

УДК 539.3

В.Ф. Оробей, д-р техн. наук, проф.,
К.С. Тыманюк, бакалавр,
Одес. нац. политехн. ун-т

КОЛЕБАНИЯ БАЛОК С ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

В.Ф. Оробей, К.С. Тыманюк. **Коливання балок із змінною жорсткістю.** Розглянуто задачі поперечних коливань балок, які мають змінну жорсткість внаслідок зміни ширини чи висоти розрізу. Запропоновано розв'язувати диференціальне рівняння поперечних коливань із змінними жорсткістю і масою чисельно-аналітичним методом граничних елементів. Наведено перші частоти власних коливань балок, які мають звичайні крайові умови. Результати відрізняються високою точністю і достовірністю.

В.Ф. Оробей, К.С. Тыманюк. **Колебания балок с переменной жесткостью.** Рассмотрены задачи поперечных колебаний балок с переменной жесткостью вследствие изменения ширины или высоты сечения. Предложено решать дифференциальное уравнение поперечных колебаний с переменной жесткостью и массой численно-аналитическим методом граничных элементов. Приведены первые частоты собственных колебаний балок с обычными краевыми условиями. Результаты отличаются высокой точностью и достоверностью.

V.F. Orobey, K.S. Tymaniuk. **Vibrations of beams with variable stiffness.** The tasks of transversal vibrations of beams are considered with variable inflexibility because of change of width or height of section. It is suggested to solve a differential equation of transversal vibrations with variable inflexibility and mass by the numeral-analytical method of boundary elements. The first frequencies of eigentones of beams with ordinary boundary conditions are presented. The results are of high exactness and reliability.

Весьма часто элементы машин, механизмов и сооружений, относящихся к классу стержней, имеют переменные жесткость и массу. В этом случае удается обеспечить необходимые эксплуатационные показатели всей конструкции более эффективно по сравнению с элементами с постоянными параметрами. Однако расчет и проектирование таких стержней существенно усложнены тем, что соответствующие дифференциальные уравнения будут иметь переменные коэффициенты. Методики решения краевых задач для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами требуют совершенствования в направлении повышения эффектив-

ности, точности и достоверности результатов. Об актуальности данной проблемы можно судить по задачам колебаний балок с переменной жесткостью. Приближенное дифференциальное уравнение данного случая имеет вид [1]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI_{(x)} \frac{\partial^2 \bar{V}(x,t)}{\partial x^2} \right] + m_{(x)} \frac{\partial^2 \bar{V}(x,t)}{\partial t^2} = \bar{q}(x,t), \tag{1}$$

где $\bar{V}(x,t)$ — поперечный прогиб;

$EI_{(x)}$ — переменная поперечная жесткость;

$m_{(x)}$ — переменная распределенная масса;

$\bar{q}(x,t)$ — внешняя возмущающая нагрузка.

Методом Фурье разделение переменных уравнения (1) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению для амплитудного состояния балок

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI_{(x)} \frac{d^2 V(x)}{dx^2} \right] - m_{(x)} \omega^2 V(x) = q(x). \tag{2}$$

Если обратиться к справочным данным, то можно обнаружить, что имеются отдельные результаты решения задач устойчивости балок с переменной жесткостью и отсутствуют решения задач динамики [2...4]. В этой связи предлагается использовать для решения уравнения (2) численно-аналитический метод граничных элементов [5]. Алгоритм решения МГЭ заключается в следующем. Балка с заданными условиями опирания разбивается на n частей. В пределах каждой части вычисляются оптимальным способом постоянные значения жесткости EI_i и m_i . При линейном законе изменения коэффициентов уравнения (2) абсцисса вычисления EI_i и m_i должна быть равной $x = x_i/2$, где $x_i = l/n$ — длина i -го участка балки; при квадратичной зависимости $x = x_i/\sqrt{3}$; при кубической зависимости $x = x_i/\sqrt[3]{4}$; при четвертой степени $x = x_i/\sqrt[4]{5}$; при k -й степени $x = x_i/\sqrt[k]{k+1}$. В этом случае площадь ступенчатой зависимости для EI_i, m_i будет точно равна площади заданной криволинейной трапеции $EI_{(x)}$ и $m_{(x)}$. При этом результат решения задачи по МГЭ будет иметь максимально возможную точность; если отклониться от оптимальных абсцисс, то можно получить результат с недостатком или избытком. В итоге такой дискретизации балка с распределенными параметрами заменяется множеством балок с постоянными параметрами, а уравнение колебаний (2) еще больше упростится

