее общий вид нагрузка $\bar{q} = \bar{q}(x, y)$ имеет в том случае, когда подкрепляющие ребра будут как сплошного сечения, так и тонкостенного

$$\begin{aligned} \bar{q}(x, y) = q(x, y) - \sum_{i=1}^n EI_x W^{IV}(y) X(a_i) \delta(x - a_i) - \sum_{i=1}^n \frac{GA}{k_1} W''(y) X(a_i) \delta(x - a_i) - \\ - \sum_{i=1}^n [EI_\omega W^{IV}(y) X'(a_i) - GI_K W''(y) X'(a_i)] \delta'(x - a_i), \end{aligned} \quad (4)$$

где EI_x , EI_ω , EI_k — жесткости ребер при изгибе и кручении;

k_1 — коэффициент, учитывающий форму сечения;

a_i — координата расположения i -го ребра (см. рисунок 1).

Для прямоугольного сечения $k_1 = 1, 2$. В общем случае коэффициент k_1 определяется выражением [2]

$$k_1 = \frac{A_v(z)}{B_x^2(z)} \int_A \frac{S_{EyA}^2}{Gb^2} dA,$$

где A — площадь сечения; $A_v = \int_A G dA$; $B_x(z) = \int_A E y^2 dA$; $S_{EyA} = \int_A E x dA$.

Дельта-функция $\delta(x - a_i)$ и ее производная $\delta'(x - a_i)$ используются в (4), когда ребро очень узкое и его можно рассматривать как линию; в противном случае наличие ребра учитывается разностью единичных функций Хевисайда

$$[H(x - a_H)H(y - b_H) - H(x - a_K)H(y - b_K)].$$

Возвратимся к выражению (3). Подставим его в (1) и в известные из теории изгиба пластин выражения статических параметров (изгибающих моментов и приведенных поперечных сил). Умножая затем обе части каждого выражения на $X(x)$ и интегрируя в пределах $[0; l_1]$, получим задачу Коши одномерной модели изгиба прямоугольной пластины, подкрепленной продольными ребрами,

$$W^{IV}(y) - 2r^2 W''(y) + s^4 W(y) = \frac{\bar{q}(y)}{D} \quad (5)$$

при начальных условиях

$$DW(0); D\theta(0) = DW'(0); M(0) = -D\bar{A}[W''(0) - \mu r^2 W(0)];$$

$$Q(0) = -D\bar{A}[W'''(0) - (2 - \mu)r^2 W'(0)], \quad (6)$$

где $r^2 = -\bar{B}/\bar{A}$; $s^4 = C/\bar{A}$; $\bar{q}(y) = \int_0^{l_1} \bar{q}(x, y) X(x) dx / \bar{A}$; (7)

$$\bar{A} = A + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^n EI_x X^2(a_i) + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^n EI_\omega [X'(a_i)]^2; \quad (8)$$

$$\bar{B} = B + \frac{1}{2D} \sum_{i=1}^n EI_k [X'(a_i)]^2 + \frac{1}{2D} \sum_{i=1}^n \frac{GA}{k_1} X^2(a_i); \quad (9)$$

$$A = \int_0^{l_1} X^2(x) dx; B = \int_0^{l_1} X''(x) X(x) dx; C = \int_0^{l_1} X^{IV}(x) X(x) dx. \quad (10)$$

Дифференциальное уравнение (5) по своей структуре аналогично уравнению, описывающему изгиб пластины без ребристых подкреплений, однако вид выражений (7)...(9) свидетельствует о том, что в (5) учтены параметры ребер. Относительно реализации алгоритма метода граничных элементов это означает, что параметры ребер будут учтены и в выражениях фундаментальных функций.

