УДК 621.371:621.372

И.Ю. Дмитриева, канд. физ.-мат. наук, доц.,
Одес. нац. акад. связи им А.С. Попова

ПОСТРОЕНИЕ ОБРАТНОГО МАТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА ДЛЯ СИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

І.Ю. Дмитрієва. **Побудова оберненого матричного оператора для симетричної системи диференціальних рівнянь Максвелла.** Розглядається задача конструктивного розв'язання симетричної системи диференціальних рівнянь Максвелла на рівні діагоналізації у випадку довільного лінійного збудженого анізотропного середовища. Результат отримано за допомогою побудови оберненого матричного оператора, який зводить початкову систему до еквівалентної сукупності відповідних скалярних рівнянь

И.Ю. Дмитриева. **Построение обратного матричного оператора для симметричной системы дифференциальных уравнений Максвелла.** Рассматривается задача конструктивного решения симметричной системы дифференциальных уравнений Максвелла на уровне диагонализации в случае произвольной линейной анизотропной возбужденной среды. Результат получен с помощью построения обратного матричного оператора, сводящего исходную систему к эквивалентной совокупности скалярных уравнений.

I.Yu. Dmitrieva. **Construction of the inverse matrix operator for the symmetrical system of differential Maxwell equations.** The problem of the explicit solution for the symmetrical system of differential Maxwell equations is considered. The suggested approach is done in terms of the diagonalizing system's procedure in the case of arbitrary linear anisotropic excited medium. The sought for solution is found by means of the inverse matrix operator's construction and reduces the original system to the equivalent totality of the corresponding scalar equations.

Поскольку большинство физических процессов математически описывается с помощью систем дифференциальных уравнений в частных производных [1…3], аналитическое решение последних не теряет своей актуальности и в настоящее время интенсивного развития вычислительной техники. Этот связано с тем, что, несмотря на широкие возможности численных компьютерных методов, исследование любой прикладной задачи можно считать полностью завершенным лишь при наличии ее математического решения в аналитическом виде [4]. Даже в случае только экспериментального изучения итоговый результат предпочтительнее представить все же в аналитической форме, а затем, если необходимо, переходить к численной реализации.

Очевидна необходимость конструктивного решения и систем дифференциальных уравнений в частных производных, являющихся математическими моделями соответствующих физических процессов.

Известно решение симметричной системы дифференциальных уравнений Максвелла на уровне диагонализации, т.е. сведения к эквивалентной совокупности скалярных уравнений относительно координат вектор-функций напряженности электромагнитного поля [5],

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{\mathbf{H}} = (\sigma \pm \lambda\varepsilon_a)\vec{\mathbf{E}} + \varepsilon_a \dfrac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t} + \vec{j}^{\,cm}; \\ -\operatorname{rot}\vec{\mathbf{E}} = (r \pm \lambda\mu_a)\vec{\mathbf{H}} + \mu_a \dfrac{\partial\vec{\mathbf{H}}}{\partial t} + \vec{e}^{\,cm}, \end{cases} \qquad (1)$$

где $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}(x, y, z, t)$ и $\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{H}}(x, y, z, t)$ — искомые вектор-функции со скалярными компонентами $E_k=E_k\,(x,\ y,\ z,\ t)$ и $H_k=H_k\,(x,\ y,\ z,\ t)$ (k=1, 2, 3) обозначают напряженности электрического и магнитного поля;

σ, μ_a, ε_a = const > 0 — удельная проводимость, абсолютная магнитная и диэлектрическая проницаемости среды, соответственно;

λ = const > 0 — параметр воздействующего на среду сигнала, а предшествующее символу λ чередование знака означает реакцию среды на данный сигнал;

$r > 0$ — некоторая теоретическая константа, существование которой на текущем этапе исследований только предполагается;

$\vec{\mathbf{j}}^{\,cm} = \vec{\mathbf{j}}^{\,cm}(x, y, z, t),\ \vec{\mathbf{e}}^{\,cm} = \vec{\mathbf{e}}^{\,cm}(x, y, z, t)$ - известные вектор-функции со скалярными компонентами $j_k^{cm} = j_k^{cm}(x, y, z, t),\ e_k^{cm} = e_k^{cm}(x, y, z, t),\ (k = \overline{1,3})$, характеризующие сторонние токи и напряжения, соответственно.

Симметрия понимается здесь в смысле полноты правых частей системы, содержащих линейные дифференциальные операторы первого порядка по переменной времени t. Процедура диагонализации является операторным аналогом алгебраического метода Гаусса и применяется в два этапа — поблочно и покоординатно.

Алгоритм диагонализации [5] обобщен и на случай произвольной конечномерной системы дифференциальных операторных уравнений в частных производных [6, 7] над соответствующим конечномерным пространством.