$$EI_i \frac{d^4 V(x)}{dx^4} - m_i \omega^2 V(x) = q(x). \tag{3}$$

Решение задачи Коши этого уравнения известно. Матрица фундаментальных ортонормированных функций имеет вид [5]

		1	2	3	4
$\mathbf{A}_i =$	1	A_{11}	A_{12}	$-A_{13}/EI_i$	$-A_{14}/EI_i$
	2	$\lambda_i^4 A_{14}$	A_{11}	$-A_{12}/EI_i$	$-A_{13}/EI_i$
	3	$-\lambda_i^4 A_{13} EI_i$	$-\lambda_i^4 A_{14} EI_i$	A_{11}	A_{12}
	4	$-\lambda_i^4 A_{12} EI_i$	$-\lambda_i^4 A_{13} EI_i$	$\lambda_i^4 A_{14}$	A_{11}

$$A_{11} = \frac{ch\lambda_i l_i + \cos \lambda_i l_i}{2};$$

$$A_{12} = \frac{sh\lambda_i l_i + \sin \lambda_i l_i}{2\lambda_i};$$

$$A_{13} = \frac{ch\lambda_i l_i - \cos \lambda_i l_i}{2\lambda_i^2};$$

$$A_{14} = \frac{sh\lambda_i l_i - \sin \lambda_i l_i}{2\lambda_i^3};$$

$$\lambda_i = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 m_i}{EI_i}}.$$

(4)

Для более простого выполнения условий стыковки участков внутри балки в матрицу \mathbf{A}_i введен параметр жесткости. При числе участков $n \geq 30$ ступенчатые функции EI_i, m_i будут мало отличаться от заданных функций $EI_{(x)}, m_{(x)}$, и решение получается весьма точным и достоверным. В задачах на собственные колебания важнейшей величиной является первая частота, которая по МГЭ определяется из частотного уравнения [5]

$$|\mathbf{A}_*(\omega)| = 0, \tag{5}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbf{A}_* =$	1	A_{12}		$-A_{14}/EI_1$	-1			
	2	A_{11}		$-A_{13}/EI_1$		-1		
	3	$-\lambda_1^4 A_{14} EI_1$		A_{12}			-1	
	4	$-\lambda_1^4 A_{13} EI_1$		A_{11}				-1
	5				A_{11}	A_{12}	$-A_{13}/EI_2$	$-A_{14}/EI_2$
	6	-1			$\lambda_2^4 A_{14}$	A_{11}	$-A_{12}/EI_2$	$-A_{13}/EI_2$
	7				$-\lambda_2^4 A_{13} EI_2$	$-\lambda_2^4 A_{14} EI_2$	A_{11}	A_{12}
	8			-1	$-\lambda_2^4 A_{12} EI_2$	$-\lambda_2^4 A_{13} EI_2$	$\lambda_2^4 A_{14}$	A_{11}

(6)

где $\mathbf{A}_*(\omega)$ — матрица поперечных колебаний краевой задачи дискретизированной балки. Если разбить балку с шарнирным опиранием на два участка, то данная матрица примет вид

Аналогично формируется по алгоритму МГЭ матрица $\mathbf{A}_*(\omega)$ при $n = 3, 4, 5, \dots$. В задачах данной работы $n = 60$ и матрица $\mathbf{A}_*(\omega)$ формировалась автоматически по программе в среде MATLAB. Из матрицы (6) видно, что стыковка участков во внутренних точках балки обеспечивается диагональю из элементов (-1) , а граничные условия в опорных сечениях учитываются номерами обнуленных столбцов и положением в них компенсирующих элементов. Из представленного следует, что частотное уравнение (5) по МГЭ точно учитывает граничные условия во внешних и внутренних точках дискретизированной балки, чем отличается в лучшую сторону от частотного уравнения по методу конечных элементов.

