

УДК 004.383.3

Е.В. Дикусар, магістр,  
А.А. Швець, магістр,  
Г.А. Грицкевич, бакалавр,  
Одес. нац. політехн. ун-т

## АППРОКСИМАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ УПРАВЛЕНИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ КОМПОНЕНТОЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

*К.В. Дікусар, О.А. Швець, Г.О. Грицкевич.* **Аппроксимация характеристики керування поліноміальної компоненти першого порядку.** Виявлено залежності коефіцієнтів передаточної характеристики фільтра Чебишева другого роду. Розроблено алгоритм апроксимації коефіцієнта знаменника передаточної функції, що дозволить лінійно керувати характеристиками фільтра.

*Е.В. Дикусар, А. А. Швець, Г.А. Грицкевич.* **Аппроксимация характеристики управления полиномиальной компоненты первого порядка.** Виявлены зависимости коэффициентов передаточної характеристики фильтра Чебишева второго рода. Разработан алгоритм аппроксимации коэффициента знаменателя передаточної функции, что позволит линейно управлять характеристиками фильтра.

*E. V. Dikusar, O. A. Shvets, H. O. Hrytskevych.* **Approximation of a control characteristic of a first-order polynomial component.** The dependencies of the transfer characteristic coefficients of the second type Chebyshev filter are determined. An algorithm for approximation of the transfer function denominator factor is developed, that enables linear control of the filter's characteristics.

Широкое распространение информационных технологий и компьютеризации различных сфер жизнедеятельности человека вызывает интенсивное развитие специализированных компьютерных систем (СКС), для повышения эффективности которых необходимо управлять характеристиками перестраиваемых частотно-зависимых компонент. В большинстве СКС имеются компоненты предварительной обработки и фильтрации входных сигналов, в состав которых наиболее часто входят полиномиальные цифровые фильтры.

Отличительной особенностью таких фильтров является плоская амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) в полосе пропускания. К их числу относятся фильтры Бесселя, Баттерворта и Чебышева второго рода [1].

© Е.В. Дикусар, А.А. Швець, Г.А. Грицкевич, 2011

За счет изменения коэффициентов числителя и знаменателя передаточной функции фильтра возможно как комплексное, так и раздельное управление его характеристиками [2]. Однако в большинстве СКС для повышения эффективности работы фильтра и плавного управления им необходима линейная характеристика управления амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) компоненты.

Анализ влияния коэффициентов передаточной функции полиномиального цифрового фильтра на его АЧХ проведен по передаточной функции первого порядка [1]

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 + b z^{-1}}, \quad (1)$$

где  $a_0, a_1, b$  — соответственно действительные коэффициенты числителя и знаменателя.

Для фильтров первого порядка коэффициенты числителя в общем случае равны и выполняют роль коэффициента усиления, т.е.  $k = |a_0| = |a_1|$ . Тогда передаточную функцию (1) для фильтра нижних частот (ФНЧ) можно записать в виде

$$H(z) = k \frac{1 + z^{-1}}{1 + b z^{-1}}. \quad (2)$$

Из (2) следует, что возможно линейное управление коэффициентом  $k$  усиления за счет изменения коэффициентов числителя, что характерно для адаптивных фильтров.

На основе передаточной функции (2) определим соотношение, описывающее АЧХ, как функцию от нормированной частоты среза

$$H(\bar{\omega}) = 2k \frac{\cos\left(\frac{\bar{\omega}}{2}\right)}{\sqrt{(1+b^2) - 4b \sin\left(\frac{\bar{\omega}}{2}\right)}}, \quad (3)$$

где  $\bar{\omega} = 2\pi \frac{f}{f_d}$ ,  $\bar{\omega} \in [0, \pi]$  — нормированная частота среза;

$f$  — текущая частота сигнала,

$f_d$  — частота дискретизации фильтра.