Осуществлена попытка изучения диагонализации указанной системы в векторной форме [8], а именно: после полного завершения диагонализационной процедуры [5], итоговые скалярные уравнения относительно искомых компонент вектор-функций напряженности электрического и магнитного полей $\vec{\mathbf{E}}$ и $\vec{\mathbf{H}}$ соответственно, вновь записывались в векторной форме. Последние представлялись в виде двух уравнений, зависящих только от одной из векторных неизвестных, — либо $\vec{\mathbf{E}}$, либо $\vec{\mathbf{H}}$. В данном случае нарушалось одно из основных достигнутых преимуществ [5]. Упомянутое достоинство состояло в том, что существование обратных операторов по отношению к исходным матричным элементам лишь неявно предполагалось, но в действительности нигде не использовалось — ни на уровне их конструктивного построения, ни, по крайней мере, исследования условий существования.

Таким образом, известный диагонализационный алгоритм [8], хоть и сводил исходную симметричную дифференциальную максвелловскую систему к единому “векторно-скалярному” уравнению относительно лишь одной из искомых вектор-функций $\vec{\mathbf{E}}$ или $\vec{\mathbf{H}}$, тем не менее, базировался, на конкретном построении обратных операторов в частных производных. Последнее представляло существенное как математическое, так и физическое ограничение на исходную постановку задачи.

Однако, возвращаясь к алгоритму диагонализации [5…7], необходимо подчеркнуть следующее. Невзирая на математическую строгость, но при этом простоту и доступность метода, его полная применимость к некоторым конкретным задачам может представляться несколько громоздкой. Поэтому для быстрого аналитического математического решения прикладных и инженерных задач целесообразно использовать более краткие изящные математические методы смешанного типа. Такой подход относится и к рассматриваемой задаче о решении симметричной системы дифференциальных уравнений Максвелла [5] на диагонализационном уровне.

Для сокращения и упрощения вычислений при решении задач диагонализации предлагается комбинация алгоритма поблочной диагонализации системы дифференциальных уравнений Максвела (1), а затем построение обратного оператора для преобразованных дифференциальных уравнений. Последний шаг основан на классическом аппарате теории матриц [9] и реализован взамен покоординатной диагонализации [5], составляющей три четверти всех последующих вычислений.

Итоговый результат полностью согласуется с заключительными выводами работы [5] о получении совокупности искомых скалярных уравнений относительно координат векторных функций напряженности электромагнитного поля, и при этом быстрее приводит к достижению поставленной цели — реализации в явном виде полной диагонализационной процедуры для симметричной дифференциальной максвелловской системы.

Переходя к постановке задачи и поблочной диагонализации исследуемой матрицы, рассматриваем упомянутую симметричную систему дифференциальных уравнений Максвелла.

После применения к системе (1) простого этапа блочной диагонализации получено единое “векторно-скалярное“ уравнение [5]

$$-(A^2+DC)\overrightarrow{\mathbf{F}_i}=\overrightarrow{\varphi_i} \quad (i=1,2), \tag{2}$$

где введены следующие функционально-операторные обозначения:

$$\begin{gathered}\overrightarrow{\mathbf{F}_1}=\overrightarrow{\mathbf{E}},\ \overrightarrow{\mathbf{F}_2}=\overrightarrow{\mathbf{H}},\ \vec{\varphi}_1=A\vec{\mathbf{e}}^{cm}+D\vec{\mathbf{j}}^{cm},\ \vec{\varphi}_2=C\vec{\mathbf{e}}^{cm}-A\vec{\mathbf{j}}^{cm};\\ A=\mathrm{rot},\ D=r+\mu_a\partial_0^*,\ C=\sigma+\varepsilon_a\partial_0^*,\ \partial_0^*=\partial_0\pm\lambda,\partial_0=\frac{\partial}{\partial t}.\end{gathered} \tag{3}$$

Далее, с помощью несложных алгебраических преобразований уравнение (2) сведено к эквивалентной системе дифференциальных уравнений в частных производных относительно искомых скалярных функций $F_{ik}=F_{ik}(x, y, z, t)$ (k =1, 2, 3; i =1, 2)

$$\begin{cases}A_{23}F_{i1}-B_{12}F_{i2}-B_{13}F_{13}=\varphi_{i1};\\ -B_{12}F_{i1}+A_{13}F_{i2}-B_{23}F_{i3}=\varphi_{i2};\\ -B_{13}F_{i1}-B_{23}F_{i2}+A_{12}F_{i3}=\varphi_{i3},\end{cases} \tag{4}$$

где F_{ik}, φ_{ik}, — из формул (1)…(3);