Из уравнения (5) методом перебора можно определить частоты собственных колебаний, которые приводятся к виду

$$\omega = \frac{\eta}{l^2} \sqrt{\frac{EI_1}{m_1}}, \tag{7}$$

где $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па — модуль упругости 1-го рода;

$I_1 = \frac{b_1 h_1^3}{12}$, m^4 — наименьшее значение момента инерции балки;

$b_1 = 0,01$ м — наименьшая ширина сечения балки;

$h_1 = 0,01$ м — наименьшая высота сечения балки;

$l = 1,0$ м — длина балки;

$m_1 = \rho b_1 h_1$, кг/м — наименьшее значение распределенной массы балки;

$\rho = 7800$, кг/м³ — удельный вес материала балки;

$t = \frac{b_1}{b}; \frac{h_1}{h}$ — заданное отношение;

b, h — максимальные значения ширины и высоты сечения балки;

η — безразмерный коэффициент частоты собственных колебаний балки, подлежащий определению.

Рассмотрим задачи колебаний балок с переменными жесткостью и массой, к которым применим данный алгоритм.

Задача 1. Балка состоит из одного участка. Ширина или высота изменяются по закону

$$b(x) = a_1 + c_1 x^{k_1}; \quad h(x) = a_1 + c_1 x^{k_1}, \quad (8)$$

где $a_1 = b_1 = 0,01$ м; $c_1 = \frac{b_1/t - a_1}{l^{k_1}}$, м.

Осевой момент инерции и распределенная масса балки являются переменными величинами в соответствии с формулами

$$I_{(x)} = b_{(x)} h_{(x)}^3 / 12; \quad m_{(x)} = \rho b_{(x)} h_{(x)}.$$

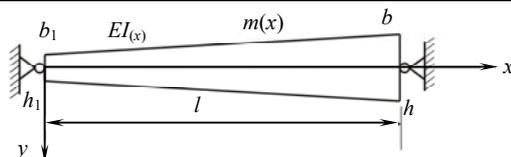
В таблице 1 приведены значения коэффициента для определения первой частоты по формуле (7). В числителе значения η относятся к балкам с изменяющейся шириной при $h = h_1 = \text{const}$, в знаменателе — для балок с изменяющейся высотой сечения при $b = b_1 = \text{const}$. Здесь и далее было принято, что при $b_1 = 0$, $b = 0,1$ м ($h_1 = 0$, $h = 0,1$ м).

Таблица 1

Значения коэффициента η для балок, состоящих из одного участка

$\frac{b_1}{b}, \frac{h_1}{h}$	Показатель степени k_1 в формуле (8)			
	1	2	3	4
0,0	$\frac{9,26}{14,36}$	$\frac{7,26}{0,0387}$	$\frac{3,59}{77,1 \cdot 10^{-6}}$	$\frac{0,85}{15,6 \cdot 10^{-8}}$
0,1	$\frac{9,54}{38,88}$	$\frac{9,19}{19,75}$	$\frac{9,10}{14,57}$	$\frac{9,14}{12,54}$
0,2	$\frac{9,67}{24,58}$	$\frac{9,53}{15,98}$	$\frac{9,53}{13,09}$	$\frac{9,57}{11,82}$
0,4	$\frac{9,79}{16,17}$	$\frac{9,77}{12,94}$	$\frac{9,77}{11,62}$	$\frac{9,79}{10,98}$
0,6	$\frac{9,85}{12,88}$	$\frac{9,85}{11,44}$	$\frac{9,85}{10,81}$	$\frac{9,85}{10,47}$
0,8	$\frac{9,86}{11,06}$	$\frac{9,86}{10,52}$	$\frac{9,86}{10,26}$	$\frac{9,86}{10,13}$
1,0	$\frac{\pi^2}{\pi^2}$	$\frac{\pi^2}{\pi^2}$	$\frac{\pi^2}{\pi^2}$	$\frac{\pi^2}{\pi^2}$
0,0	$\frac{16,59}{59,72}$	$\frac{17,01}{58,52}$	$\frac{17,86}{0,638}$	$\frac{22,31}{8,58 \cdot 10^{-3}}$
0,1	$\frac{16,63}{86,26}$	$\frac{18,04}{68,86}$	$\frac{19,44}{57,32}$	$\frac{20,42}{48,15}$
0,2	$\frac{16,51}{48,97}$	$\frac{17,53}{41,10}$	$\frac{18,34}{36,83}$	$\frac{18,78}{33,46}$
0,4	$\frac{16,19}{28,90}$	$\frac{16,73}{25,86}$	$\frac{17,05}{24,45}$	$\frac{17,22}{23,43}$
0,6	$\frac{15,89}{21,64}$	$\frac{16,17}{20,28}$	$\frac{16,31}{19,67}$	$\frac{16,37}{19,27}$