Из уравнения (3) частоту среза на уровне  $c$  можно определить как

$$\bar{\omega}_c = \arccos \left( \frac{1 - 2c^2 \frac{1+b^2}{(1+b)^2}}{1 - 4c^2 \frac{b}{(1+b)^2}} \right). \quad (4)$$

Для фильтра Баттерворта полоса пропускания находится на уровне  $c = 1/\sqrt{2}$  [2], тогда  $\bar{\omega}_c = \arccos\left(-\frac{2b}{1+b^2}\right)$ .

Из полученных формул следует, что частота среза  $\bar{\omega}_c$  зависит от коэффициента  $b$  знаменателя передаточной функции фильтра, а для фильтра Чебышева второго рода еще и от уровня  $c$ .

В результате исследований получена зависимость коэффициента  $b$  от типа фильтра (Баттерворта и Чебышева второго рода), от частоты среза  $\bar{\omega}_c$  и от уровня  $c$  в соответствии с формулой

$$b = - \left\{ 1 - 2 \frac{c^2 \sin^2\left(\frac{\bar{\omega}_c}{2}\right)}{c^2 - \cos^2\left(\frac{\bar{\omega}_c}{2}\right)} \left( 1 - \frac{\sqrt{1-c^2}}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\bar{\omega}_c}{2}\right)} \right) \right\}, \quad (5)$$

в которой уровень  $c$  частоты среза  $\bar{\omega}_c$  зависит от показателя колебательности АЧХ — уровня пульсаций  $\varepsilon$  в полосе задержания и выражается формулой [2]

$$c = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}.$$

Предварительный анализ полученной формулы (5) показывает, что зависимость коэффициента  $b$  от типа фильтра, частоты среза  $\bar{\omega}_c$  и уровня  $c$  имеет явно нелинейный вид. Возникает задача аппроксимации этой зависимости для получения линейной характеристики управления АЧХ. Следует отметить, что у фильтра Баттерворта эта зависимость близка к линейной и погрешность аппроксимации достаточно мала.

Схожесть вида характеристик числителя и знаменателя цифрового фильтра Чебышева второго рода и цифрового фильтра Баттерворта возникает при  $c=0,707$ , что соответствует уровню пульсаций в полосе задержания  $\varepsilon=-3$  дБ, а при больших и меньших значениях  $\varepsilon$  эта зависимость имеет как почти линейные участки, так и явно нелинейные (рис. 1).

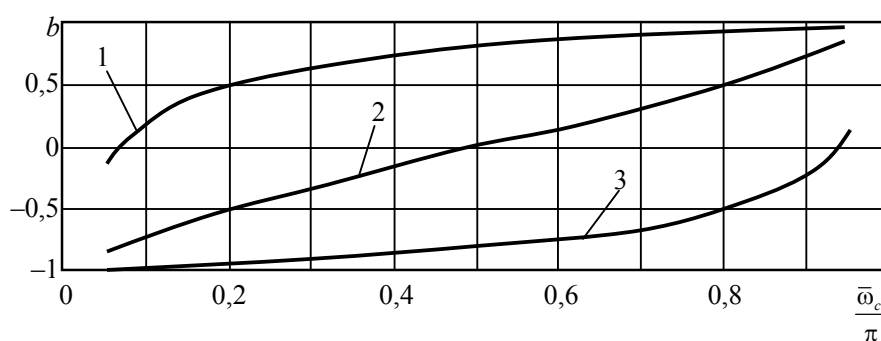


Рис. 1. График зависимости коэффициента  $b$  знаменателя передаточной функции фильтра Чебышева второго рода от частоты среза фильтра  $\bar{\omega}_c$  при уровнях пульсаций в полосе задержания  $\varepsilon=-0,05$  (1);  $-3$  (2);  $-20$  дБ (3)

Для аппроксимации приведенных зависимостей разработан алгоритм (рис. 2), который основан на Чебышевской аппроксимации [3].

До вычислений необходимо ввести начальные параметры:  $N$  — количество точек, на которые разбивается участок, аппроксимируемой кривой, и диапазон изменения нормированной частоты  $\bar{\omega}_c$  среза. Далее происходит расчет коэффициента  $b$  знаменателя по формуле (5).