матричные элементы системы (4)

$$\begin{gathered}B_{jk}=\partial_j\partial_k\,(j,k=\overline{1,3};\ j\neq k);\\ \partial_1=\frac{\partial}{\partial x},\partial_2=\frac{\partial}{\partial y},\partial_3=\frac{\partial}{\partial z};\\ A_{jk}=\Delta-\partial_l^2-\bar{\partial}_0^2\ (l\neq j,k;\ j\neq k;\ j,k,l=\overline{1,3});\\ \Delta=\sum_{k=1}^{3}\partial_k^2 \text{ — оператор Лапласа в } R_3;\\ \bar{\partial}_0^2=\mu_a\varepsilon_a(\partial_0^*)^2+(\sigma\mu_a+r\varepsilon_a)\partial_0^*+r\sigma.\end{gathered} \tag{5}$$

Важно заметить, что матрица в системе (4) симметрична относительно главной диагонали, что будет использовано при построении искомого обратного матричного оператора этой системы.

Второй заключительный покоординатный этап диагонализации системы (4) своей вычислительной нагрузкой не только намного превосходит предыдущую поблочную процедуру, но и составляет не менее 75 % аналитического обоснования при решении диагонализационной задачи системы (1).

Предлагается покоординатную диагонализацию $(1)\equiv(4)$ осуществлять намного быстрее посредством построения соответствующего обратного матричного оператора. Для этого система (4) записывается в матричной форме

$$KF_i = \varphi_i \, (i = 1, 2), \tag{6}$$

где $F_i = F_i\,(x, y, z, t)$, $\varphi_i = \varphi_i(x, y, z, t)$ (i=1,2) — из формул (1)…(3);

$$K = \begin{bmatrix} A_{23} & -B_{12} & -B_{13} \\ -B_{12} & A_{13} & -B_{23} \\ -B_{13} & -B_{23} & A_{12} \end{bmatrix}, \; F_i = \begin{bmatrix} F_{i1} \\ F_{i2} \\ F_{i3} \end{bmatrix}, \; \varphi_i = \begin{bmatrix} \varphi_{i1} \\ \varphi_{i2} \\ \varphi_{i3} \end{bmatrix} (i = 1, 2) \, . \tag{7}$$

Далее, с использованием классических результатов теории матриц [9], вычисляется определитель системы (6), (7) det$K$ и обратный матричный оператор K^{-1}, соответственно,

$$\det K = -\overline{\partial}_0^2 (\Delta - \overline{\partial}_0^2)^2; K^{-1} = (-\overline{\partial}_0^2 (\Delta - \overline{\partial}_0^2))^{-1} \begin{bmatrix} \partial_1^2 - \overline{\partial}_0^2 & \partial_1\partial_2 & \partial_1\partial_3 \\ \partial_1\partial_2 & \partial_2^2 - \overline{\partial}_0^2 & \partial_2\partial_3 \\ \partial_1\partial_3 & \partial_2\partial_3 & \partial_3^2 - \overline{\partial}_0^2 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что $K^{-1}K=I=\mathrm{diag}(1,1,1)$ и соответствует основному свойству обратного матричного оператора [9]. Кроме того, обратная матрица из (8) по отношению к K из формул (7) и (4) также является симметричной относительно главной диагонали, что согласуется с общеизвестными результатами [9].

После применения обратного оператора K^{-1} из выражений (8) к обеим частям матричного уравнения (6), получено требуемое значение

$$F_i = \begin{bmatrix} F_{i1} \\ F_{i2} \\ F_{i3} \end{bmatrix} = K^{-1}\varphi_i = K^{-1} \begin{bmatrix} \varphi_{i1} \\ \varphi_{i2} \\ \varphi_{i3} \end{bmatrix} = (\overline{\partial}_0^2 (\overline{\partial}_0^2 - \Delta))^{-1} \begin{bmatrix} \partial_1^2 - \overline{\partial}_0^2 & \partial_1\partial_2 & \partial_1\partial_3 \\ \partial_1\partial_2 & \partial_2^2 - \overline{\partial}_0^2 & \partial_2\partial_3 \\ \partial_1\partial_3 & \partial_2\partial_3 & \partial_3^2 - \overline{\partial}_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{i1} \\ \varphi_{i2} \\ \varphi_{i3} \end{bmatrix} (i = 1, 2) \, . \tag{9}$$