$\frac{b_1}{b}, \frac{h_1}{h}$	Показатель степени k_1 в формуле (8)			
	1	2	3	4



0,8	$\frac{15,65}{17,83}$	$\frac{15,75}{17,32}$	$\frac{15,79}{17,08}$	$\frac{15,81}{16,94}$
1,0	$\frac{(\pi/0,8)^2}{(\pi/0,8)^2}$	$\frac{(\pi/0,8)^2}{(\pi/0,8)^2}$	$\frac{(\pi/0,8)^2}{(\pi/0,8)^2}$	$\frac{(\pi/0,8)^2}{(\pi/0,8)^2}$
0,0	$\frac{18,33}{65,33}$	$\frac{17,80}{40,83}$	$\frac{18,60}{0,927}$	$\frac{22,45}{0,012}$
0,1	$\frac{20,79}{98,96}$	$\frac{22,93}{83,33}$	$\frac{25,12}{73,59}$	$\frac{26,86}{64,46}$
0,2	$\frac{21,48}{59,25}$	$\frac{23,22}{52,18}$	$\frac{24,69}{48,58}$	$\frac{25,65}{45,32}$
0,4	$\frac{22,05}{37,41}$	$\frac{23,11}{34,75}$	$\frac{23,83}{33,52}$	$\frac{24,24}{32,55}$
0,6	$\frac{22,26}{29,40}$	$\frac{22,87}{28,21}$	$\frac{23,22}{27,64}$	$\frac{23,38}{27,27}$
0,8	$\frac{22,37}{25,08}$	$\frac{22,61}{24,67}$	$\frac{22,74}{24,44}$	$\frac{22,82}{24,28}$
1,0	$\frac{(\pi/0,664)^2}{(\pi/0,664)^2}$	$\frac{(\pi/0,664)^2}{(\pi/0,664)^2}$	$\frac{(\pi/0,664)^2}{(\pi/0,664)^2}$	$\frac{(\pi/0,664)^2}{(\pi/0,664)^2}$
0,0	$\frac{7,15}{53,12}$	$\frac{11,49}{11,52}$	$\frac{16,53}{0,146}$	$\frac{22,21}{1,95 \cdot 10^{-3}}$
0,1	$\frac{6,07}{46,28}$	$\frac{7,24}{33,71}$	$\frac{7,26}{21,33}$	$\frac{6,86}{15,29}$
0,2	$\frac{5,40}{21,46}$	$\frac{5,89}{17,05}$	$\frac{5,76}{12,83}$	$\frac{5,51}{10,30}$
0,4	$\frac{4,59}{9,83}$	$\frac{4,71}{8,65}$	$\frac{4,61}{7,51}$	$\frac{4,49}{6,71}$
0,6	$\frac{4,09}{6,23}$	$\frac{4,13}{5,80}$	$\frac{4,08}{5,41}$	$\frac{4,01}{5,10}$
0,8	$\frac{3,76}{4,51}$	$\frac{3,77}{4,37}$	$\frac{3,75}{4,26}$	$\frac{3,72}{4,16}$
1,0	$\frac{(\pi/1,676)^2}{(\pi/1,676)^2}$	$\frac{(\pi/1,676)^2}{(\pi/1,676)^2}$	$\frac{(\pi/1,676)^2}{(\pi/1,676)^2}$	$\frac{(\pi/1,676)^2}{(\pi/1,676)^2}$