Благодаря анализу характера кривизны аппроксимируемой зависимости в блоке условного оператора, алгоритм обладает высоким быстродействием. В зависимости от выбора, который происходит в блоке условного оператора, расчет аппроксимирующих точек начинается либо с начала кривой зависимости коэффициента  $b$  — для  $\varepsilon < -3$  дБ, либо с ее конца — для  $\varepsilon > -3$  дБ.

Наиболее важным в алгоритме можно считать блок, где происходит определение граничной точки между двумя участками аппроксимации. На каждой итерации происходит смещение конечной точки участка аппроксимации на одну позицию и заполнение матрицы размером  $N \times N$  строками, каждая из которых содержит массивы точек для первого участка кривой. Затем пересчитывается коэффициент знаменателя  $b$  и нормированная частота  $\bar{\omega}_c$  среза с целью получения расчетной погрешности и ее сравнения со значением заданной погрешности. На каждом цикле рассчитывается относительная погрешность аппроксимированной точки от точки на исходной зависимости [3].

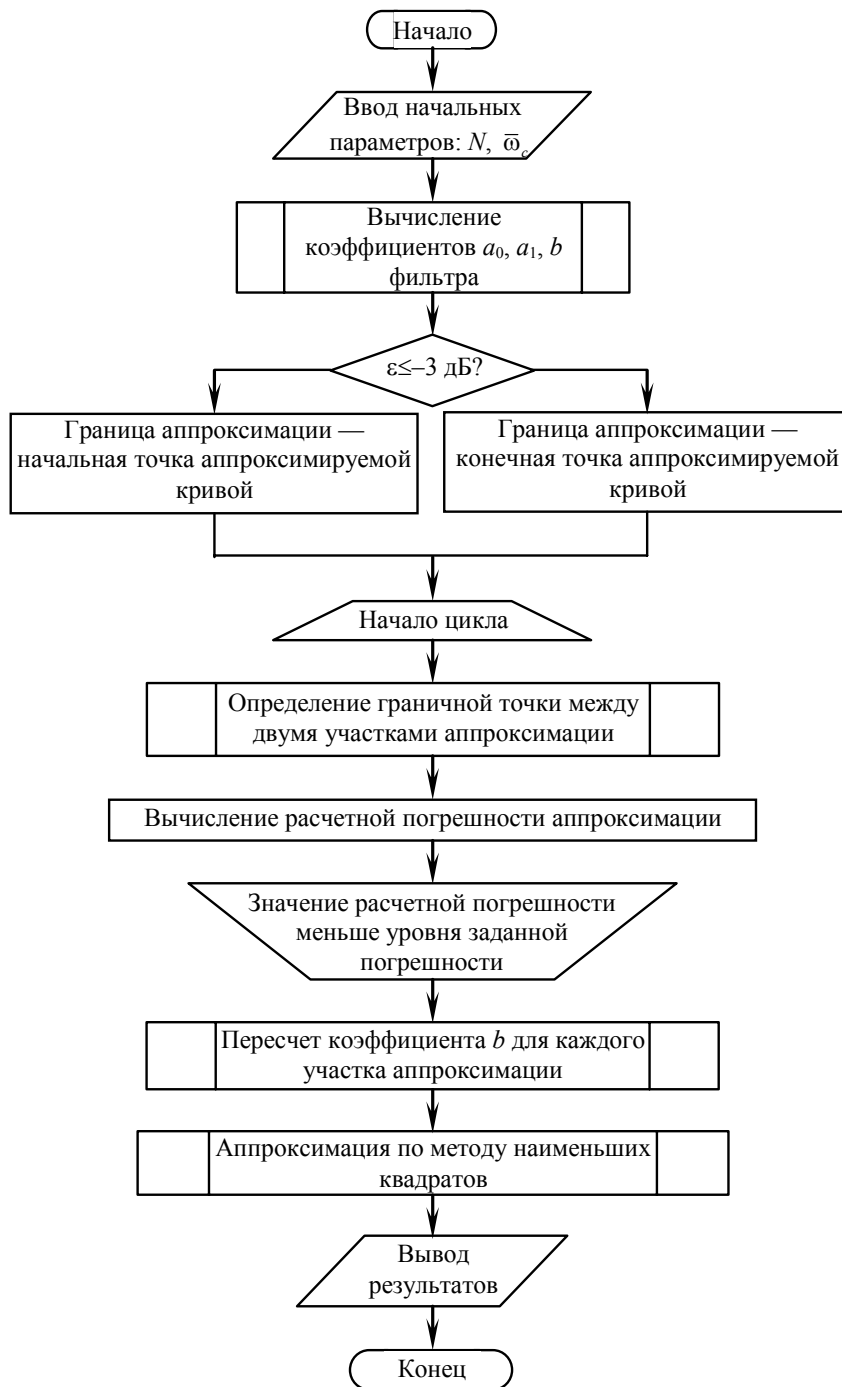


Рис. 2. Блок-схема алгоритма аппроксимации зависимости коэффициент  $b$  знаменателя передаточной функции фильтра Чебышева второго рода от частоты  $\bar{\omega}_c$  среза фильтра

Аппроксимация зависимости коэффициента  $b$  (5) выполнена на основе предложенного алгоритма для двух линейных участков [3] (рис. 3).

Последний этап работы алгоритма — аппроксимация кривой коэффициента  $b$  знаменателя по методу наименьших квадратов.

