

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ И ГРАНИЧНЫЕ СОСТОЯНИЯ ГИБКИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ НАВИВКЕ НА БАРАБАН

И.М. Чаюн. **Напружено-деформований і граничні стани гнучких стержнів при навивці на барабан.** Розглянуто у всьому інтервалі деформування напружений стан стержнів круглого (дріт) і прямокутного (стрічка) перерізу при навантаженні розтяганням з подальшим згинанням. Граничні пружний і пружно-пластичний стани подано через деформацію розтягання і згинання у вигляді відношення діаметра барабана до діаметра дроту або до товщини стрічки. Останнє зручно в практичних міцнісних розрахунках для підйомно-транспортних установок.

И.М. Чаюн. **Напряженно-деформированное и граничные состояния гибких стержней при навивке на барабан.** Рассмотрено во всем интервале деформирования напряженное состояние стержней круглого (проволока) и прямоугольного (лента) сечений при нагружении растяжением с последующим изгибом. Граничное упругое и предельное состояния представлены через деформацию растяжения и изгиба в виде отношения диаметра барабана к диаметру проволоки или к толщине ленты. Последнее удобно в практических прочностных расчетах для подъемно-транспортных установок.

И.М. Чаюн. **Deflected mode and boundary conditions of flexible bars in winding them onto a drum.** The tense state of bars of round (wire) and rectangular (ribbon) sections is considered in all interval of deformation at a lading tension with a subsequent bend. Border resilient and maximum states are presented through deformation of tension and bend as the ratio of diameter of drum to the diameter of wire or to the thickness of ribbon. The latter is convenient in practical strengthening calculations for carrying and lifting equipment.

Напряженное состояние, несущая способность и долговечность стальных канатов, конвейерных лент определяется зоной их изгиба на блоках и барабанах. В этой зоне напряженно-деформируемое состояние различных проволок в канатах является неоднородным с высоким уровнем контактных напряжений. Это приводит к неполному использованию несущей способности и долговечности всех проволок по сечению каната, поэтому в подъемных и транспортирующих машинах наряду со стальными канатами применяют стальные ленты, а также пучки параллельных проволок [1...4].

Целью данной работы является исследование упруго-пластического деформирования стержней круглого (канатная проволока) и прямоугольного (стальная лента) сечения при растяжении на вращающемся барабане во всем интервале параметров нагружения, а также разработка методики расчета предельных состояний и статической несущей способности при этом нагружении. В исследовании использована линейно схематизированная диаграмма деформирования проволоки и ленты без учета эффекта Баушингера [5] (рис. 1). Для удобства использования результатов все параметры представлены в относительной форме.

В такой же форме представлены деформации и размеры сечений (рис. 2), где: $\bar{\varepsilon}_p = \varepsilon_p / \varepsilon_T$; $\bar{\varepsilon}_{им} = \varepsilon_{им} / \varepsilon_T$ — соответственно деформация предварительного растяжения и последующего изгиба в крайней точке сечения на выпуклой стороне (ε_T — деформация, соответствующая пределу текучести по схематизированной диаграмме растяжения проволоки или ленты); $\eta = y / \delta$ — координата точек сечения относительно главной центральной оси (δ — диаметр проволок или толщина ленты).

Главным фактором в этом исследовании является ограниченная деформативность высокопрочной канатной проволоки и ленты. Характеристикой, определяющей данное свойство, является равномерная предельная деформация $\bar{\varepsilon}_п^{п} = \varepsilon_п^{п} / \varepsilon_T$, присущая конкретной группе проволок и

лент. Указанная особенность предопределяет построение расчетной схемы напряженно-деформированного состояния и несущей способности в данной задаче.

Деформации (рис. 2) на основании гипотезы плоских сечений можно описать как

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon / \varepsilon_T = \bar{\varepsilon}_p + \frac{\bar{\varepsilon}_{\text{им}}}{0,5 + \eta_0} (\eta + \eta_0), \tag{1}$$

где η_0 — смещение оси поворота сечения от главной центральной оси вследствие изгиба.