Задача 2. Балка состоит из двух участков. Ширина (высота) изменяется симметрично относительно координаты $a = 0,5l$ согласно формулам (8). Коэффициенты η приведены в табл. 2.

Достоверность и точность представленных результатов подтверждается тем, что при постоянной жесткости и массе ($t=1,0$) частоты собственных колебаний балок точно равны извест-

ным значениям [2...4]. Изменение ширины сечения влияет на частоты существенно меньше, чем изменение высоты.

Таблица 2

Значения коэффициента η для балок, состоящих из двух участков

$\frac{b_1}{b}, \frac{h_1}{h}$	Показатель степени k_1 в формуле (8)			
	1	2	3	4
0,0	$\frac{9,30}{23,53}$	$\frac{7,36}{0,15}$	$\frac{3,81}{6,34 \cdot 10^{-4}}$	$\frac{1,05}{3,08 \cdot 10^{-6}}$
0,1	$\frac{9,51}{51,25}$	$\frac{8,91}{25,52}$	$\frac{8,46}{17,37}$	$\frac{8,18}{13,98}$
0,2	$\frac{9,63}{30,70}$	$\frac{9,30}{20,10}$	$\frac{9,09}{15,77}$	$\frac{8,95}{13,66}$
0,4	$\frac{9,77}{18,73}$	$\frac{9,66}{15,32}$	$\frac{9,59}{13,55}$	$\frac{9,55}{12,59}$
0,6	$\frac{9,83}{14,11}$	$\frac{9,79}{12,78}$	$\frac{9,78}{12,00}$	$\frac{9,77}{11,55}$
0,8	$\frac{9,86}{11,54}$	$\frac{9,86}{11,10}$	$\frac{9,85}{10,83}$	$\frac{9,85}{10,64}$
1,0	$\frac{\pi^2}{\pi^2}$	$\frac{\pi^2}{\pi^2}$	$\frac{\pi^2}{\pi^2}$	$\frac{\pi^2}{\pi^2}$
0,0	$\frac{10,62}{26,94}$	$\frac{7,81}{0,17}$	$\frac{4,28}{7,68 \cdot 10^{-4}}$	$\frac{1,27}{3,67 \cdot 10^{-6}}$
0,1	$\frac{12,27}{57,38}$	$\frac{11,60}{30,86}$	$\frac{11,31}{22,04}$	$\frac{11,20}{18,31}$
0,2	$\frac{13,05}{36,03}$	$\frac{12,70}{25,09}$	$\frac{12,64}{20,55}$	$\frac{12,70}{18,33}$
0,4	$\frac{13,98}{23,89}$	$\frac{13,93}{20,26}$	$\frac{13,98}{18,52}$	$\frac{14,09}{17,56}$
0,6	$\frac{14,59}{19,37}$	$\frac{14,62}{17,88}$	$\frac{14,70}{17,16}$	$\frac{14,75}{16,73}$
0,8	$\frac{15,07}{16,94}$	$\frac{15,07}{16,41}$	$\frac{15,13}{16,17}$	$\frac{15,16}{16,01}$
1,0	$\frac{(\pi/0,8)^2}{(\pi/0,8)^2}$	$\frac{(\pi/0,8)^2}{(\pi/0,8)^2}$	$\frac{(\pi/0,8)^2}{(\pi/0,8)^2}$	$\frac{(\pi/0,8)^2}{(\pi/0,8)^2}$
0,0	$\frac{12,06}{33,03}$	$\frac{8,29}{0,26}$	$\frac{4,95}{1,30 \cdot 10^{-3}}$	$\frac{1,75}{6,34 \cdot 10^{-6}}$
0,1	$\frac{15,48}{65,06}$	$\frac{14,89}{39,28}$	$\frac{14,94}{29,78}$	$\frac{15,07}{25,42}$