Кинематические и статические параметры изгиба подкрепленной пластины внешне сохранят тот же вид, что и для пластины без ребер, но численно, конечно, будут отличаться, т.к. входящий в далее приведенные выражения прогиб $W(y)$ будет отличаться от прогиба соответствующей “гладкой” пластины:

$$\begin{aligned} \theta_x(x, y) &= W(y)X'(x) ; \quad \theta_y(x, y) = W'(y)X(x) ; \\ M_x(x, y) &= -D[W(y)X''(x) + \mu W''(y)X(x)] ; \\ M_y(x, y) &= -D[W''(y)X(x) + \mu W(y)X''(x)] ; \\ H_x(x, y) &= -H_y(x, y) = -D(1 - \mu)W'(y)X'(x) ; \\ V_x(x, y) &= -D[W_y(y)X'''(x) + W''(y)X'(x)] ; \\ V_y(x, y) &= -D[W'''(y)X(x) + W'(y)X''(x)] , \end{aligned}$$

где $\theta_x(x, y), \theta_y(x, y)$ — углы поворотов нормалей в направлениях осей x и y ;

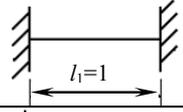
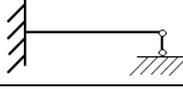
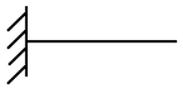
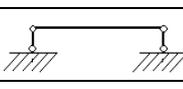
$M_x(x, y), M_y(x, y)$ — изгибающие моменты;

$\theta_x(x, y), \theta_y(x, y)$ — крутильные моменты;

$V_x(x, y), V_y(x, y)$ — поперечные силы.

Значения коэффициентов (7)...(10) представлены в таблице (при условии, что размеры ребра жесткости $b \times h = 0,1 \times 0,1$ м).

Численные значения коэффициентов

Условия опирания пластины	Коэффициенты		
	\bar{A}	B	C
	4,7510773e+000	730,2837	518,5521
	3,9617707e+000	582,1767	237,351635
	3,0717246e+000	246,7759	22,94006
	1,9218750e+000	279,4402	48,70452

Решение задачи Коши (5)...(6) можно представить в соответствии с алгоритмом метода граничных элементов:

$$\begin{bmatrix} DW(y) \\ D\theta(y) \\ M(y) \\ Q(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & -A_{23} & -A_{13} \\ -A_{31} & -A_{32} & A_{22} & A_{12} \\ -A_{41} & -A_{31} & A_{21} & A_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} DW(0) \\ D\theta(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{bmatrix} + \int_0^y \begin{bmatrix} A_{14}(y-\xi) \\ A_{13}(y-\xi) \\ -A_{12}(y-\xi) \\ -A_{11}(y-\xi) \end{bmatrix} q(\xi) d\xi . \quad (11)$$

Таким образом, при использовании метода Канторовича-Власова решение основного дифференциального уравнения задачи сводится к определению прогиба (3), где функция $X(x)$ задана, а функция $W(y)$ определяется из (11) в виде

$$DW(y) = A_{11}DW(0) + A_{12}D\theta(0) - A_{13}M(0) - A_{14}Q(0) + \int_0^y A_{14}(y-\xi)q(\xi)d\xi.$$

Решения уравнения (5) зависят от корней соответствующего ему характеристического уравнения, которые представляются выражением

$$k_{1-4} = \pm\sqrt{r^2 \pm \sqrt{r^4 - s^4}}. \quad (12)$$

Вид фундаментальных функций определяется соотношением между r и s , которое зависит от граничных условий на продольных кромках пластины и параметров ребер жесткости. Здесь возможные шесть случаев.

1. $|s| > |r|$, при этом

$$k_{1-4} = \pm\alpha \pm i\beta,$$

где $\alpha = \sqrt{\frac{s^2 + r^2}{2}}$; $\beta = \sqrt{\frac{s^2 - r^2}{2}}$.