Нетрудно проверить, что (9) полностью согласуется с аналогичным известным результатом [5]. Действительно, после применения оператора $\overline{\partial}_0^2 (\overline{\partial}_0^2 - \Delta)$ к обеим частям матричного уравнения (9) получается необходимое его представление, во всех деталях совпадающее с заключительным результатом [5],

$$\begin{cases} \overline{\partial}_0^2 (\overline{\partial}_0^2 - \Delta) F_{i1} = (\partial_1^2 - \overline{\partial}_0^2)\varphi_{i1} + \partial_1 (\partial_2 \varphi_{i2} + \partial_3 \varphi_{i3}); \\ \overline{\partial}_0^2 (\overline{\partial}_0^2 - \Delta) F_{i2} = (\partial_2^2 - \overline{\partial}_0^2)\varphi_{i2} + \partial_2 (\partial_1 \varphi_{i1} + \partial_3 \varphi_{i3}); \, (i = 1, 2), \\ \overline{\partial}_0^2 (\overline{\partial}_0^2 - \Delta) F_{i3} = (\partial_3^2 - \overline{\partial}_0^2)\varphi_{i3} + \partial_3 (\partial_1 \varphi_{i1} + \partial_2 \varphi_{i2}). \end{cases} \tag{10}$$

Для полной диагонализации исходной системы (1), включающей покоординатный уровень (10), применяется “смешанный” метод, содержащий поблочную диагонализацию [5] системы (1), и построение обратного матричного оператора, осуществляющего диагонализационный процесс совокупности уравнений (4).

После операторного воздействия (8), примененного к матричному уравнению (9), искомая единая вектор-функция напряженностей электромагнитного поля в терминах соответствующих скалярных компонент

$$\mathbf{F}_i = \overline{\partial}_0^2 (\overline{\partial}_0^2 - \Delta) \begin{bmatrix} F_{i1} \\ F_{i2} \\ F_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\partial_1^2 - \overline{\partial}_0^2)\varphi_{i1} + \partial_1 (\partial_2 \varphi_{i2} + \partial_3 \varphi_{i3}) \\ (\partial_2^2 - \overline{\partial}_0^2)\varphi_{i2} + \partial_2 (\partial_1 \varphi_{i1} + \partial_3 \varphi_{i3}) \\ (\partial_3^2 - \overline{\partial}_0^2)\varphi_{i3} + \partial_3 (\partial_1 \varphi_{i1} + \partial_2 \varphi_{i2}) \end{bmatrix} (i = 1, 2) \, . \tag{11}$$

Таким образом, предложен доступный, легкий, строго математический, краткий смешанный алгоритм диагонализации системы, основанный на явном построении обратного матричного оператора симметричной системы дифференциальных уравнений Максвелла в случае произвольной анизотропной линейной возбужденной среды.

Предложенный комбинированный подход намного быстрее приведет к полной диагонализации исходной системы (1), поскольку не требуется построения обратных операторов по отношению $\overline{\partial}_0^2$ и $\overline{\partial}_0^2 - \Delta$, заданных в (5), т.к. в заключительных формулах (11), описывающих искомое решение, указанные операторы вообще не присутствуют.

Литература

1. Итоги науки и техники. Т. 30: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Дифференциальные уравнения с частными производными. — М.: Наука, 1988. — 263 с.
2. Итоги науки и техники. Т. 31: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Дифференциальные уравнения с частными производными. — М.: Наука, 1988. — 267 с.
3. Итоги науки и техники. Т. 32: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Дифференциальные уравнения с частными производными. — М.: Наука, 1988. — 218 с.
4. Дмитриева, И.Ю. Математическая модель численной реализации диагонализационной задачи в случае многомерных цепей / И.Ю. Дмитриева // Наук. пр. ОНАЗ ім. О.С. Попова. — 2010. — № 1. — С. 78 — 84.
5. Иваницкий, А.М. Диагонализация “симметричной” системы дифференциальных уравнений Максвелла / А.М. Иваницкий, И.Ю. Дмитриева // Наук. пр. ОНАЗ ім. О.С. Попова. — 2007. — № 1. — С. 15 — 24.
6. Dmitrieva, I. Diagonalization problems in the classical Maxwell theory and their industrial applications / I. Dmitrieva // Proc. of the Intern. Scient. Conf. on Econophysics, Complexity, etc. (ENEC08), Bucharest. Hyperion Univ., 2008. — Bucharest: Victor Publishing House, 2008. — P. 11 — 23.
7. Dmitrieva, I. Yu. Diagonalization of the differential operator matrix in the case of the multidimensional circuits / I.Yu. Dmitrieva, A.M. Ivanitckiy // Scient. works of ONAT after A.S. Popov. — 2009. — № 1. — P. 36 — 51.
8. Иваницкий, А.М. Основные направления при решении обобщенной системы уравнений Максвелла в векторной форме / А.М. Иваницкий, И.Ю. Дмитриева // Наук. пр. ОНАЗ ім. О.С. Попова. — 2010. — № 2. — С. 44 — 49.
9. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. акад. связи им. О.С. Попова Стрелковская И.В.

Поступила в редакцию 17 января 2011 г.