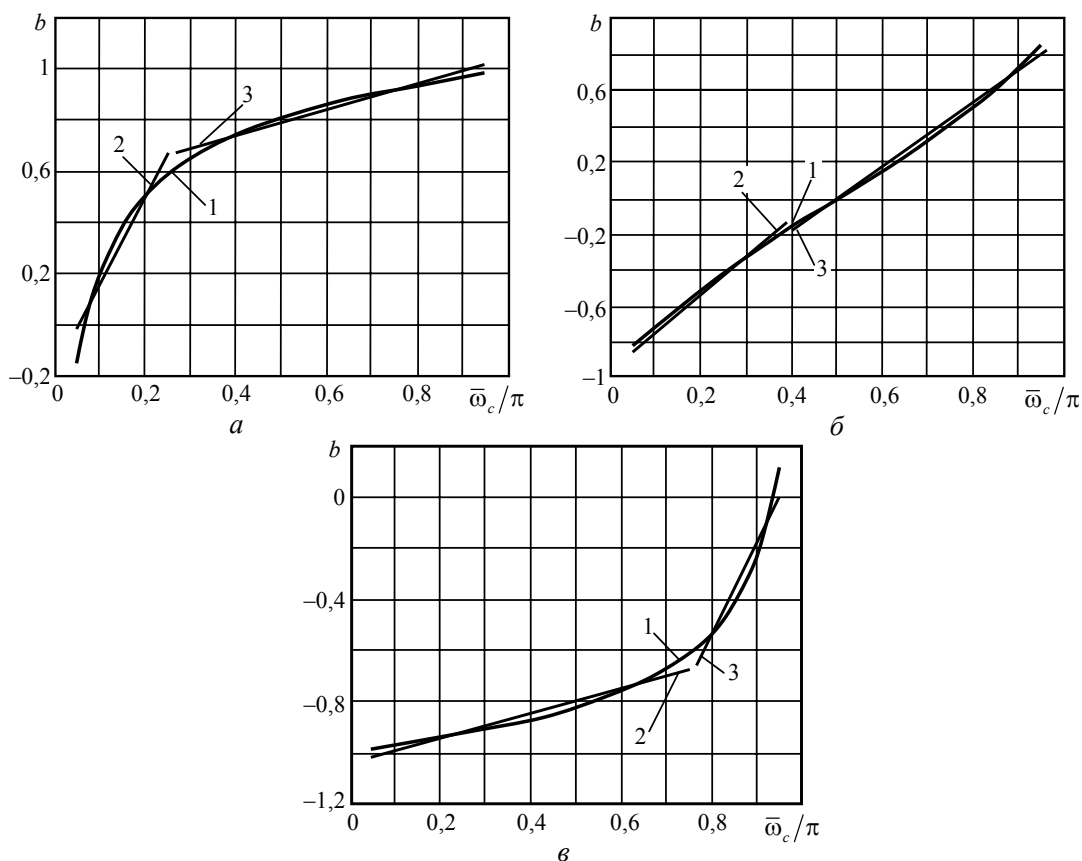


Рис. 3. Графики зависимостей коэффициента  $b$  знаменателя от частоты  $\bar{\omega}_c$  среза (1) и аппроксимированные значения (2, 3) для уровня пульсаций  $\varepsilon = -0,05$  (а),  $-3$  (б),  $-20$  дБ (в) в полосе задержания

Аппроксимации кривой секущими проведена на основе метода наименьших квадратов (МНК), согласно которому находятся оптимальные параметры линейной регрессии, такие, что сумма квадратов ошибок минимальна [4].

При изменении коэффициента знаменателя  $b$  осуществляют перестройку характеристик фильтра: коэффициента  $k$  усиления (2) и частоты среза  $\bar{\omega}_c$  (4). Для изменения частоты среза  $\bar{\omega}_c$  необходима подстройка значения коэффициента усиления  $k$  при новом значении коэффициента знаменателя  $b$ .

Показаны АЧХ, построенные по формуле (5) и аппроксимированным значениям коэффициентов  $k$  и  $b$  фильтра (рис. 4). Для уменьшения погрешности необходимо увеличить количество участков аппроксимации для достижения заданной точности воспроизведения АЧХ при ее перестройке.