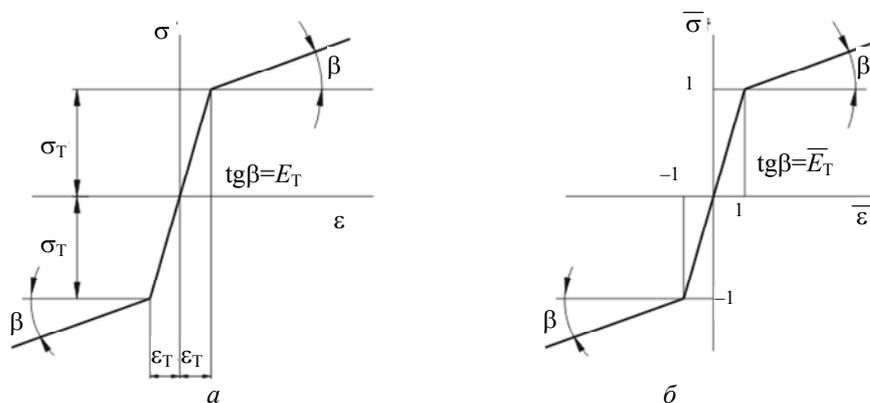


Рис. 1. Линейно схематизированная диаграмма растяжения-сжатия стержня

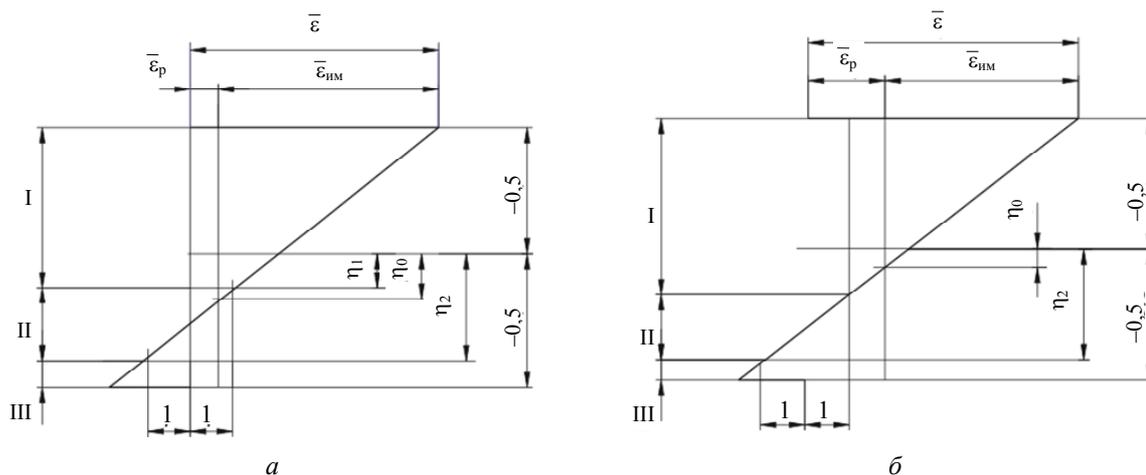


Рис. 2. Эпюры деформаций при растяжении стержня на вращающемся барабане: а — случай 2; б — случай 4

Смещение η_0 определяется на основе уравнения равновесия, представляющего выражение нормальной силы, которая не зависит от последующего изгиба. В относительном измерении уравнения имеют вид

— для круглого сечения

$$\bar{N} = \frac{4}{\pi} \int_{-0,5}^{0,5} \bar{\sigma} \sqrt{1 - 4\eta^2} d\eta; \tag{2}$$

— для прямоугольного сечения

$$\bar{N} = \int_{-0,5}^{0,5} \bar{\sigma} d\eta, \tag{3}$$

где $\bar{N} = N / \sigma_T A$ — нормальная сила в сечении проволоки или ленты (σ_T — напряжение предела текучести проволоки или ленты по схематизированной диаграмме (рис. 1, а);

A — площадь поперечного сечения стержня);

$\bar{\sigma} = \sigma / \sigma_T$ — напряжение в точках сечения.

Проведенные исследования показывают, что в зависимости от параметров $\bar{\varepsilon}_p$ и $\bar{\varepsilon}_{им}$ следует различать пять случаев деформирования.

Первый случай — упругое деформирование

$$\bar{\varepsilon} = (\bar{\varepsilon}_p + \bar{\varepsilon}_{им}) \leq 1; \quad \eta_0 = 0.$$

Последующие случаи — упруго-пластическое деформирование.