$\frac{b_1}{b}, \frac{h_1}{h}$	Показатель степени k_1 в формуле (8)			
	1	2	3	4
0,2	$\frac{17,08}{42,76}$	$\frac{16,89}{32,47}$	$\frac{17,13}{27,90}$	$\frac{17,40}{25,50}$
0,4	$\frac{19,08}{30,42}$	$\frac{19,19}{27,10}$	$\frac{19,48}{25,58}$	$\frac{19,77}{24,66}$
0,6	$\frac{20,47}{26,02}$	$\frac{20,60}{24,66}$	$\frac{20,84}{24,09}$	$\frac{21,03}{23,77}$
0,8	$\frac{21,51}{23,73}$	$\frac{21,62}{23,25}$	$\frac{21,72}{23,09}$	$\frac{21,83}{23,01}$
1,0	$\frac{(\pi/0,664)^2}{(\pi/0,664)^2}$	$\frac{(\pi/0,664)^2}{(\pi/0,664)^2}$	$\frac{(\pi/0,664)^2}{(\pi/0,664)^2}$	$\frac{(\pi/0,664)^2}{(\pi/0,664)^2}$
0,0	$\frac{1,84}{0,43}$	$\frac{0,45}{1,84 \cdot 10^{-3}}$	$\frac{0,09}{8,35 \cdot 10^{-6}}$	$\frac{0,018}{4,10 \cdot 10^{-8}}$
0,1	$\frac{2,81}{5,12}$	$\frac{2,64}{3,35}$	$\frac{2,67}{3,05}$	$\frac{2,73}{2,98}$
0,2	$\frac{3,12}{4,86}$	$\frac{3,06}{3,71}$	$\frac{3,10}{3,47}$	$\frac{3,15}{3,39}$
0,4	$\frac{3,37}{4,46}$	$\frac{3,37}{3,85}$	$\frac{3,39}{3,68}$	$\frac{3,41}{3,62}$
0,6	$\frac{3,47}{4,10}$	$\frac{3,48}{3,79}$	$\frac{3,48}{3,68}$	$\frac{3,49}{3,63}$
0,8	$\frac{3,51}{3,79}$	$\frac{3,51}{3,66}$	$\frac{3,51}{3,61}$	$\frac{3,51}{3,59}$
1,0	$\frac{(\pi/1,676)^2}{(\pi/1,676)^2}$	$\frac{(\pi/1,676)^2}{(\pi/1,676)^2}$	$\frac{(\pi/1,676)^2}{(\pi/1,676)^2}$	$\frac{(\pi/1,676)^2}{(\pi/1,676)^2}$

Кроме представленных задач данной методикой могут быть учтены точки разрывов 1-го рода (ступенчатое изменение жесткости и массы), точки излома (плавный переход от конуса к цилиндру) и произвольный набор множества участков.

Литература

1. Безухов, Н.И. Устойчивость и динамика сооружений / Н.И. Безухов, О.В. Лужин, Н.В. Колкунов. — М.: Высш. школа, 1987. — 264 с.
2. Справочник по строительной механике корабля: В 3-х т. / Под ред. Ю.А. Шиманского. — Л.: Судпромгиз, 1958. — 1960 с.
3. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справ. в трех томах / Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. — М.: Машиностроение, 1968. — Т. 3. — 568 с.
4. Справочник по строительной механике корабля: В 3-х т. / Под ред. проф. О.М. Паляя. — Л.: Судостроение, 1982. —
5. Численные методы в механике / [В.А. Баженов, А.Ф. Дашенко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов] — Одесса: Стандартъ, 2005. — 564 с.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Усов А.В.

Поступила в редакцию 10 мая 2010 г.