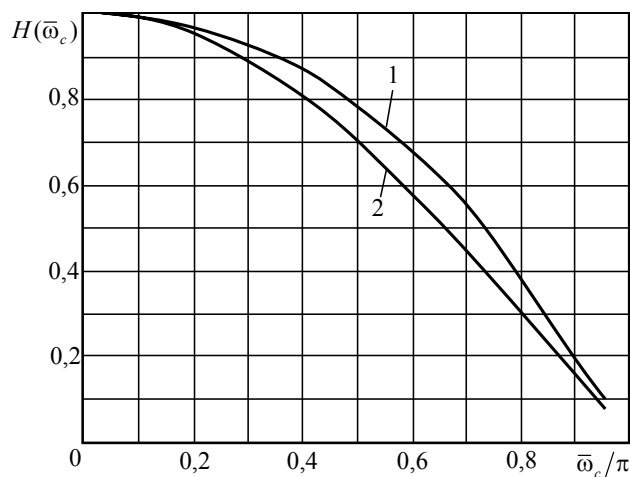


Рис. 4. Графики АЧХ построенные по формуле (5) (1) и аппроксимированным (2) значениям коэффициентов  $k$  и  $b$  фильтра

Таким образом, определены зависимости, которые можно использовать для получения линейной характеристики управления АЧХ, и показана возможность такого управления.

### Литература

1. Сергиенко, А.Б. Цифровая обработка сигналов / А.Б. Сергиенко. — СПб.: Питер, 2006. — 751 с.
2. Справочник по расчету и проектированию ARC-схем / С.А. Букашкин, В.П. Власов, Б.Ф. Змий и др.; под ред. А.А. Ланнэ. — М.: Радио и связь, 1984. — 368 с.
3. Литовченко, Н.М. Анализ критериев аппроксимации амплитудно-частотной характеристики устройства / Н.М. Литовченко, В.С. Ситников, А.В. Яковлев // Холодил. техніка і технологія. — 2006. — № 1(99). — С. 86 — 88.
4. Каханер, Д. Численные методы и программное обеспечение / Д. Каханер, К. Моулер, С. Нэш. — М.: Мир, 1998. — 324 с.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. мор. акад. Живица В.И.

Поступила в редакцию 15 ноября 2010 г.