Второй случай ограничивается такими деформациями

$$\bar{\varepsilon}_p \leq 1; \quad \bar{\varepsilon}_{им} \leq \frac{(1 + \bar{\varepsilon}_p)(0,5 + \eta_0)}{0,5 - \eta_0}. \quad (4)$$

Выражение (4) получается на основании зависимости деформации (1). В сечении будет две характерные зоны I и II (рис. 2, а), напряжения в которых определяются выражениями:

$$\bar{\sigma} = 1 - \bar{E}_T + \left[\bar{\varepsilon}_p + \frac{\bar{\varepsilon}_{им}}{0,5 + \eta_0} (\eta + \eta_0) \right] \bar{E}_T; \quad (5)$$

$$\bar{\sigma} = \bar{\varepsilon}_p + \frac{\bar{\varepsilon}_{им}}{0,5 + \eta_0} (\eta + \eta_0), \quad (6)$$

где $\bar{E}_T = E_T / E$ — относительный модуль упрочнения схематизированной диаграмме растяжения проволоки или ленты.

Третий случай

$$\bar{\varepsilon}_p \leq 1; \quad \bar{\varepsilon}_{им} \geq \frac{(1 + \bar{\varepsilon}_p)(0,5 + \eta_0)}{0,5 - \eta_0}.$$

В сечении будет три характерных зоны I...III (рис. 2, а). В зоне I, находящейся на выпуклой стороне, и в средней зоне II напряжения определяются зависимостями (5) и (6). В зоне III, находящейся на вогнутой стороне,

$$\bar{\sigma} = -(1 - \bar{E}_T) + \left[\bar{\varepsilon}_p + \frac{\bar{\varepsilon}_{им}}{0,5 + \eta_0} (\eta + \eta_0) \right] \bar{E}_T. \quad (7)$$

Для второго и третьего случаев

$$\bar{N} = \bar{\varepsilon}_p. \quad (8)$$

Четвертый случай

$$\bar{\varepsilon}_p \geq 1; \quad \bar{\varepsilon}_{им} \leq \frac{[2 + (\bar{\varepsilon}_p - 1)\bar{E}_T](0,5 + \eta_0)}{0,5 - \eta_0}. \quad (9)$$

В сечении будет две характерных зоны I и II (рис. 2, б). В зоне I, находящейся на выпуклой стороне, напряжения определяется зависимостью (5). В зоне II, находящейся на вогнутой стороне,

$$\bar{\sigma} = 1 - \bar{E}_T + \frac{\bar{\varepsilon}_{им}}{0,5 + \eta_0} (\eta + \eta_0) \bar{\varepsilon}_p \bar{E}_T. \quad (10)$$

Пятый случай

$$\bar{\varepsilon}_p \geq 1; \quad \bar{\varepsilon}_{им} \geq \frac{[2 + (\bar{\varepsilon}_p - 1)\bar{E}_T](0,5 + \eta_0)}{0,5 - \eta_0}.$$

В сечении будет три характерных зоны I...III (рис. 2). В зонах I и II напряжения определяются зависимостями (5) и (10). В зоне III, находящейся на вогнутой стороне,

$$\bar{\sigma} = -(1 - \bar{E}_T) + \left[1 + (\bar{\varepsilon}_p - 1)\bar{E}_T + \frac{\bar{\varepsilon}_{им}}{0,5 + \eta_0}(\eta + \eta_0) \right] \bar{E}_T. \quad (11)$$

Для четвертого и пятого случаев деформация растяжения $\bar{\varepsilon}_p \geq 1$. Нормальная сила в сечении

$$\bar{N} = 1 - \bar{E}_T + \bar{\varepsilon}_p \bar{E}_T. \quad (12)$$

Зависимости смещений η_0 для всех случаев деформирования получены на основании уравнений (2) и (3) с учетом напряжений (5)...(7), (10), (11) и выражений продольной силы (8), (12).