Прогиб $W(y)$ запишется в виде

$$W(y) = C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2 + C_3\Phi_3 + C_4\Phi_4, \quad (13)$$

где $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ — гиперголо-тригонометрические функции:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \operatorname{ch} \alpha y \sin \beta y; \\ \Phi_2 &= \operatorname{ch} \alpha y \cos \beta y; \\ \Phi_3 &= \operatorname{sh} \alpha y \cos \beta y; \\ \Phi_4 &= \operatorname{sh} \alpha y \sin \beta y. \end{aligned} \right\}$$

2. $s = r$, при этом корни характеристического уравнения будут действительными и кратными:

$$k_{1-4} = \pm\sqrt{r^2}.$$

Прогиб $W(y)$ снова запишется в виде (13), но теперь $\Phi_1 = y \operatorname{ch} ry$; $\Phi_2 = \operatorname{ch} ry$; $\Phi_3 = \operatorname{sh} ry$; $\Phi_4 = y \operatorname{sh} ry$.

3. $|s| < |r|$.

Этот вариант решения (12) приводит к действительным и разным корням

$$\lambda_1 = \sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 - s^4}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{r^2 - \sqrt{r^4 - s^4}}.$$

Тогда $\Phi_1 = \operatorname{sh} \lambda_2 y$; $\Phi_2 = \operatorname{ch} \lambda_1 y$; $\Phi_3 = \operatorname{sh} \lambda_1 y$; $\Phi_4 = \operatorname{ch} \lambda_2 y$.

4. Корни решения (12) действительные и кратные:

$$k_{1,2} = 0; \quad k_{3,4} = \pm r_1; \quad r_1 = -2\bar{B}/\bar{A}.$$

В этом случае $\Phi_1 = \operatorname{sh} r_1 y$; $\Phi_2 = 1$; $\Phi_3 = y$; $\Phi_4 = \operatorname{ch} r_1 y$.

5. Корни решения (12) действительные и мнимые:

$$k_{1,2} = \pm i\beta; \quad k_{3,4} = \pm \alpha.$$

В этом случае $\Phi_1 = \cos \beta y$; $\Phi_2 = \sin \beta y$; $\Phi_3 = \operatorname{ch} \alpha y$; $\Phi_4 = \operatorname{sh} \alpha y$.

6. Корни уравнения (12) мнимые:

$$k_{1,2} = \pm \alpha i; \quad k_{3,4} = \pm \beta i;$$

при этом $\Phi_1 = \cos \alpha y$; $\Phi_2 = \sin \alpha y$; $\Phi_3 = \cos \beta y$; $\Phi_4 = \sin \beta y$.

Каждому из рассмотренных корней характеристического уравнения отвечает своя система фундаментальных функций.

После построения фундаментальных функций, функции Грина и формирования векторов внешних нагрузок можно реализовать алгоритм МГЕ [1] для любых граничных условий и произвольного числа ребер (как сплошного сечения, так и тонкостенного) в обоих направлениях.

Общая концепция предлагаемого подхода состоит в следующем. Части пластины, которые имеют ребра в поперечном направлении (параллельно оси $0x$), рассматриваются как “гладкие” пластины толщиной $h_1 = h + h_{\text{ребра}}$, где h — толщина собственно пластины, $h_{\text{ребра}}$ — высота подкрепляющего ребра. Для этих модулей справедлива теория расчета “гладких” пластин методом граничных элементов [1], с соответствующими выражениями фундаментальных функций, функции Грина, векторов нагрузок и т.д. Другие модули представляют собой пластины, подкрепленные ребрами жесткости в продольном направлении (параллельно оси $0y$), и для них фундаментальные функции, функции Грина, векторы нагрузок определяются выражениями, полученными для ребристых пластин.

Литература

1. Численные методы в механике / В.А. Баженов, А.Ф. Дашенко, Л.В. Коломиец и др. — Одесса: СТАНДАРТЪ, 2005. — 563 с.
2. Биргер, И.А. Сопротивление материалов / И.А. Биргер, Р.Р. Мавлютов. — М.: Наука, 1986. — 560 с.
3. Власов, В.З. Тонкостенные пространственные системы / В.З. Власов. — М.: Стройиздат, 1958. — 502 с.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Оробей В.Ф.

Поступила в редакцию 30 июня 2010 г.