При круглом сечении для второго случая η_0 определяется по трансцендентному уравнению

$$\frac{4}{\pi} \left\{ 0,5(1 - \bar{E}_T)[(\bar{\varepsilon}_{ю} + \bar{\varepsilon}_p - 1)\varphi_1 - v\psi_1] + \frac{\pi}{8}[(\bar{\varepsilon}_{ю} + \bar{\varepsilon}_p)(1 - \bar{E}_T)] + 1 - \bar{E}_T \right\} - \bar{\varepsilon}_p = 0, \quad (13)$$

где $\bar{\varepsilon}_{ю}$ — деформация по оси стержня, вызванная изгибом,

$$\bar{\varepsilon}_{ю} = \frac{\bar{\varepsilon}_{им}}{0,5 + \eta_0} \eta_0; \quad (14)$$

$$\varphi_1 = \eta_1 \sqrt{1 - 4\eta_1^2} + \frac{1}{2} \arcsin 2\eta_1; \quad \psi_1 = (1 - 4\eta_1^2)^{3/2}; \quad v = \frac{\bar{\varepsilon}_{им}}{6(0,5 + \eta_0)}; \quad \eta_1 = \frac{(1 - \bar{\varepsilon}_p)(0,5 + \eta_0) - \bar{\varepsilon}_{им} \eta_0}{\bar{\varepsilon}_{им}}.$$

Для третьего случая определяющее уравнение имеет вид

$$\frac{4}{\pi} \left\{ 0,5(1 - \bar{E}_T)[(\bar{\varepsilon}_{ю} + \bar{\varepsilon}_p - 1)\varphi_1 + (\bar{\varepsilon}_{им} + \bar{\varepsilon}_p - 1)\varphi_2 - v(\psi_1 - \psi_2)] + \frac{4}{\pi}(\bar{\varepsilon}_{ю} + \bar{\varepsilon}_p)\bar{E}_T \right\} - \bar{\varepsilon}_p = 0, \quad (15)$$

где $\psi_2 = (1 - 4\eta_2^2)^{3/2}$; $\varphi_2 = \eta_2 \sqrt{1 - 4\eta_2^2} + \frac{1}{2} \arcsin 2\eta_2$; $\eta_2 = \frac{(1 + \bar{\varepsilon}_p)(0,5 + \eta_0) + \bar{\varepsilon}_{им} \eta_0}{\bar{\varepsilon}_{им}}$.

Для четвертого случая уравнение, определяющее смещение η_0 , имеет вид

$$\frac{4}{\pi} (1 + \bar{E}_T) \eta_0 - (1 - \bar{E}_T) \left(\varphi_0 \eta_0 + \frac{\psi_0}{6} \right) = 0, \quad (16)$$

где $\varphi_0 = \eta_0 \sqrt{1 - 4\eta_0^2} + \frac{1}{2} \arcsin 2\eta_0$; $\psi_0 = (1 - 4\eta_0^2)^{3/2}$.

Для пятого случая смещение η_0 определяется из уравнения

$$\frac{4}{\pi} \left\{ 0,5(1 - \bar{E}_T)[\bar{\varepsilon}_{ю} + (\bar{\varepsilon}_p - 1)\bar{E}_T + 2]\varphi_2 - \bar{\varepsilon}_{ю} \varphi_0 \right\} - v(\psi_0 + \psi_2) + \frac{\pi}{8} [2\bar{\varepsilon}_{ю} + (\bar{\varepsilon}_p - 1)\bar{E}_T + \bar{\varepsilon}_p + 1]\bar{E}_T \left\} - 1 + \bar{E}_T - \bar{\varepsilon}_p \bar{E}_T, \quad (17)$$

где в выражениях ψ_2 и φ_2 граница

$$\eta_2 = \frac{[2 + (\bar{\varepsilon}_p - 1)\bar{E}_T](0,5 + \eta_0) + \bar{\varepsilon}_{им} \eta_0}{\bar{\varepsilon}_{им}}. \quad (18)$$

Аналогично для стержней прямоугольного сечения смещение η_0 для 2...5 случаев определяется соответственно из следующих уравнений:

$$\frac{\bar{\varepsilon}_{\text{им}}}{0,5 + \eta_0} \left[\frac{1}{2} (1 + \bar{E}_T) \eta_0 + \left(\eta_0 \eta_1 - \frac{0,25 - \eta_1^2}{2} \right) (1 - \bar{E}_T) \right] - (1 - \bar{E}_T) (1 - \bar{\varepsilon}_p) (\eta_1 - 0,5); \quad (19)$$

$$\frac{\bar{\varepsilon}_{\text{им}}}{0,5 + \eta_0} \{ \eta_0 [1 - (\eta_1 + \eta_2)] \bar{E}_T - (\eta_1 + \eta_2) [0,5 (\eta_1 - \eta_2) (1 + \bar{E}_T) + \eta_0] \} + \quad (20)$$

$$+ \bar{\varepsilon}_p \{ [1 - (\eta_1 + \eta_2)] \bar{E}_T - 1 \} - (1 - \bar{E}_T) (\eta_1 - \eta_2) = 0;$$

$$(1 - \bar{E}_T) \eta_0^2 - (1 + \bar{E}_T) \eta_0 + 0,25(1 - \bar{E}_T) = 0; \quad (21)$$

$$\frac{\bar{\varepsilon}_{\text{им}}}{0,5 + \eta_0} [\eta_0 \bar{E}_T - 0,5(1 - \bar{E}_T)(\eta_2 - \eta_0)^2] + \bar{\varepsilon}_p [(\eta_2 - 0,5) \bar{E}_T] (1 - \bar{E}_T) + \quad (22)$$

$$+ (\eta_2 - 0,5)(2 - \bar{E}_T)(1 - \bar{E}_T) = 0.$$

Для практики удобным параметром нагружения является отношение \bar{D} диаметра барабана к диаметру проволоки или к толщине ленты

$$\bar{D} = \frac{0,5 + \eta_0 - (0,5 - \eta_0) (\varepsilon_T - \varepsilon_p)}{0,5 (\varepsilon_T - \varepsilon_p)}, \quad (23)$$

где ε_T — заданный уровень максимальной деформации в сечении стержня.

При упруго-пластическом деформировании, когда $\varepsilon_T > \varepsilon_T$, параметр \bar{D} определяется путем последовательных приближений.

Для заданного уровня упругого деформирования ($\varepsilon_T > \varepsilon_T$) параметр

$$\bar{D}_y = \frac{1}{\varepsilon_T - \varepsilon_p}. \quad (24)$$

На основании (24) можно выполнить различные расчеты по статической прочности в упругой стадии деформирования. В качестве примера выполнен расчет допустимого значения \bar{D}_y при исходных данных [1]: вес концевого груза $P = 170$ кН; длина отвеса ленты $H_0 = 1200$ м; ширина и толщина ленты $b = 40$ мм, $t = 2$ мм; запас статической прочности по пределу прочности ленты $n_c = 6,35$; предел прочности ленты $\sigma_B = 1900$ МПа; соотношение между пределами прочности и текучести $0,55$; модуль продольной упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; удельный вес ленты $\gamma = 78$ кН/м³.

При этих данных определены следующие промежуточные компоненты:

— деформация предела текучести для схематизированной диаграммы (см. рисунок 1)

$$\varepsilon_T = 0,55 \sigma_B / E = 0,55 \cdot 1900 / 2 \cdot 10^5 = 0,01172;$$

— максимальная деформация в сечении ленты

$$\varepsilon_T = \varepsilon_T / 0,55 \cdot n_c = 0,01172 / (0,55 \cdot 6,35) = 0,003355;$$

— деформация растяжения ленты, обусловленная весом концевого груза и ленты

$$\begin{aligned} \varepsilon_p &= N / EA = P + \gamma A H_0 / EA = \\ &= 170 + 78 \cdot 40 \cdot 2 \cdot 1200 \cdot 10^{-6} / (2 \cdot 10^5 \cdot 80) = 0,0011093 \end{aligned}$$

Допустимое значения отношения диаметра барабана (блока) к толщине ленты

$$\bar{D} = 1 / (\varepsilon_T - \varepsilon_p) = 1 / (0,003355 - 0,0011093) = 462 \text{ .}$$

Определение несущей способности стержней круглого и прямоугольного сечений при данной схеме имеет как самостоятельное значение, например при расчете несущей способности

подъемных лент или пучков параллельных проволок, так и подчиненное, при расчете несущей способности витых проволочных изделий (подъемных канатов, грузонесущих кабелей и т.п.).

Под статической несущей способностью стержня при растяжении на вращающемся барабане понимаем значение нормальной силы в его сечении, при котором по оси стержня достигается равномерная предельная деформация $\bar{\epsilon}_{\Pi}^{PP}$ с учетом влияния на этот параметр данного вида нагружения.

От величины $\bar{\epsilon}_{\Pi}^{PP}$ зависит предельное значение деформаций растяжения $\bar{\epsilon}_p^{PP}$, которое снижается по сравнению с $\bar{\epsilon}_{\Pi}^{PP}$ в связи с необходимостью обеспечения последующего изгиба. При этом предельная деформация растяжения

$$\bar{\epsilon}_p^{PP} = \bar{\epsilon}_{\Pi}^{PP} - k_b \bar{\epsilon}_{\text{н.о.}}, \tag{25}$$

где k_b — коэффициент, учитывающий влияние вида нагружения (в данном случае растяжение на вращающемся блоке) на равномерную предельную деформацию $\bar{\epsilon}_{\Pi}^{PP}$, полученную при испытании образцов на растяжение.

Нормальная сила \bar{N} в сечении стержня в его граничном состоянии

$$\bar{N} = \bar{\epsilon}_p^{PP} \text{ при } \bar{\epsilon}_p^{PP} \leq 1; \quad \bar{N} = 1 - \bar{E}_T + \bar{\epsilon}_p^{PP} \bar{E}_T \text{ при } \bar{\epsilon}_p^{PP} \geq 1.$$

Деформация растяжения $\bar{\epsilon}_p^{PP}$, а значит и нормальная сила \bar{N} определяются путем последовательных приближений по (25) с учетом (14). При этом для стержня круглого сечения (проволоки) используются уравнения (13), (15), (16), (17), а для прямоугольного (ленты) уравнения (19)...(22).

Сопоставление расчетных и опытных данных несущей способности проволоки при растяжении на вращающемся барабане приведено в табл. 1.

Таблица 1

Несущая способность проволоки

Диаметр проволоки δ , мм	\bar{D}	\bar{N}	Несущая способность N , кН		Расхождение, %
			по расчету	из опыта [4]	
1,45	24,82	0,72	1,784	1,780	0,2
	37,93	0,90	2,230	2,090	6,7
	75,86	1,04	2,608	2,390	9,1
1,1	32,72	0,90	1,530	1,700	10
	50,00	1,01	1,712	1,778	3,7
	100,0	1,08	1,838	1,875	1,9

Параметры схематизации диаграмм деформирования проволоки, приведенные в табл. 2, вычислялись на основании экспериментальных диаграмм растяжения методом последовательных приближений [5].

Таблица 2

Параметры диаграммы растяжения проволок

Диаметр проволоки δ , мм	Предел прочности проволоки, МПа	Предельная деформация, ϵ_{Π}^{PP}	Параметры схематизации			
			σ_T , МПа	ϵ_T	\bar{E}_T	$\bar{\epsilon}_{\Pi}^{PP}$
1,45	1680	0,0175	1520	0,00884	0,120	1,980
1,1	2070	0,0150	1785	0,01020	0,339	1,471

Исследование зависимости $\bar{N} = \bar{N}(\bar{D}; \bar{E}_T; \bar{\epsilon}_T^{IP})$ показывает, что наиболее интенсивное уменьшение несущей способности \bar{N} в связи с деформацией изгиба будет при $\bar{D} < 60$. Причем эта интенсивность возрастает с уменьшением модуля упругости \bar{E}_T . Так, например, при $\bar{D} = 20$; $\bar{E}_T = 0,1$ уменьшение несущей способности проволоки при растяжении на вращающемся блоке по сравнению с несущей способностью прямой составляет 40 %, а при $\bar{D} = 60$ только 12 %. Это значит, что $\bar{D} = 60$ с точки зрения статической несущей способности можно рекомендовать как допустимое.

Литература

1. Борохович, А.И. Грузоподъемные установки с ленточным тяговым органом / А.И. Борохович, Н.В. Бариев, С.Н. Дьяченко. — М.: Машиностроение, 1980. — 191 с.
2. Лысов, М.Н. Теория и расчет процессов изготовления деталей методами гибки / Н. М. Лысов. — М.: Машиностроение, 1966. — 236 с.
3. Глушко, М.Ф. Удлинение растянутой проволоки при упруго-пластическом изгибе / М.Ф.Глушко, Е.Ф. Богданов // Изв. вузов. Чер. металлургия. — 1978. — № 9. — С. 107 — 110.
4. Сергеев, С.Т. Надежность и долговечность подъемных канатов / С.Т. Сергеев. — К.: Техніка, 1968. — 240 с.
5. Серенсен, С.В. Несущая способность и расчет деталей машин на прочность / С.В. Серенсен, В.П. Когаев, Р.М. Шнейдерович. — М.: Машиностроение, 1975. — 490 с.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Дашенко А.Ф.

Поступила в редакцию 17 июня 2010 г.